MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Forma polar geral de uma secção cônica

Teorema

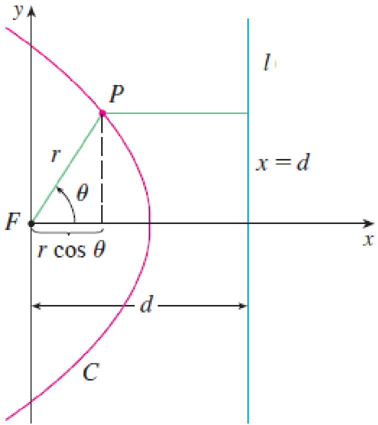
Seja F um ponto fixado no plano ("foco") e l uma reta fixada ("diretriz") e $e > 0$ ("excentricidade"). O lugar dos pontos P do plano tais que

$$\frac{d(P,F)}{d(P,l)} = e, \text{ onde } d \text{ é a distancia,}$$

é uma seção cônica:

1. *caso $e < 1$: uma elipse,*
2. *caso $e = 1$: uma parábola,*
3. *caso $e > 1$: uma hipérbole.*

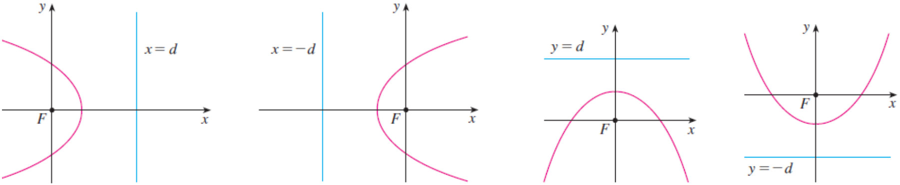
Forma polar geral II



Com o gráfico podemos ver que

$$\frac{d(P,F)}{d(P,l)} = e \implies r = e(d - r\cos\theta) \implies r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}.$$

Forma polar geral III



(a) $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$ (c) $r = \dfrac{ed}{1 + e\sin\theta}$ (d) $r = \dfrac{ed}{1 - e\sin\theta}$

Teorema

A forma polar geral de uma seção cônica de excentricidade e é:

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \text{ ou } r = \frac{ed}{1 \pm e\text{sen}\theta}$$

Movimento de um planeta

No potencial gravitacional $V = -\frac{GM}{r}$. Na proxima aula:

Teorema

O movimento de uma partícula na influencia de uma força gravitacional é uma cônica de excentricidade

$$e = \left(1 + \frac{2Eh^2}{m}\right)^{1/2},$$

onde h é o momento angular.

Movimento de um planeta: parte I, o movimento fica num plano

1. **Equação de Newton:**

$$m(\vec{x})'' = -GMm.\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$$

2. **Conservação do momento angular:**

$$\frac{d}{dt}(\vec{x} \wedge m\vec{v}) = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{x} \wedge m(\vec{x})'' = \vec{0} + \vec{x} \wedge -GMm\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$$

Lembra que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é perpendicular à $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e tal que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\mathrm{sen}(\vec{u}, \vec{v})$, então $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ para qualquer $\vec{u}$.

3. **Formula para $\vec{u} \wedge \vec{v}$:** dados $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (b_1c_2 - c_1b_2)\vec{i} + (a_2c_1 - a_1c_2)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

4. **O movimento é planar, no plano definido por** $\vec{x}_0, \vec{v}_0$: este plano pode ser definido como o plano passando pelo ponto inicial e perpendicular à $L(0) :=$ momento angular. Simplesmente porque $\vec{x}(t)$ é sempre perpendicular ao momento angular L.

Movimento de um planeta: parte II, equação polar do movimento

1. **Equação polar:** agora sabemos que o movimento pode ser descrito com
$$t \mapsto \begin{pmatrix} r(\theta(t)) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$$
2. **Base** $\binom{\vec{u}}{\vec{v}}$**:** é útil definir $\vec{u} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \binom{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}$ (vetor radial, unitário na direção de $\vec{x}$) e $\vec{v} = \binom{-\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta}$ perpendicular a $\vec{u}$.
Podemos observar que $\frac{d}{dt}\vec{u} = \theta'.\vec{v}$ e $\frac{d}{dt}\vec{v} = -\theta'.\vec{u} = -\dot{\theta}.\vec{u}$
3. Derivadas de $\vec{x}, \vec{v}$: Temos que
$\vec{x} = \binom{r\cos\theta}{r\mathrm{sen}\theta} \implies \vec{v} = \binom{\dot{r}\cos\theta - r\mathrm{sen}\theta\dot{\theta}}{\dot{r}\mathrm{sen}\theta + r\cos\theta\dot{\theta}} = \dot{r}.\vec{u} + r\dot{\theta}\vec{v}.$
Da mesma maneira,
$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{u} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{v} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{v} - r\dot{\theta}^2\vec{u}$$

Movimento de um planeta: parte III

1. **Expressão do momento angular:**

$$\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$$

2. **Equação do movimento:** ao longo do vetor $\vec{u}$:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GMm}{r^2} \implies \ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}$$

3. **Mudança de coordenadas** $u = 1/r$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d(1/u)}{dt} = (-1/u^2)\frac{du}{dt} = -r^2\frac{du}{d\theta}\dot{\theta} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}$$

e também

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

(lembra que $\dot{\theta} = \frac{L}{m}u^2$)

Movimento de um planeta: onde estamos agora?

