MAT 0143 : Cálculo para Ciências Biológicas

Aula 3/ Segunda 10/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 2

1. Informações gerais:
   - **Email:** sylvain@ime.usp.br
   - **Site:** o link do MAT 0143 na pagina seguinte
     `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`

---

2. **Desigualdades:** descrever por exemplo

$$\{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 3x + 5y \leq 0\}$$

3. **Retas:** equação delas, inclinação.
4. **Funções quadraticas:** soluções, soma e produto de raizes, "completamento de quadrados",
5. **Aplicações:** resolver

$$u - 2\sqrt{u} = 3$$

Equação quadrática

.

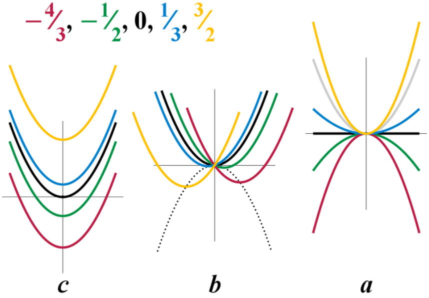
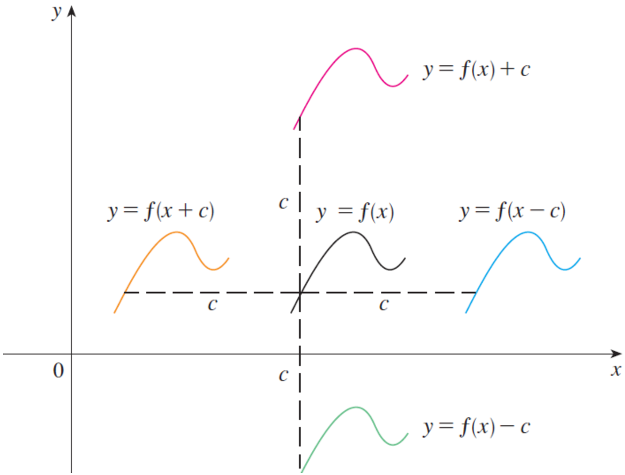


Figura : Gráficos de $y = ax^2 + bx + c$ com variações de a, b, c

Exercício

Determinar o valor de x tal que $3x^2 + 2x + 3$ *é minimo.*

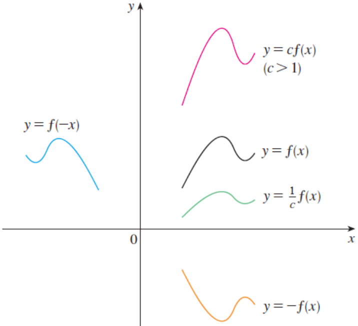
Translações:para cima, para baixo, para esquerda , para direita



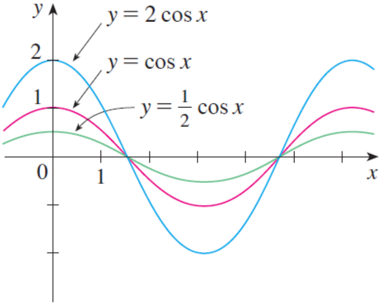
Transformações de gráficos: esticamento e reflexão

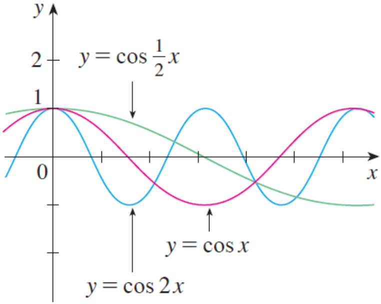
Esticamento e reflexão: suponha $c > 1$

1. $y = cf(x)$ estique o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c
2. $(1/c)f(x)$ comprima.
3. $f(cx)$ comprima horizontalmente.
4. $f(x/c)$ estique horizontalmente por um fator de c,
5. $-f(x)$ reflita o gráfico em torno do eixo x
6. $f(-x)$ reflita em torno do eixo y.



Exemplos de esticamentos: com a função co-seno / Aplicação





Exercício

Demostrar que o gráfico de qualquer função quadrática pode ser obtido a partir do gráfico de $y = x^2$ com translações, esticamentos e reflexões.

Sugestão : lembra que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$

Exemplos

Exercício

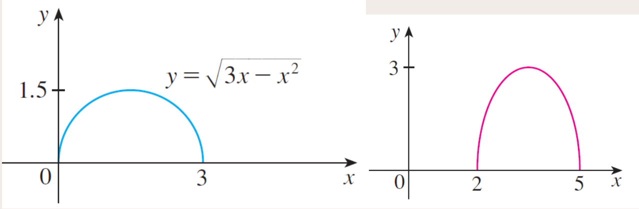
Esboce o gráfico de $x^2 + 10x + 27$.

Exercício

Esboce o gráfico de $|(x-1)(x+3)$ *e de* $|x^3 - 2x|$.

