MAT 0143 : Cálculo para Ciências Biológicas

Aula 5/ Segunda 17/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 4

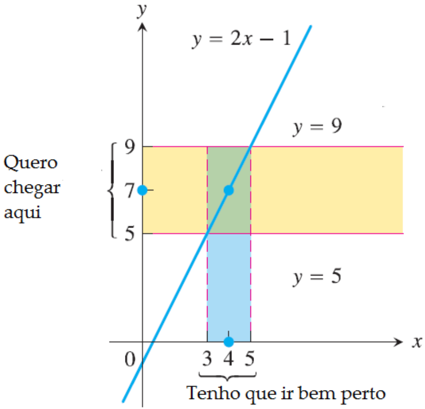
1. Informações gerais:
   - **Email:** sylvain@ime.usp.br
   - **Site:** o link do MAT 0143 na pagina seguinte `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`

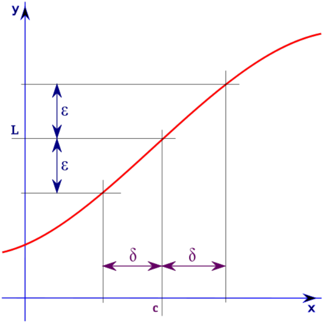
---

2. **Funções exponenciais**
3. **Limite:** que significa $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.
4. **Limite II:** que significa $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Limites: que significa $\lim_{x\to a} f(x) = L$?

Como ler: "o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é igual a L. Ou, também $f(x)$ tende a L quando x tende a a.
Outra notação: $f(x) \to L$ quando $x \to a$.
Def. intuitiva 1: "eu posso fazer $f(x)$ arbitrariamente próximo de L, tomando x suficientemente próximo de a.

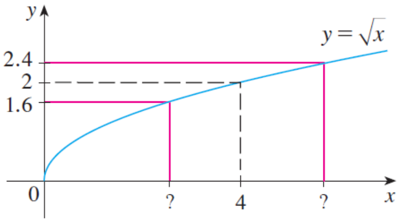




Exemplos

Exercício

Escrever um δ tal que $|x-4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 2| < 0,4$



Leis do limite

Teorema

Seja c uma constante e suponha que existam os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ *e* $\lim_{x \to a} g(x)$*, então:*

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x) g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{if } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Conseqüências das leis do limite e Continuidade

1. **Continuidade:**

Definição (Continuidade de uma função f num ponto $p \in Dom(f)$)

Suponhamos f definida em p. Então:

$$f \text{ continua em } p \Leftrightarrow \lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Definição (Continuidade de uma função f num intervalo (a, b))

Suponhamos f definida em (a, b). Então:

$$f \text{ continua no intervalo } (a, b) \Leftrightarrow f \text{ é continua em cada } x \in (a, b).$$

2. **Continuidade dos polinômios e das funções racionais:**

Teorema

Toda função polinomial é continua. Toda função racional f é continua no seu domínio.

Leis da Continuidade

Teorema

Se f e g forem contínuas em a e se c for uma constante, então as seguintes funções são contínuas, também em a:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $c.f$
4. fg
5. $\frac{f}{g}$ *se* $g(a) \neq 0.$

Exemplos

Exercício

Calcule o limite se existir (somente 3,4,8):

3. $\lim_{x \to 3} (5x^3 - 3x^2 + x - 6)$

4. $\lim_{x \to -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t \to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x \to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t \to 2} \left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5} \right)^2$

9. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

Exemplos

Exercício

Calcule o limite se existir(somente 11,13,17,18,19,21,22):

11. $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$

12. $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

13. $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

14. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\displaystyle\lim_{t \to -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\displaystyle\lim_{t \to 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\displaystyle\lim_{u \to 2} \frac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

Exercício

Calcule o limite se existir:

23. $\displaystyle\lim_{x\to-4}\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

25. $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$

26. $\displaystyle\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right)$

27. $\displaystyle\lim_{x\to16}\frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

28. $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

29. $\displaystyle\lim_{t\to0}\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)$

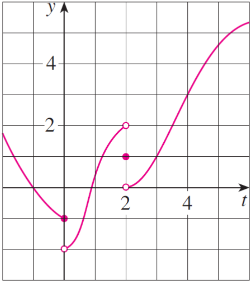
30. $\displaystyle\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

31. $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

32. $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$

Limites laterais: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

Lido como: "o limite esquerdo de $f(x)$ quando x tende a a. Também: o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda.



Exercício

Escrever a definição do limite esquerdo e direito.

Observação

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ *se e somente se* $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

Limites laterais: exemplos

Exercício

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ *onde* $f(x) = x^2$ *se* $x \leq 1$, *e* $= 2x - 1$ *se* $x > 1$.

Exercício

$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$.

