MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo ultima aula:Equações lineares da segunda ordem, com coeficientes constantes:

Equação característica:$ar^2 + br + c = 0$

1. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$: duas raízes reais distintas r_1, r_2

Teorema

Neste caso,as soluções da equação homogênea são do tipo:

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias

2. $\Delta < 0$: duas raízes $\in \mathbb{C}$, $\lambda \pm i\mu$ com $\lambda = -\frac{b}{2a}$ e $\mu = \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Teorema

Neste caso,as soluções da equação homogênea são do tipo:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \mathrm{sen}(\mu t),$$

onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias

Mais detalhes sobre o caso complexo: $e^{i\theta}$

Formula de De Moivre: utilizando a definição $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\text{sen}(\theta)$, temos

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\text{sen}(\theta)$$

Exercício

Calcule $\cos 3\theta$ *como um polinômio em* $\cos \theta$.

Equação da segunda ordem: caso 3, 2 raízes iguais

A equação característica tem uma raiz real dupla, isto é :
$r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2a}$

Teorema

Neste caso,a solução geral da equação homogênea é:

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t.e^{rt},$$

onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias

Exercício

Resolver $y'' - 4y' + 4y = 0$ com $y(0) = 12$ e $y'(0) = -3$.

Exercício

Resolver $y'' + 14y' + 49y = 0$ com $y(-4) = -1$ e $y'(-4) = 5$.

Como mostrar o resultado? escrever uma outra solução como $y_2(t) = v(t).e^{rt}$ e resolver.

Equação da segunda ordem: raíz dupla, método de redução da ordem I

Já sabemos que $y_1(t) = e^{\frac{-b}{2a}t}$ solução. Vamos escrever uma outra solução geral na forma: $y_2(t) = v(t).y_1(t)$. Então:

$$y_2(t) = v(t)e^{-bt/2a}$$

$$y_2'(t) = v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v(t)e^{-bt/2a}$$

$$y_2''(t) = v''(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v'(t)e^{-bt/2a} + \frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{-bt/2a}$$

Equação da segunda ordem: raíz dupla, método de redução da ordem II

$$e^{-bt/2a}\left\{a\left[v''(t)-\frac{b}{a}v'(t)+\frac{b^2}{4a^2}v(t)\right]+b\left[v'(t)-\frac{b}{2a}v(t)\right]+cv(t)\right\}=0$$

$$av''(t)-bv'(t)+\frac{b^2}{4a}v(t)+bv'(t)-\frac{b^2}{2a}v(t)+cv(t)=0$$

$$av''(t)+\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\right)v(t)=0$$

$$av''(t)+\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{2b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}\right)v(t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad av''(t)+\left(\frac{-b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}\right)v(t)=0$$

Mas isso significa que $av''(t)=0 \implies v(t)=Ct+D$ e a solução é

$$y_2(t)=De^{rt}+Cte^{rt}, \text{ onde } r=-\frac{b}{2a}.$$

Equação da segunda ordem, linear , não homogênea

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

Teorema

*Seja $y_p(t)$ **uma** solução de $ay'' + by' + cy = g(t)$. Seja $y_h(t)$ a solução geral da equação homogênea associada $ay'' + by' + cy = 0$. Então a solução geral de $ay'' + by' + cy = g(t)$ é:*

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t).$$

Escrever uma solução particular:

1. $g(t) = ae^{st} \Rightarrow y_p(t) = Ae^{st}$
2. $g(t) = a\cos(bt) \Rightarrow y_p(t) = A\cos(bt) + B\mathrm{sen}(bt)$
3. $g(t)$ polinômio de grau n: tentar y_p do esmo tipo

Exemplos de equações no homogêneas

Exercício

resolver

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

Tentar uma solução particular $Y(t) = Ae^{2t}$.

Exercício

Resolver

$$y'' - 3y' - 4y = 2\mathrm{sen}t,$$

Tentar uma solução particular $Y(t) = A\mathrm{sen}t$ *(mas não vai funcionar...)*

Mais exemplos de equações não homogêneas

Exercício

Resolver

$$y'' - 3y' - 4y = 2\mathrm{sen}t,$$

Tentar uma solução particular $Y(t) = A\mathrm{sen}t + B\cos t$.

