MAT 0143 : Cálculo para Ciências Biológicas

Aula 9/ Segunda 31/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 8

1. Informações gerais:
   - **Site:** o link do MAT 0143 na pagina seguinte `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
   - **Monitoria:** quarta-feira, 14:00 as 16:00, na sala "Lilás" do predio dos "Queijinhos".
   - **Monitoria dia 02/04/2014:** eu vou dar essa monitoria, das 15:00 as 16:00.
   - **Novo no site:**Lista 3, com respostas + Lista de tópicos para Prova 1.

---

2. **Limites e funções trigonometricas:**

Exercício (Exemplo)

Encontrar $\lim_{t\to 0} \frac{\text{sen}(5t)}{\text{sen}(6t)}$

3. **Limites no infinito:** leis do limite
4. **Polinômios no infinitio e frações racionais**

Mais coisas administrativas

Semana santa: `https://uspdigital.usp.br/jupiterweb/jupCalendario2014_final.jsp`

Abril	
14 a 19	Semana Santa. Não haverá aula.
21	Tiradentes. Não haverá aula.
30	Data máxima para que as Unidades encaminhem à Pró-Reitoria de Graduação, as alterações das estruturas curriculares para **2015**.

Prova 1: Lembra que : A prova P1 é no dia Quarta 09/04, horario habitual, sala habitual (isto é: 16:00 até 18:00, Bloco 16- Sala de Aula)

Lista de tópicos para Prova 1

1. **Funções:** transformações de gráficos (por exemplo: translações, ...)
2. **Funções quadraticas, completamento de quadrado**.
3. **Desigualdades, valor absoluto**: não vai ter exercícios com desigualdades, mas a gente precisa da definição de $|x|$.
4. **Funções exponenciais e potênciais:** propriedades basicas.
5. **Limites:** definição rigorosa de $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e de $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
6. **Limites:** leis do limite, formas indeterminadas.
7. **Exemplos de limites:** funções continuas, polinômios, frações racionais
8. **Limites e funções compostas**
9. **Limites no ∞:** polinômios, frações racionais, funções com raizes, etc ...
10. **Limites e funções trigonometricas** do tipo $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.
11. **Assíntotas**
12. **Exemplos de limites do tipo $\infty - \infty$:** exemplo $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+bx} - \sqrt{x^2+ax}$
13. **Derivadas:** definição de $f'(a)$, determinação da equação da reta tangente

Leis do limite: caso $\lim_{x\to\infty} = L \in \mathbb{R}$

1. **Leis do limite:** se $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1$ e $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_2$, então:

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1 + L_2 \text{ e também } f(x).g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1.L_2$$

2. **Lei do quociente:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{L_1}{L_2} \text{ se } L_2 \neq 0.$$

Exercício

Calcule $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-7}{5x^2+x}$

Exercício

Calcule $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-7}{x^2+5x} + \frac{8x+\operatorname{sen}(4x)}{9x+\sqrt{x^2+1}}$

Exercício

Calcule $\lim_{x\to-\infty} \frac{4-3x^3}{\sqrt{x^6+9}}$

Limites infinitos: do tipo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Exemplos: polinômios e frações racionais.

Exercício

Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3+7x}{5x^2+7x-3}$

Outros exemplos:

Exercício

Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^{2/3}+7}{\sqrt[3]{x}-3}$

Limites úteis deste tipo:

1. $\lim_{x\to+\infty} x^r = +\infty$ com $r > 0$
2. $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ com $a > 1$

Idéia: utilizar esses limites e combinar com as leis dos limites.

Leis do limite no caso infinito: somas e produtos

Somas:

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
3. $L + (+\infty) = +\infty$, se $L \in \mathbb{R}$
4. $L + (-\infty) = -\infty$, se $L \in \mathbb{R}$

Produtos:

1. $(+\infty).(+\infty) = +\infty$
2. $(-\infty).(-\infty) = +\infty$
3. $(-\infty).(+\infty) = -\infty$
4. $L.(+\infty) = +\infty$, se $L > 0$
5. $L.(+\infty) = -\infty$, se $L < 0$
6. $L.(-\infty) = -\infty$, se $L > 0$
7. $L.(-\infty) = +\infty$, se $L < 0$

Indeterminações: nos casos seguintes, a gente tem que trabalhar mais:

$$+\infty - (+\infty), -\infty - (-\infty), 0.\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}.$$

Formas indeterminadas: que fazer?

Lembra: forma indeterminada não significa que não podemos calcular o limite!