Exercício

A afirmação seguinte é verdadeira ou falsa?
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow f$ *continua.*

Limites e desigualdades

Teorema

Se $f(x) \leq g(x)$ quando x está proximo de a (exceto possivelmente em a), e os limites de f e g existem quando x tende a a, então

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Desigualdade estrita: cuidado, podemos ter $f(x) < g(x)$ mas $L_1 = L_2$!

Teorema (do Confronto, ou Teorema do Sanduíche)

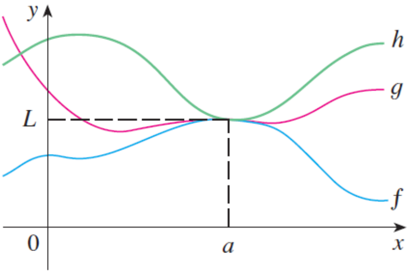
Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está proximo de a (exceto possivelmente em a), e

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} h(x) = L$$

enão:

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Limites e desigualdades II:

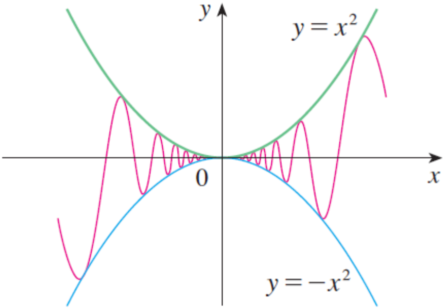


Exercício

Mostrar $\lim_{x \to 0} x^2 . \cos^{17}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Exercício

Mostrar $\lim_{x \to 0} x^2 . g(x) = 0$, *onde* $g(x)$ *é qualquer função limitada.*



Exercício

Mostrar $\lim_{x \to 0} x^2 . \cos(\frac{1}{x}) = 0$.

Exercício

1. $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ *não existe.*
2. *Mostrar* $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$.

Limites e funções compostas

Teorema

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset Dom(g)$. Se $\lim_{x\to p} f(x) = a$ e g contínua em a, então:

$$\lim_{x\to p} g(f(x)) = \lim_{u\to a} g(u).$$

Teorema (Caso mais utilizado)

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset Dom(g)$. Se f for contínua em p e g contínua em $f(p)$, então a composta $h(x) = g(f(x))$ será contínua em p

Exercício

Calcule

1. $\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}}$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$ *(pode rationalizar ou fazer uma "mudança de variavel")*

Limites e funções compostas: "mudança de variavel"

Situação: suponhamos g contínua em a, e

$$\boxed{g(u) \xrightarrow[u \to a]{} g(a) \text{ e também } f(x) \xrightarrow[x \to p]{} a}$$

então

$$\boxed{F(x) = g(f(x)) \xrightarrow[x \to p]{} g(a)}$$

Exercício

Seja f definida em $\mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. *Calcule*

1. $\lim_{x\to 0} \frac{f(3x)}{x}$.
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.
3. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-1}$

Limites e funções trigonométricas

Teorema

As funções sen *e* cos *são contínuas.*

Teorema

Dois limites utéis:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \textit{ e também } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Exercício

Calcule:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$.
4. $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x-1}$

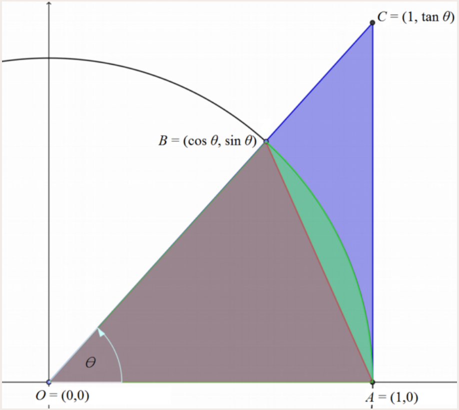
Funções trigonométricas e desigualdades

Teorema

Para $0 < x < \pi/2$*:*

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Demonstração



1. **Limites no infinito:**

Definição

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *significa: "eu posso fazer $f(x)$ arbitrariamente perto de L, tomando x suficientemente grande."*

Exemplos: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. **Leis do limite:** se $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1$ e $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_2$, então:

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1 + L_2 \text{ e também } f(x).g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1.L_2$$

3. **Lei do quociente:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{L_1}{L_2} \text{ se } L_2 \neq 0.$$

Praticar com limites no infinito

Exercício

15. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 2}{2x + 1}$

16. $\lim_{x \to \infty} \frac{1 - x^2}{x^3 - x + 1}$

17. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x - 2}{x^2 + 1}$

18. $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^3 + 6x^2 - 2}{2x^3 - 4x + 5}$

19. $\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

20. $\lim_{t \to \infty} \frac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21. $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$

22. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$

23. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 1}$

29. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

30. $\lim_{x \to \infty} (e^{-x} + 2 \cos 3x)$

31. $\lim_{x \to -\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\lim_{x \to -\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}$