MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo ultima aula

1. **Equação logistica:**

$$\frac{dP}{dt} = kP(1 - \frac{P}{k}) \text{ com solução } P = \frac{K}{1 + A.e^{-kt}}$$

onde

$$\frac{K - P_0}{P_0} = Ae^0 = A.$$

2. **Equação linear de primeira ordem, com coeficientes constantes:**

$$\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$$

3. **Resolução:** introduzir o *fator integrante* $I(x) = e^{\int P(x)dx}$, e escrever a solução:

$$y(x) = \frac{1}{I(x)}.(\int I(x)Q(x)dx + C)$$

Equações lineares da segunda ordem, com coeficientes constantes:

1. **Equação geral:**
$$ay'' + by' + cy = g(t)$$
2. **Equação homogênea:**
$$ay'' + by' + cy = 0$$
3. **Equação característica:** $ar^2 + br + c = 0.$

Exercício

Determine as soluções do tipo $y(t) = e^{rt}$ *para*

$$y'' + \lambda y' + k.y = 0$$

Teorema (Principio de superposição)

Sejam $y_1(t), y_2(t)$ *duas solções de uma equ. diferencial* ***linear, homogênea****.* *Então* $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ *também é solução.*

Equação da segunda ordem: caso 1, raízes distintas

A equação característica tem duas raízes distintas, reais: $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

Teorema

Neste caso,as soluções da equação homogênea são do tipo:

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

onde c_1, c_2 *são constantes arbitrárias*

Exercício

Resolver $y'' + 11y' + 24y = 0$ *com* $y(0) = 0$ *e* $y'(0) = -7.$

Exercício

Resolver $4y'' - 5y' = 0$ *com* $y(-2) = 0$ *e* $y'(-2) = 7.$

Equação da segunda ordem: caso 2, raízes complexas

A equação característica tem duas raízes distintas, complexas:
$r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$

Teorema

Neste caso,as soluções da equação homogênea são do tipo:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t}\mathrm{sen}(\mu t),$$

onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias

Exercício

Resolver $y'' - 4y' + 9y = 0$ com $y(0) = 0$ e $y'(0) = -8$.

Exercício

Resolver $y'' - 8y' + 17y = 0$ com $y(0) = -4$ e $y'(0) = -1$.

Mais detalhes sobre: $e^{i\theta}$

Exercício

Mostrar as formulas de adição do $\cos, \operatorname{sen}$ *com essa formula.*

Exercício

Calcule $\cos 3\theta$ *como um polinômio em* $\cos\theta$*.*

Equação da segunda ordem: caso 3, 2 raízes iguais

A equação característica tem uma raiz real dupla, isto é :
$r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2a}$

Teorema

Neste caso,a solução geral da equação homogênea é:

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t.e^{rt},$$

onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias

Exercício

Resolver $y'' - 4y' + 4y = 0$ *com* $y(0) = 12$ *e* $y'(0) = -3$.

Exercício

Resolver $y'' + 14y' + 49y = 0$ *com* $y(-4) = -1$ *e* $y'(-4) = 5$.

Como mostrar o resultado? escrever uma outra solução como $y_2(t) = v(t).e^{rt}$ e resolver.

Equação da segunda ordem: voltando no caso 1

Metodo de variação do parâmetro

Exercício

Dada uma solução $y(t) = e^{r_1 t}$ *mostrar que todas as outras são do tipo:*

$$y_2(t) = e^{r_1 t}(c_1 + c_2 e^{(r_2 - r_1)t}).$$

Equação da segunda ordem, linear , não homogênea

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

Escrever uma solução particular:

1. $g(t) = ae^{st} \Rightarrow y_p(t) = Ae^{st}$
2. $g(t) = a\cos(bt) \Rightarrow y_p(t) = A\cos(bt) + B\text{sen}(bt)$
3. $g(t)$ polinômio de grau n: tentar y_p do esmo tipo

Exercício

resolver

$$y'' - 4y' - 12y = te^{4t}$$

Exercício

resolver

$$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5t} + \text{sen}(2t) + te^{4t}$$