

MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

- ① **Integrais improprias: Tipo 1:**

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2} dx$$

- ② **Integrais improprias: Tipo 2:**

$$\int_0^2 \frac{1}{(2-x)^3} dx$$

Equações diferenciais

Definição

Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função y que aparece na equação também com as derivadas de y .

Exemplos: $y' = 3y + 1$, $y'' = -y$, $y \cdot y' = 2y''$.

O primeiro teorema é muito intuitivo:

Teorema

As soluções da equação $y' = 0$ num intervalo (a, b) são exatamente as funções constantes.

Teorema

As soluções da equação $y' = k \cdot y$ num intervalo (a, b) são exatamente as funções

$$y(t) = C \cdot e^{kt}, \text{ onde } C \text{ é uma constante.}$$

Solução de $y' = ky$

Prova: É fácil de ver que $y(t) = C.e^{kt}$ são soluções. Agora seja $g(t)$ uma solução. Vamos definir uma nova função

$$h(t) = g(t).e^{-kt}$$

Então $h'(t) = g'(t).e^{-kt} + g(t)(-k.e^{-kt}) = kg(t)e^{-kt} - kg(t).e^{-kt} = 0$.
Isso implica que $h(t) = \text{Constante} = C$, e depois que $g(t) = C.e^{kt}$.

Exercício

Resolver a equação $y' = ky + b$

Exemplos:

$$y'(x) = k.y(x)$$

As soluções são exatamente as funções $Y(x) = C.e^{kx}$, onde $C = y(0)$ pode ser qualquer constante.

Que significa "resolver uma equação diferencial"?

Exercício

Mostrar que cada função do tipo $y = \frac{C}{x} + 2$ é solução da equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}(2 - y) \text{ no intervalo } (0, \infty).$$

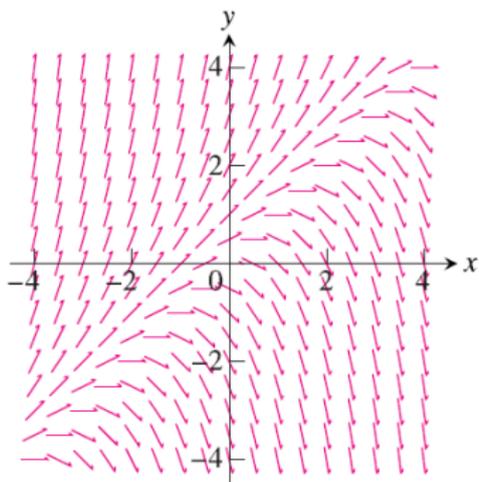
Exercício

Mostrar que a função $y = (x + 1) - \frac{1}{3}e^x$ é solução do problema de valor inicial

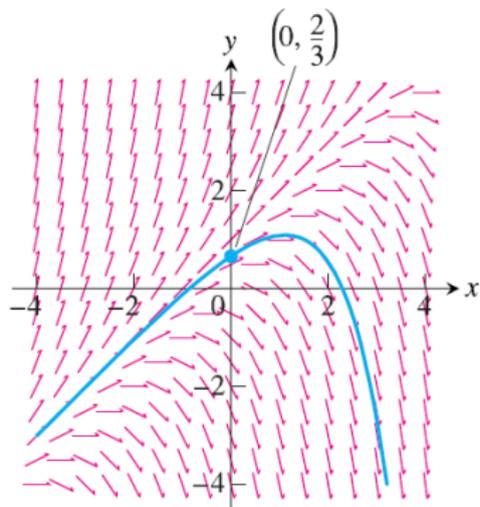
$$\frac{dy}{dx} = y - x, \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

Equações diferenciais: visualização das soluções

Campo de direções: dada a equação $y' = f(x, y)$, no plano (x, y) , passando por cada ponto (x, y) podemos desenhar um pequeno segmento de inclinação $m = f(x, y)$



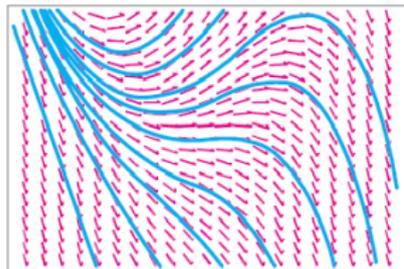
(a)