1. **Equação do movimento:**

$$-\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -GMu^2 + \frac{L^2}{m}u^3$$

   mas isso é simplesmente:

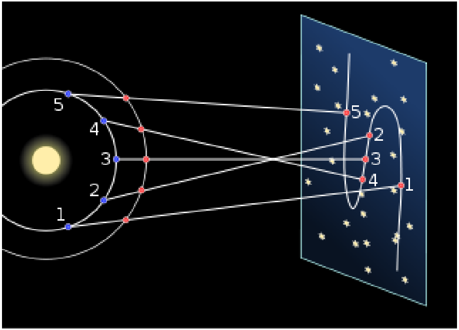
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}$$

2. **Solução:**

$$u = \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2} + A\cos\theta$$

3. **Conclusão:** nós sabemos que $\frac{1}{r} = B + A\cos\theta$ é uma equação polar de uma seção cônica.

Um pouco de historia



1. **Tycho Brahe:** astrônomo dinamarquês(1546-1601). Ele teve um observatório chamado Uranienborg numa ilha entre a Dinamarca e a Suécia. Quando era estudante, Tycho Brahe duelou com um outro estudante (sobre uma questão matemática) e acabou perdendo o nariz. Sem telescópio, ele fez observações das posições das estrelas e dos planetas.
2. **Johannes Kepler:** (1571-1630).Escreveu as Leis de Kepler

Leis de Kepler

1. **Primeira lei:** "Os planetas descrevem órbitas elípticas, com o sol num dos focos."
2. **Segunda lei:** "O raio vetor que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais. (lei das áreas)"

$$r^2.\dot{\theta} = constante = L/m \implies \int_{t=t_0}^{t_0+a} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt = (L/m).a$$

3. **Terceira lei:** "Os quadrados dos períodos de revolução (T) são proporcionais aos cubos das distâncias médias do Sol aos planetas. $T^2 = ka^3$, onde k é uma constante de proporcionalidade.

Os espaços $\mathbb{R}^n$

1. **Def.** "conjunto de todas as n-uplas, isto é sequências ordenadas de n reais"
$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$$
2. **Soma:**
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$
3. **Multiplicação por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$:**
$$\lambda.(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

Espaço vetorial: dizemos que $\mathbb{R}^n$ tem uma estrutura de espaço vetorial.

Produto escalar:

Definição

O produto escalar dos vetores $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, denotado por $\vec{x}.\vec{y}$ é um número real, definido por

$$\vec{x}.\vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n$$

Produto escalar e propriedades

1. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
3. $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda\vec{u}.\vec{v}$
4. $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$ e $\vec{u}.\vec{u} = 0 \implies \vec{u} = \vec{0}$.

Vetores perpendiculares:

Lema (Caso da dimensão 2)

$$\vec{x}.\vec{y} = (x_1, y_1).(x_2, y_2) = \|x\|.\|y\| \cos(\vec{x}, \vec{y}), \text{ onde } \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

onde $\|\vec{x}\|$ é chamado a norma do vetor $\vec{x}$.

Demonstração.

Podemos escrever $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = (\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$ para $\alpha \in [0, 2\pi)$ e também $\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = (\cos\beta, \text{sen}\beta)$ para um $\beta \in [0, 2\pi)$. Então $\frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|x\|.\|y\|} = \cos(\alpha - \beta)$. □

Produto escalar e vetores perpendiculares

Definição

Os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são perpendiculares (ou ortogonais) se

$$\vec{x}.\vec{y} = 0$$

Exercício

Mostre, que para os vetores $\vec{x} = (x_1, y_1)$ e $\vec{y} = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$:

1. $\vec{x}.\vec{x} = ||\vec{x}||$
2. $||\vec{x} - \vec{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = d(M, N)$ *onde M tem coordenadas* (x_1, y_1) *e N tem coordenadas* (x_2, y_2).
3. *Mostre o teorema de Pitágoras.*

Exercício

Determine um vetor não nulo que seja ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ *e* $\vec{v} = (2, 1, 2)$.

Retas definidas com um ponto e uma direção

Teorema

A equação paramétrica da reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ *e que é paralela à direção do vetor* $\vec{OA} = (a, b)$ *é*

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b) \text{ onde } t \in \mathbb{R}$$

Quando $a \neq 0$*, uma equação cartesiana é*

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$

Teorema

A equação paramétrica da reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ *e que é perpendicular à direção do vetor* $\vec{ON} = (a, b)$ *é*

$$(a, b).(x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Retas definidas com um ponto e uma direção II

Exercício

Mostre que $ax + by + c = 0$ *é perpendicular à direção do vetor* (a, b).