$$Y(t) = A\sin t + B\cos t$$

$$\Rightarrow \; Y'(t) = A\cos t - B\sin t,\; Y''(t) = -A\sin t - B\cos t$$

$$(-A\sin t - B\cos t) - 3(A\cos t - B\sin t) - 4(A\sin t + B\cos t) = 2\sin t$$

$$\Leftrightarrow \; (-5A + 3B)\sin t + (-3A - 5B)\cos t = 2\sin t$$

$$\Leftrightarrow \; -5A + 3B = 2,\; -3A - 5B = 0$$

$$\Leftrightarrow \; A = -5/17,\; B = 3/17$$

Então uma solução particular é $Y(t) = -\dfrac{5}{17}\mathrm{sen}t + \dfrac{3}{17}\cos t.$

Caso onde $g(t)$ é um produto

Exercício

Resolver $y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t$

Vamos tentar uma solução particular $Y(t)$ na forma:

$$Y(t) = Ae^t \cos 2t + Be^t \sin 2t$$

$$Y'(t) = Ae^t \cos 2t - 2Ae^t \sin 2t + Be^t \sin 2t + 2Be^t \cos 2t$$

$$= (A + 2B)e^t \cos 2t + (-2A + B)e^t \sin 2t$$

$$Y''(t) = (A + 2B)e^t \cos 2t - 2(A + 2B)e^t \sin 2t + (-2A + B)e^t \sin 2t$$

$$+ 2(-2A + B)e^t \cos 2t$$

$$= (-3A + 4B)e^t \cos 2t + (-4A - 3B)e^t \sin 2t$$

e depois escrever que $aY''(t) + bY'(t) + cY(t) = -8e^t \cos 2t$ necessariamente!

Fim da resolução de $y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t$

Depois de uma pequena simplificação:

$$A = \frac{10}{13},\ B = \frac{2}{13} \quad \Rightarrow \quad Y(t) = \frac{10}{13} e^t \cos 2t + \frac{2}{13} e^t \sin 2t$$

Caso ou $g(t)$ é uma soma complicada

Exercício

Resolver $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\mathrm{sen}(t) - 8e^t \cos 2t$.

A ideia é de escrever uma solução particular para cada termo, e depois fazer a soma:

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin t$$

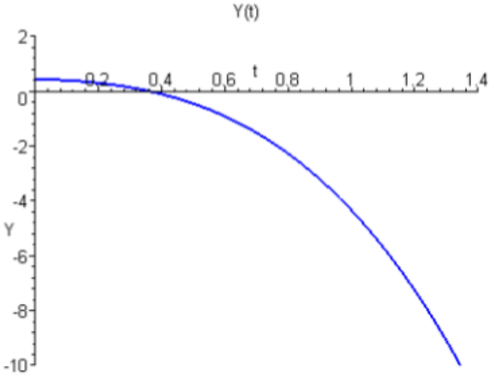
$$y'' - 3y' - 4y = -8e^{t}\cos 2t$$

Então uma solução particular vai ser:

$$Y(t) = (-\frac{1}{2}e^{2t}) + (\frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t) + (\frac{10}{13}e^{t}\cos 2t + \frac{2}{13}e^{t}\sin 2t)$$

Gráfico da solução particular $Y(t)$

$$Y(t) = \left(-\frac{1}{2}e^{2t}\right) + \left(\frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t\right) + \left(\frac{10}{13}e^{t}\cos 2t + \frac{2}{13}e^{t}\sin 2t\right)$$



Um exemplo um pouco mais complicado:Método dos coeficientes indeterminados

Exercício

Resolver $y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$.

Vamos tentar $Y(t) = Ae^{-t} \implies Y'(t) = -Ae^{-t} \implies Y''(t) = Ae^{-t}$.
Depois podemos substituir na equação:

$$(A + 3A - 4A)e^{-t} = 2e^{-t}$$

O problema: e^{-t} já é solução da equação homogênea!
Como fazer: a ideia é de lembrar do caso da raíz dupla e tentar uma solução particular $Y(t)$ do tipo

$$Y(t) = Ate^{-t}$$

$$Y(t) = Ate^{-t}$$

$$Y'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}$$

$$Y''(t) = -Ae^{-t} - Ae^{-t} + Ate^{-t} = Ate^{-t} - 2Ae^{-t}$$

Um exemplo um pouco mais complicado II

Finalmente substituir na equação:

$$Ate^{-t} - 2Ae^{-t} - 3Ae^{-t} + 3Ate^{-t} - 4Ate^{-t} = 2e^{-t}$$

$$0 \cdot Ate^{-t} - 5Ate^{-t} = -5Ate^{-t} = 2e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad A = -2/5$$

$$\Rightarrow \quad Y(t) = -\frac{2}{5}te^{-t}$$

Solução geral:

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{4t} = \frac{2}{5}te^{-t}.$$