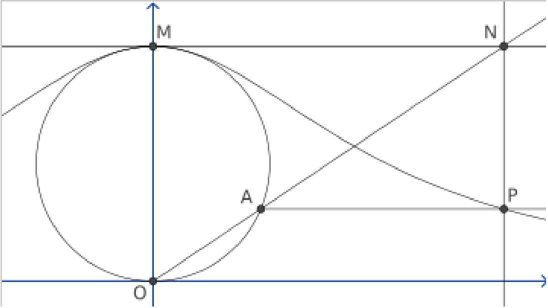
MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Exercício

Determine uma equação paramétrica da curva descrita pelo ponto P.

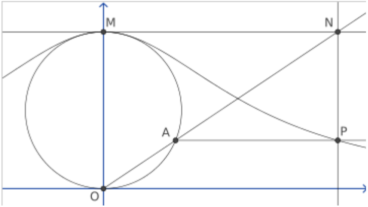


Prova: vamos supor $OM = 2a$.

1. **Cálculo de x como uma função de θ :** aqui θ é o angulo $(\vec{OA}, \vec{OM})$.

$$\frac{x}{2a} = \tan\theta \text{ (utilizar o triangulo } (O, M, N))$$

Exercício 2



1. **Cálculo de y como uma função de θ :**

$$\frac{y}{OA} = \cos\theta \text{ (e também } \frac{OA}{2a} = \cos\theta \implies y = 2a\cos^2\theta$$

2. **Forma cartesiana:** $y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$

$$x^2 = 4a^2\tan^2\theta \implies x^2 + 4a^2 = 4a^2(1+\tan^2\theta) = 4a^2\frac{1}{\cos^2\theta}$$

3. **Então:**

$$x^2 + 4a^2 = \frac{8a^3}{2a\cos^2\theta} = \frac{8a^3}{y}.$$

Propriedade da elipse: que eu não pude resolver ontem...

Exercício

Seja $f = \sqrt{a^2 - b^2}$. *Mostrar que o lugar dos pontos* P *tais que* $PF_1 + PF_2 = 2a$ *é a elipse* $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, *onde* $F_i = (0, \pm f)$.

Prova:

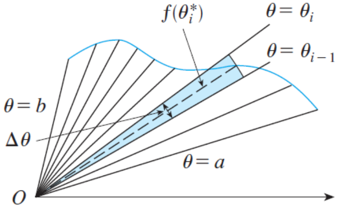
$$\begin{aligned}
2a &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= -\frac{1}{4a}(x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2) \\
&= -\frac{1}{4a}(4xc - 4a^2) \\
&= a - (c/a)x
\end{aligned} \tag{1}$$

Propriedade da elipse II

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= a-(c/a)x \\
x^2-2xc+c^2+y^2 &= a^2-2cx+(c^2/a^2)x^2 \\
x^2\frac{a^2-c^2}{a^2} &= a^2-c^2 \\
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} &= 1 \text{ (finalmente!!)}
\end{aligned} \tag{2}$$

Area de uma região limitada pela curva $r = f(\theta)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\int_a^b r^2 d\theta$$



Para mostrar isso: podemos escrever a área de um setor circular de raio r e abertura $d\theta$, utilizando uma regra de três:

$$\text{Abertura } 2\pi \implies \text{Área } = \pi r^2$$

$$\text{Abertura } d\theta \implies \text{Área } = ??$$

Escrever uma curva com coordenadas polares, calcular áreas

Exercício

Passe a curva dada para coordenadas polares:

1. $x^4 - y^4 = 2xy$
2. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exercício

Calcule a área da região limitada pela curva dada:

1. $r^2 = \cos\theta$
2. $r = \cos 3\theta$

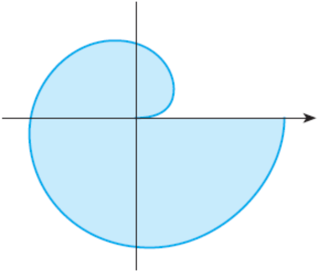
Exercício

Calcule a área do conjunto definido por $\theta^2 \leq r \leq \theta$.