Exemplos do tipo $\infty - \infty$: somente (3) e (4)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}\right)$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+25}-\sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+3x-2}\right)$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-x}-3x\right)$$

Exemplos do tipo $\frac{0}{0}$:

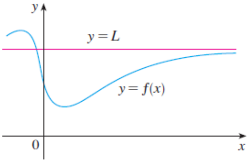
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{3x}, \text{ ou por exemplo } \lim_{x\to\infty}\frac{(1/x)+(3/x^2)}{(5/x)+(\operatorname{sen} x/x^3)}$$

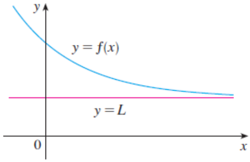
Assíntota horizontal:

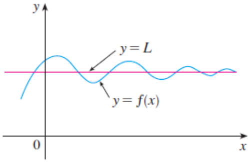
Definição

A reta horizontal $y = L$ é chamada assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se ou

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$







Assíntotas verticais

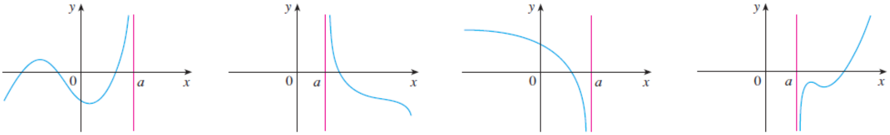
Assíntota vertical:

Definição

A reta vertical $x = a$ é chamada assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Exemplos de assintotas

Exercício

Encontre as assíntotas horizontais de cada curva.

$$y = \frac{2x + 1}{x - 2} \qquad y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \qquad y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$$

$$y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5} \qquad y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$$

Como trabalhar com limites infinitos: quocientes

Teorema

Suponha que $\lim_{x \to p^+} = 0$ *e que existe* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para* $p < x < p + r$. *Então:*

$$\lim_{x \to p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Exemplo (importante): Para qualquer numero real $r > 0$ temos:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$$

Exercício

$\lim_{x \to 2^-} \frac{-4}{x+2}$

Exercício

$\lim_{x \to 4^-} \frac{3}{(4-x)^3}$ *e* $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{(x-3)}$

Exemplos de assintotas verticais

Exercício

Agora, encontre as assíntotas verticais de cada curva.

$$y = \frac{2x + 1}{x - 2}$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$$

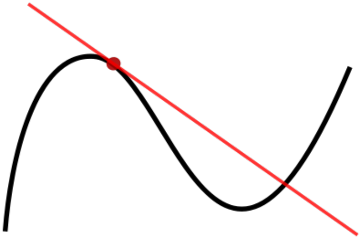
$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$$

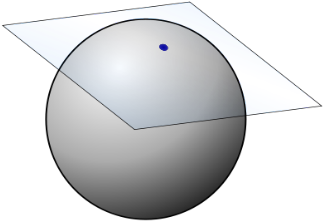
$$y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$$

$$y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$$

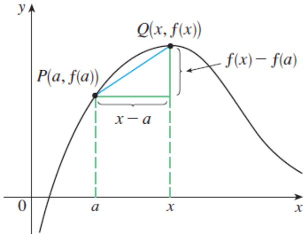
$$y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$$

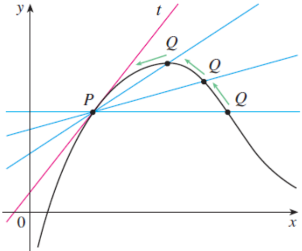
Ideia: "tangente", do latim *tangere* = tocar.





Posição limite de uma reta passando pelo ponto P:





Reta tangente a uma curva

Definição

A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ *em um ponto* $P(a, f(a))$ *é a reta passando pelo ponto* P *e com inclinação*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que esse limite exista.

Exemplo:

Exercício

tangente na curva $y = x^3$ *no ponto* $(1, 1)$.

Exemplo onde a tangente não existe:

Exercício

Estudar as tangentes para a curva $y = |x|$, *em qualquer ponto* P *da curva.*

Derivada

Definição

A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$ ("f linha de a") é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existe.

Definição equivalente: podemos fazer $x = a + h$, então $h = x - a$ e $h \to 0$ implica $x \to a$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exercício

a)Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = (x-1)/(x-2)$ no ponto $(3,2)$.b)Se $G(x) = x/(1+2x)$, encontre $G'(a)$

Interpretações da derivada

Velocidade: A variavel t é o tempo, e $t \mapsto f(t)$ é a função posição de um objeto. Entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição é de $f(a+h) - f(a)$, e

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Conseqüência: a derivada $f'(a)$ pode ser interpretada como uma velocidade instantânea (isto é , como um limite de velocidades médias).

