

MAT 0143 : Cálculo para Ciências Biológicas

Aula 7/ Segunda 24/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

1 Informações gerais:

- **Email:** sylvain@ime.usp.br
- **Site:** o link do MAT 0143 na pagina seguinte
<http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html>
- **Monitoria:** quarta-feira, 14:00 as 16:00, na sala "Lilás" do predio dos "Queijinhos".

2 Limites e desigualdades: teorema do confronto

3 Limites e funções compostas: "mudança de variável"

Exercício (Exemplo)

Encontrar $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+t} - \sqrt{2}}{t}$

Exercício (Exemplo)

Encontrar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(x+27)^{1/3} - 3}$

Limites e funções trigonométricas

Teorema

As funções sen e cos são contínuas.

Teorema

Dois limites úteis:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \text{ e também } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Exercício

Calcule:

- 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
- 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$
- 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.
- 4 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x - 1}$

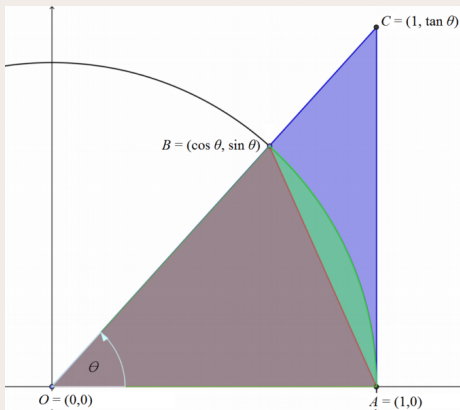
Funções trigonométricas e desigualdades

Teorema

Para $0 < x < \pi/2$:

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Demonstração



1 Limites no infinito:

Definição

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ significa: "eu posso fazer $f(x)$ arbitrariamente perto de L , tomando x suficientemente grande."

Exemplos: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2 **Leis do limite:** se $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L_1$ e $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L_2$, então:

$$f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L_1 + L_2 \text{ e também } f(x).g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L_1.L_2$$

3 **Lei do quociente:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{L_1}{L_2} \text{ se } L_2 \neq 0.$$

Praticar com limites no infinito

Exercício

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2}{2x + 1}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{x^2 + 1}$$

$$19. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + x} - 3x)$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx})$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + x^5)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^2}{x^3 - x + 1}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 6x^2 - 2}{2x^3 - 4x + 5}$$

$$20. \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2x})$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} + 2 \cos 3x)$$

$$32. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}$$

Límites infinitos

Definição (Límites do tipo $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$)

Suponhamos que exista a tal que $]a, \infty) \subset \text{Dom}(f)$. Definimos:

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ significa:

para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ com $\delta > a$ tal que $x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ significa:

para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ com $\delta > a$ tal que $x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

Definição

Sejam $p \in \mathbb{R}$ e suponhamos que exista b tal que $]p, b[\subset \text{Dom}(f)$, então:

$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = +\infty$ significa:

para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ com $p + \delta < b$ tal que $p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.

Limits no ∞ de polinomiais e frações racionais

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x^3 + 7x - 15.$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^4 + 7x - 15.$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 7x - 15}{2x^2 + 8x + 1}.$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 7x - 15}{2x^4 + 8x + 1}.$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 7x - 15}{x^5 + 3x^2 - 1}.$$

Mais limites no infinito de frações racionais

$$13. f(x) = \frac{2x + 3}{5x + 7}$$

$$14. f(x) = \frac{2x^3 + 7}{x^3 - x^2 + x + 7}$$

$$15. f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 3}$$

$$16. f(x) = \frac{3x + 7}{x^2 - 2}$$

$$17. h(x) = \frac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$$

$$18. g(x) = \frac{1}{x^3 - 4x + 1}$$

$$19. g(x) = \frac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$$

$$20. h(x) = \frac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$$

$$21. h(x) = \frac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$$

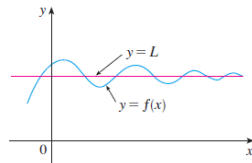
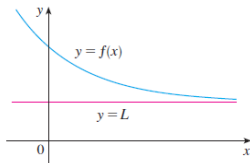
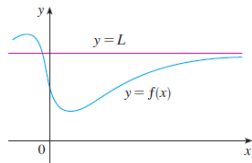
$$22. h(x) = \frac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$$

Assíntota horizontal:

Definição

A reta horizontal $y = L$ é chamada assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se ou

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$



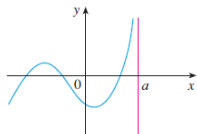
Assíntota vertical:

Definição

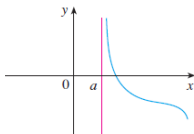
A reta vertical $x = a$ é chamada assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

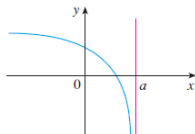
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



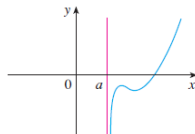
(a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$



(b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$



(c) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$



(d) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

Exercício

Encontre as assíntotas horizontal e vertical de cada curva.

$$y = \frac{2x + 1}{x - 2}$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$$

$$y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$$

$$y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$$

$$y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$$

Variação: limites de frações com expoentes racionais

Exercício

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{8x^2 - 3}{2x^2 + x}}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1 - x^3}{x^2 + 7x} \right)^5$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$35. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 3}{\sqrt{4x^2 + 25}}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{8x^2 - 3} \right)^{1/3}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 - 5x}{x^3 + x - 2}}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$$

$$34. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 3x^3}{\sqrt{x^6 + 9}}$$

Somas:

- 1 $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- 2 $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- 3 $L + (+\infty) = +\infty$, se $L \in \mathbb{R}$
- 4 $L + (-\infty) = -\infty$, se $L \in \mathbb{R}$

Produtos:

- 1 $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
- 2 $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- 3 $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
- 4 $L \cdot (+\infty) = +\infty$, se $L > 0$
- 5 $L \cdot (+\infty) = -\infty$, se $L < 0$
- 6 $L \cdot (-\infty) = -\infty$, se $L > 0$
- 7 $L \cdot (-\infty) = +\infty$, se $L < 0$

Indeterminações:

$$+\infty - (+\infty), -\infty - (-\infty), 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

Exemplos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2-1})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3} + x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2+3x-2})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2-x} - 3x)$$

Como trabalhar com limites infinitos: quocientes

Teorema

Suponha que $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = 0$ e que existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $p < x < p + r$. Então:

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Exemplo (importante): Para qualquer número racional $r = \frac{p}{q} > 0$ temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-4}{x+2}$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3}{(4-x)^3} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{(x-3)}$$