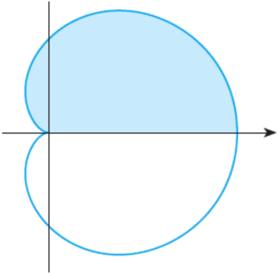
Aplicação: ferramenta para calcular uma área

Exercício

Calcule as áreas:



$r = \sqrt{\theta}$



$r = 1 + \cos\theta$

Exercício

Calcule as áreas entre as duas curvas:

$$r = \sqrt{3}\cos\theta, \quad r = \sin\theta$$

$$r = 1 + \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$$

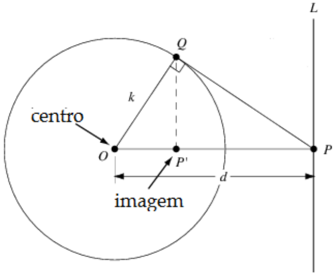
$$r = \sin 2\theta, \quad r = \cos 2\theta$$

$$r = 3 + 2\cos\theta, \quad r = 3 + 2\sin\theta$$

$$r^2 = \sin 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$$

$$r = a\sin\theta, \quad r = b\cos\theta, \quad a > 0, \; b > 0$$

Exercício: a inversão



Definição

A inversão no circulo de raio 1 é uma aplicação f do plano tal que $f : P \mapsto P'$ satisfazendo: $OP.OP' = 1$ e P' é um ponto da semi-reta que $[OP)$.

Exercício

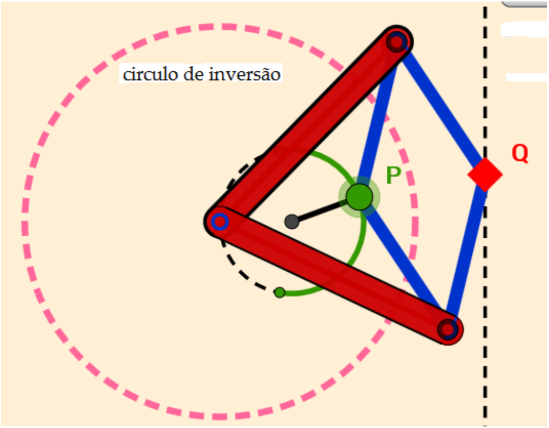
Escrever a formula da inversão com coordenadas polares. Mostre que a imagem de uma reta L (fora da origem) é um circulo passando pela origem.

Exercício: a inversão II

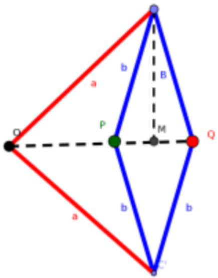
Formula mais geral:$OP.OP' = k^2$, onde k é o raio do circulo de inversão.

Exercício

Mostre que a seguinte maquina realiza uma inversão



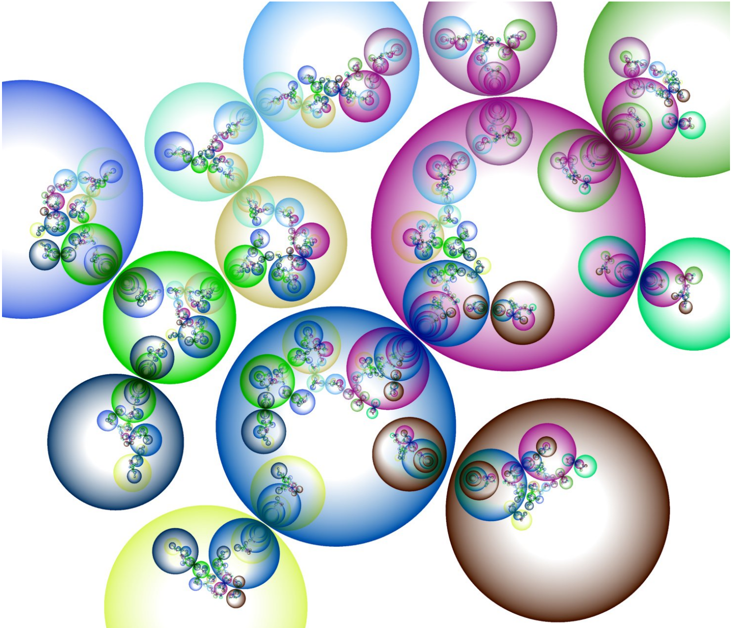
Exercício: a inversão III



Vamos mostrar que essa maquina realiza uma inversão :

$$OP \cdot OQ = (OM - PM)(OM + PM) = OM^2 - PM^2 = OM^2 + DM^2 - DM^2 - PM^2 = a^2 - b^2$$