Exemplo: queda livre, sem velocidade initial: Posição vertical: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$, e velocidade $v = -gt$, onde g é aceleração causada pela gravidade ($g \simeq 9,81 m/s^2$).

Notação: $f'(a)$ (notação de Lagrange), $\frac{df}{dx}(a)$ (de Leibniz), $\dot{f}(a)$ (de Newton)

Newton apoś a morte de Leibniz declarou: "me sinto muito feliz por ter desfeito o coração de Leibniz".

Taxa de variação instantânea: Para uma função $y = f(x)$, no intervalo $[x_1, x_2]$, a variação em x é $\Delta x = x_2 - x_1$, a variação correspondante em y é $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Finalmente:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a)$$

Economia: seja C o custo total de um produto, e Q a quantidade produzida. Então o **custo marginal Cmg** é:

$$Cmg = \frac{dC}{dQ}.$$

A ideia é que quando $\Delta x = 1$, mas Q muito grande (i.e muito maior que 1) temos que $C'(n) \simeq C(n+1) - C(n)$, isto é, o custo marginal de produção é mais o menos igual ao custo de produção de mais uma unidade.

Concentração: é a razão da quantidade de matéria do soluto (mol) pelo volume de solução (em litros)

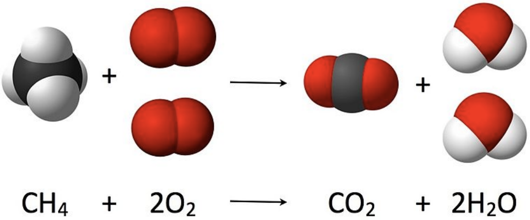
$$M = \frac{n}{V},$$

onde o mol é a unidade do Sistema SI de unidades. Isto é um mol é ”a quantidade de matéria de um sistema que contém tantas elementos quanto são os átomos contidos em $0,012$ quilograma de carbono-12”. Por exemplo, 1 mol de moléculas de um gás tem mais o menos $6,022 \times 10^2 3$ moléculas deste gás (”constante de Avogadro”). Outro exemplo: Uma colher de chá tem mais o menos $0,3$ mol de água. **Notação:** concentração do reagente A é denotada com colchete, por $[A]$.

Equação química: uma representação de uma reação química

$$(Reagentes) \rightarrow (Produtos)$$

Por causa da Lei de conservação da massa, tem que equilibrar (i.e colocar coeficientes)



Metano + oxigénio $\rightarrow$ dióxido de carbono + agua + muito calor

Reações

Concentrações:dado $A + B \to C$, $[A], [B], [C]$ são funções do tempo t. A taxa média da reação do produto C no intervalo $[t_1, t_2]$ é $\frac{\Delta[C]}{\Delta t}$.
Taxa de reação instantânea:

$$\text{taxa de reação } = \frac{d[C]}{dt}$$

Caso mais geral: (condições: V constante) dada:

$$aA + bB \to pP + qQ$$

a **taxa de reação é:**

$$v = -\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{p}\frac{d[P]}{dt} = \frac{1}{q}\frac{d[Q]}{dt}$$

Cinética química: a determinação experimental da taxa de reação r vai dar

$$r = k[A]^m[B]^n$$

(k constante de taxa de reação, mas pode depender por exemplo de T).

Exemplo:$aA \to Produtos$ no caso de uma reação de ordem 1 (i.e: $-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = k[A]$).

Exercício

Resolver (podemos supor: $\frac{de^t}{dt} = e^t$ *e* $f(t) = 0$ *para todos* t *implica* f *constante). (Resposta:* $[A] = [A]_0.e^{-akt}$*)*

Derivadas como funções

Definição

Uma função f é diferenciável em a se $f'(a)$ existir. É diferenciável em um intervalo aberto (a, b) se for diferenciável em cada número do intervalo.

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^3$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Exercício

Mostrar que $f(x) = x^n$ (onde $n \in \mathbb{N}$) é diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Exercício

Mostrar que $g(x) = \sqrt{x}$ é diferenciável em $(0, \infty)$ e tal que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercicios com derivadas

Exercício

Encontre a derivada da função usando a definição. Estabeleça os domínios da função e da derivada.

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

$f(x) = mx + b$

$f(t) = 5t - 9t^2$

$f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

$f(x) = x^2 - 2x^3$

$g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

$g(x) = \sqrt{9 - x}$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

$G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

$f(x) = x^{3/2}$

$f(x) = x^4$