Exercício

Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(1, -1)$ *e que é perpendicular à reta* $2x + y = 1$.

Exercício

Determine um vetor cuja direção seja perpendicular à reta $x + 3y = 2$.

Exercício

Mostre que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ *é perpendicular à* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$.

Exercício

Determine a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $(1, 2, -1)$ *e que seja perpendicular às direções dos vetores* $\vec{u} = (1, 1, 1)$ *e* $\vec{v} = (1, -2, 1)$.

Norma (ou comprimento) de um vetor

Definição

O número $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2} = \sqrt{\vec{x}.\vec{x}}$ *é chamado a norma do vetor* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Teorema (Desigualdade de Schwarz)

Para $\vec{x}, \vec{y}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *temos*

$$|\vec{x}.\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|.$$

Demonstração.

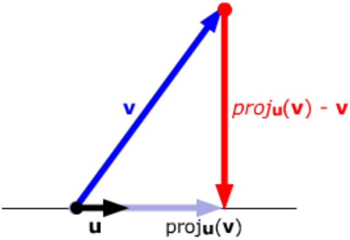
Para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos que
$0 \leq (\vec{x} + t\vec{y}).(\vec{x} + t\vec{y}) = \vec{x}.\vec{x} + 2t\vec{x}.\vec{y} + \vec{y}.\vec{y}$, então o Δ tem que ser negativo :

$$\Delta = 4(\vec{x}.\vec{y})^2 - 4\|\vec{x}\|^2.\|\vec{y}\|^2$$

mas isso implica:

$$|\vec{x}.\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|.$$

Projeção de um vetor



Definição

A projeção do vetor $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é o unico vetor $\vec{w} = proj_{\vec{u}}\vec{v}$ tal que:

1. *existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \lambda\vec{u}$ (i.e $\vec{w}$ e $\vec{u}$ são colineares),*
2. *$\vec{w} - \vec{v}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares.*
   A projeção $proj_{\vec{u}}\vec{v}$ é dada por:

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$$

Projeção de um vetor II

Definição

Seja $\vec{e}$ o vetor unitário na direção de $\vec{u}$ (isto é $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$). Podemos escrever então $proj_{\vec{u}}\vec{v}$ como um multiplo de $\vec{e}$,

$$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \lambda\vec{e} = \frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|\vec{x}\|}\vec{e}.$$

O escalar $\frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|\vec{x}\|}$ é chamado a projeção escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

Exercício

Use a projeção escalar para mostrar que a distância de um ponto $P_1(x_1, y_1)$ à reta $ax + by + c = 0$ é

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

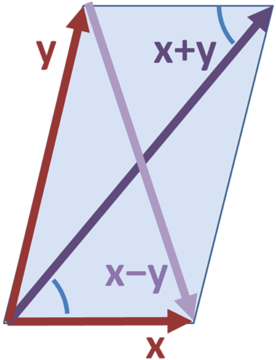
Exercício

Se $\vec{c} = \|\vec{a}\|\vec{b} + \|\vec{b}\|\vec{a}$, *mostre que c é bissetriz do ângulo entre* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$.

Exercício

Mostre a lei do Paralelogramo:

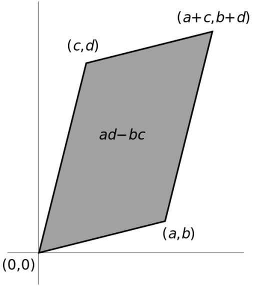
$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$$



Determinante de uma matriz quadrada

Determinante de ordem 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



Interpretação geométrica: O valor absoluto do determinante é a área do paralelogramo formado pelos vetores (a, b) e (c, d).

Exercício

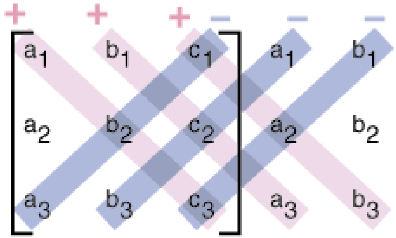
Mostre essa interpretação.

Determinante 3×3: expansão de Laplace

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{d} & e & f \\ \cancel{g} & h & i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cancel{a} & b & \cancel{c} \\ d & \cancel{e} & f \\ g & \cancel{h} & i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & c \\ d & e & \cancel{f} \\ g & h & \cancel{i} \end{bmatrix}$$

Determinante 3×3: regra de Sarrus



$$\det A = (a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3) - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)$$

Determinante 3×3: interpretação geométrica

Sejam r_1, r_2, r_3 as três linhas da matriz 3×3. O valor absoluto do determinante dela é o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$.