Grupos de inversões: Grupo de Schottky e conjunto limite



Reconhecer curvas polares, dada a equação

(a) $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$

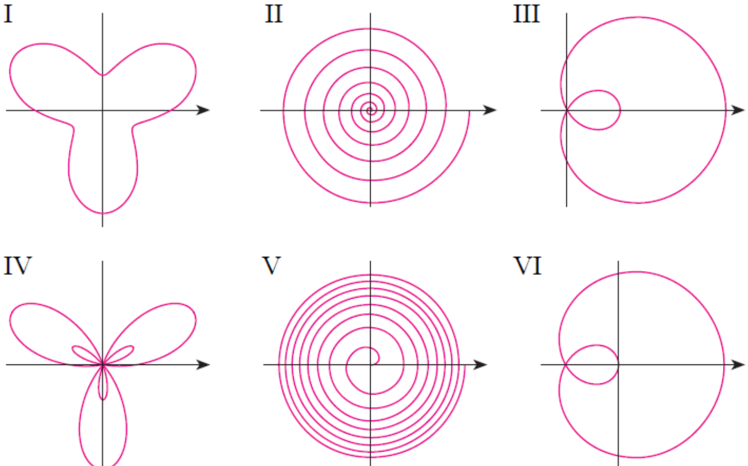
(b) $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$

(c) $r = \cos(\theta/3)$

(d) $r = 1 + 2\cos\theta$

(e) $r = 2 + \sin 3\theta$

(f) $r = 1 + 2\sin 3\theta$



Comprimento de curva dada com uma equação polar

Teorema

O comprimento da curva $r = f(\theta)$ onde $a \leq \theta \leq b$ é:

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Essa formula é uma consequência da formula para curvas parametrizadas:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Exercício

Calcule o comprimento das curvas:

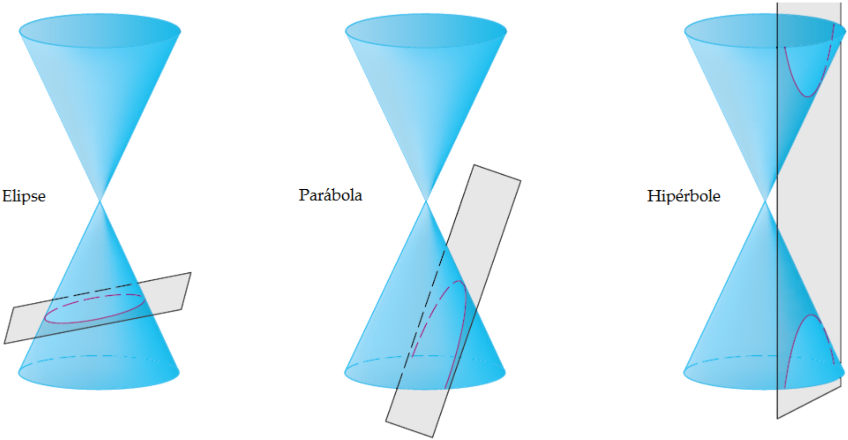
$$r = 2\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

$$r = 5^{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

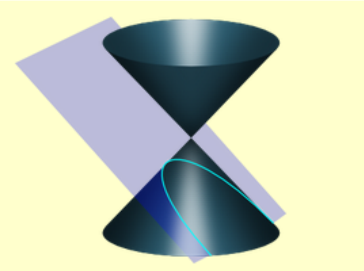
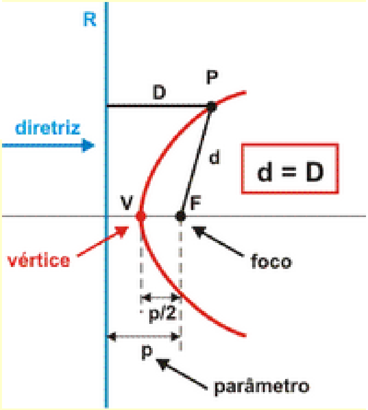
$$r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$r = 2(1 + \cos\theta)$$

Seções cônicas



Seções cônicas: parábola

Equação do cone: $z^2 = x^2 + y^2$ **Equação do plano escolhido:**

$$z = x + 1$$

Intersecção:$(x+1)^2 = x^2 + y^2 \implies y^2 = 2x + 1$ (parábola)