Exercício

O gráfico de $y = \sqrt{3x - x^2}$ *é dado. Use as transformações para criar uma função cujo gráfico é mostrado.*



Exemplos I

Definição

Uma elipse E é um conjunto do plano dado por:

$$E = \{(x, y) \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$$

Exercício

Como obter a elipse E a partir de um círculo?

Observação: Area de uma elipse.

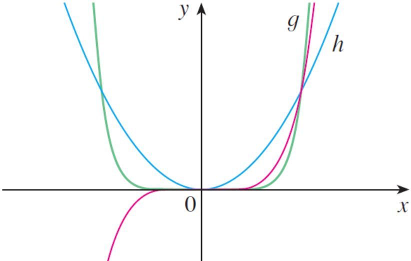
Definição

Um polinômio é uma função do tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

onde os **coeficientes** $a_1, \ldots a_n$ *são constantes.*

Exemplos: $P(x) = mx + b, f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = 5x^3 - 3x + 2.$
Grau: o maior n tal que $a_n \neq 0$ é chamado o grau do polinômio.
Associe cada equação a seu gráfico: $y = x^2, y = x^5, y = x^8$



Função composta

Exemplo :

$$x \mapsto x^3 - 2x \mapsto |x^3 - 2x|$$

Imagem de f: lembra que a imagem de f é $Imf = \{f(x) \mid x \in D_f\}$.

Definição

Sejam f e g duas funções tais que $Imf \subset D_g$, então a função dada por

$$y = g(f(x)), x \in D_f$$

é chamada função composta de g e f, e é denotada por $g \circ f$.

Pergunta: $g \circ f = f \circ g$? ou não?

Exercício

Determine $g \circ f$ e $f \circ g$ para $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$.

Exemplos de composições

Encontre as funções $f \circ g, g \circ f, f \circ f, g \circ g$ e seus domínios

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = x - 2, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$$

$$f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = \cos x$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x + 1}{x + 2}$$

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}, \quad g(x) = \sin 2x$$

Funções Exponenciais: introdução e algumas propriedades

- **Caso mais simples:** para n um inteiro $\geq$, e a um número real:

$$a^n = a.a \ldots .a \text{ (n vezes)}$$

- **Caso 2:** seja $n > 0$ inteiro, $a \in \mathbb{R}$: vamos definir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

- **Caso a^x onde $x = \frac{p}{q}$ é racional:** vamos simplesmente definir:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

Pergunta

Como definir a^x quando x é um número real?

Idéia: seja $x = x_0, x_1x_2x_3x_4\ldots$ (exemplo, $x = \pi = 3,1415\ldots$). Os números 3, depois 3, 1, depois 3, 14, etc são racionais, então podemos considerar a_0^x, e depois a^{x_0,x_1}, e depois a^{x_0,x_1x_2}. Essa sequência vai ter um limite, que a gente vai denotar por a^x.

Primeiro encontro com o limite

Construção de $\sqrt{2}$: como o limite de 1, depois $1,4$, depois $1,41$; $1,414$ …

Teorema

Seja uma seqüência (x_n) *de numeros reais que é crescente (isto é* $x_n \leq x_{n+1}$*) e limitada (isto é: existe um numero real* M *tal que todos os* x_n *são* $\leq M$*).*
Então (x_n) *tem um limite.*

Proof.

As partes inteiras dos x_n são limitadas, então eu posso pegar a maior (seja $E \in \mathbb{Z}$. Tem um numero na seqüência cuja parte inteira é E (vamos denotar ele x_{N_0}). Todos os x_n com $n \geq N_0$ vão ter a mesma parte inteira (porque?).
Agora: para todos os numeros depois de x_{N_0}, eu posso olhar a primeira decimal e pegar a maior (vamos denotar ela de E_1): então existe um x_{N_1} cuja expansão começa com E_0, E_1. Todos os x_n com $n \geq N_1$ vão começar com E_0, E_1. □

Primeiro encontro com o limite II

Proof.

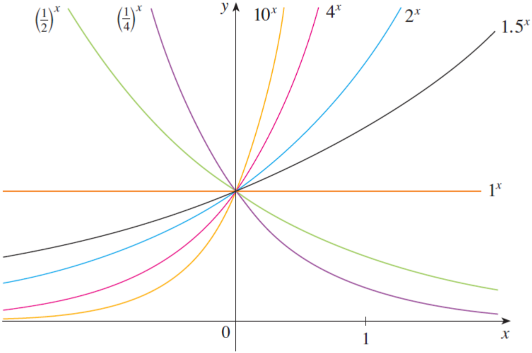
Agora: para todos os numeros depois de x_{N_1}, eu posso olhar a segunda decimal e pegar a maior (vamos denotar ela de E_2): então existe um x_{N_2} cuja expansão começa com $E_0, E_1 E_2$. Todos os x_n com $n \geq N_2$ vão também começar com $E_0, E_1 E_2$ (porque).
Continuar assim, sem parar: a gente vai construir um número real $L = E_0, E_1 E_2 E_3 \ldots$, chamada o **limite** da seqüência (x_n), e denotado por $L = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$. □

Observação

Para cada $\epsilon_k = \frac{1}{10^k} = 10^{-k}$, *existe* $N_k \in \mathbb{N}$ *tal que todos os* x_n *com* $n \geq N_k$ *vão satisfazer* $|x_n - L| \leq \epsilon_k = 10^{-k}$

Primeiras propriedades das funções exponenciais

John Von Neumann: Meu jovem, na matemática você não entende as coisas, você se acostuma com elas.