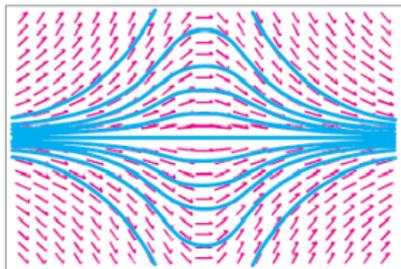
(b)

Exemplos de campos de direções e soluções:

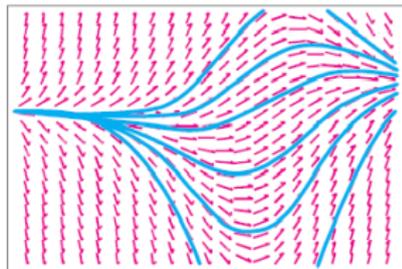
(a) $y' = y - x^2$



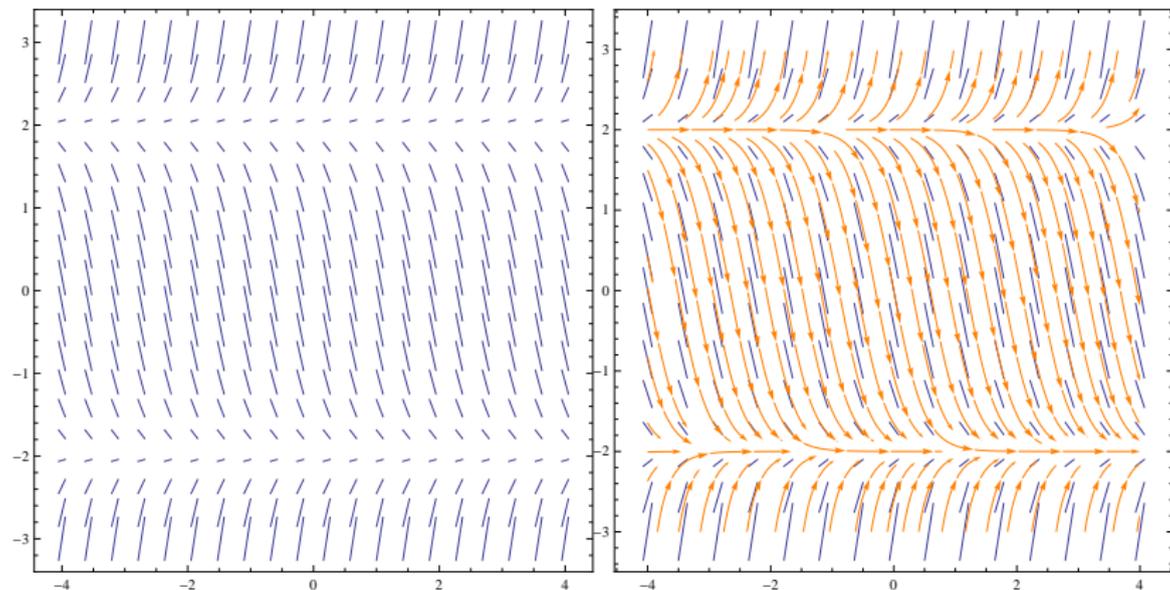
(b) $y' = -\frac{2xy}{1+x^2}$



(c) $y' = (1-x)y + \frac{x}{2}$



Exemplos de campos de direções e soluções: $y' = (y + 2)(y - 2)$



Equações diferenciais de primeira ordem de variáveis separáveis

Definição (Equações diferenciais de primeira ordem de variáveis separáveis)

São do tipo:

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$$

Soluções constantes:

Exercício

Determine, caso existam, as soluções constantes: $x'(t) = x^2 - x$ e $x'(t) = t(1 + x^2)$.

Soluções não constantes: A ideia é de "separar as variáveis" e integrar:

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t)dt \Rightarrow \int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)dt \Rightarrow H(x) = G(t) + C$$

Lei de crescimento natural: A população cresce a uma taxa proporcional ao tamanho da população P :

$$\frac{dP}{dt} = k.P$$

Solução: $P(t) = A.e^{kt}$, onde A é uma constante arbitrária.

Utilizando integrais:

$$\frac{dP}{P} = k.dt$$

então:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k.dt$$

$$\ln |P| = kt + C$$

$$|P| = e^C . e^{kt}$$

$$P = A.e^{kt},$$

onde $A = \pm e^C$.

Teorema

A solução do problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = k.P, \quad P(0) = P_0$$

é:

$$P(t) = P_0.e^{kt}$$

Lei de crescimento natural, com emigração:

$$P' = kP - m$$

Como resolver essa nova equação?

População e equação logística:

Novo modelo: quando a pop. é muito grande ($\geq K$), a taxa de crescimento é negativa. Mas para P pequena, a taxa é quase $= k.P$

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Como resolver essa equação?

$$\int \frac{K}{P.(K - P)} dP = \int k.dt$$

Agora podemos observar que:

$$\frac{K}{P.(K - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}$$

então:

$$\ln |P| - \ln |K - P| = kt + C \Rightarrow \frac{K - P}{P} = A.e^{-kt}$$

e finalmente:

$$P = \frac{K}{1 + A.e^{-kt}}$$

População e equação logística:

Interpretação da constante A: na equação

$$P = \frac{K}{1 + A.e^{-kt}}$$

podemos fazer $t = 0$. Então $P = P_0$ (a população inicial), e

$$\frac{K - P_0}{P_0} = Ae^0 = A.$$

Exercício

Escreva a solução para o problema de valor inicial:

$$P' = 0,08P(1 - P/1000), \text{ com } P(0) = 100.$$

Use-a para encontrar os tamanhos da pop. $P(40)$, $P(80)$. Quando $P(t) = 900$?

Resp. temos $P(t) = \frac{1000}{1 + A.e^{-0,008t}}$ onde $A = \frac{1000 - 100}{100} = 9$.

Então $P(40) = \frac{1000}{1+9e^{-3,2}} \simeq 731,6$ e $P(80) = \frac{1000}{1+9e^{-6,4}} \simeq 985,3$.

Agora $P(t) = 900$ vai acontecer quando $\frac{1000}{1+9e^{-0,08t}} = 900 \Rightarrow t = 54,9$.

Uma equ. diferencial linear de primeira ordem é uma equação que pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x).y = Q(x)$$

Exemplo: $x.y' + y = 2x$ para $x \neq 0$. Mas não é separável. Agora podemos escrever:

$$xy' + y = (xy)'$$

então a equ. é: $(x.y)' = 2x \Rightarrow xy = x^2 + C$ ou $y = x + C/x$. A função x é chamada um fator integrante para a equação $y' + \frac{1}{x}y = 2$.

Fator integrante

Teorema

Para resolver a equação diferencial linear $y' + P(x).y = Q(x)$, multiplique os dois lados pelo fator integrante $I(x) = e^{\int P(x)dx}$ e integre os dois lados.

A ideia é: $I(x).(y' + P(x).y) = (I(x).y)'$.

Exercício

Mostrar que neste caso $y(x) = \frac{1}{I(x)}.(\int I(x)Q(x)dx + C)$

Exercício

Resolva $y' + 3x^2.y = 6x^2$

Exercício

Encontre a solução para o problema de valor inicial $x^2.y' + xy = 1$ com $x > 0$ e $Y(1) = 2$

Mais exemplos

Exercício

Resolva

- 1 $y' + 2y = 2.e^x.$
- 2 $xy' - 2y = x^2.$
- 3 $x^2y' + 2xy = \cos^2 x.$

Exercício

Encontre a solução para o problema de valor inicial

- 1 $y' + y = x + e^x, y(0) = 0.$
- 2 $t.y'(t) + 2y = t^3$ com $t > 0$ e $y(1) = 0.$
- 3 $2xy' + y = 6x.$ com $x > 0$ e $y(4) = 20.$

Mudança de variável

Exercício

Na equ. $y'(x) + P(x).y = Q(x).y^n$, fazer $u = y^{1-n}$ e transformar a equ. na equ. linear

$$u'(x) + (1 - n)P(x).u = (1 - n).Q(x)$$

Exercício

Resolver

- 1 $xy' + y = -x.y^2$
- 2 $y' + (2/x)y = (y^3)/x^2$

Exercício

Fazer $u = y'$ para resolver a equação de segunda ordem $x.y'' + 2y' = 12x^2$.