Conclusão: para cada $a > 0$, existe uma função $x \mapsto a^x$.

Exponencial II: propriedades

Teorema (Lei dos expoentes)

Se a e b forem números positivos e x e y, números reais quaisquer, então:

$$a^{x+y} = a^x a^y \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

Definição de e^x: o número $e = 2,718\ldots$ é o unico tal que a função e^x tem uma reta tangente de inclinação $m = 1$ no ponto $(0,1)$.
Historia: primeira definição de e: como limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (1680).

Exponencial III: propriedades

Teorema

1. *Se* $a = 1$ *então* $a^x = 1^x = 1$ *para cada* $x \in \mathbb{R}$,
2. *Se* $a > 1$ *então* $x \mapsto a^x$ *é estritamente crescente (isto é:* $x < y \Rightarrow a^x < a^y$*), e* $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$*, e* $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.
3. *Se* $a < 1$ *então* $x \mapsto a^x$ *é estritamente decrescente (isto é:* $x < y \Rightarrow a^x > a^y$*), e* $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$*, e* $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
4. *Para todos* $a > 0$, $x \mapsto a^x$ *é uma função continua.*

Definição

A notação

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

(lida como "o limite de $f(x)$ *quando* x *tende a infinito é o infinito") significa: para qualquer numero* M*, existe um numero* N *tal que* $f(x) > M$ *sempre que* $x > N$.

Exponencial IV

Na verdade ja podemos demostrar tudo! Por exemplo:

Proof.

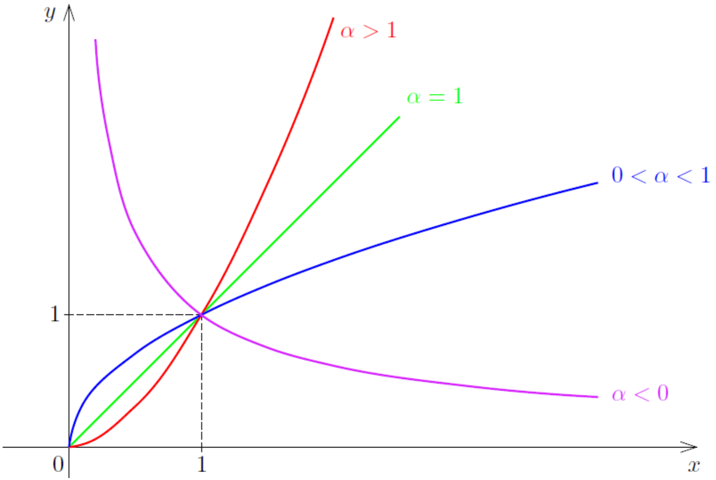
(2) Para inteiros $N_1 < N_2$, temos que $a^{N_1} < a^{N_2}$, e também $a^{1/N_1} < a^{1/N_2}$. Então se $x < y$ (e x, y são racionais) temos que $a^x < a^y$. Depois no caso geral, quando x, y são reais, é suficiente encontrar numeros racionais $u < v$ tais que $x < u < v < y$ e mostrar

$$a^x < a^u < a^v < a^y.$$

□

Funções potência $x \mapsto x^\alpha$

Gráfico:



Exemplos: Frequencia cardiaca e Taxa metabólica basal

Exemplo de função potência:

$$Freq.Card. = K.(Peso)^{-1/4}$$

(passarinho: 800 , rato: 250-450 pulsações, humano : 60-100 (mas ciclista M. Indurain tem 28 ...), cavalo:30)

Definição

A TMB (" Taxa metabólica basal") é a quantidade de energia produzida cada dia por um animal .

Definição (Lei de Kleiber)

$TMB = M^{3/4}$, *onde M é a massa do animal.*

Lista 1, no site

1. **Prove:** que a soma de um racional com um iracional é um iracional.
2. **Resolver**
$$|x-2|+|2x-1|<1$$
3. **Resolver as inequações:**
    1. $(x-3(x+7)<0$
    2. $\frac{2x-1}{x-5}>4$
    3. $(2x+3)(x^2-4)>0$
    4. $x^2-5x+6>0$
    5. $x^3-1>0$
    6. $|x+1|<|2x-1|$
    7. $|x-2|+|x-1|>1$
4. **Estude o sinal da expressão:**
    1. $(2x-1)(x^2+1)$
    2. $(x-2)(x+3)(x^2-1)$
    3. $(x-5)(x^4+2)$

Lista 1

1. **Fatore o polinômio:**
$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$
2. **Elimine o módulo em:** $|x-1| + |x+5|$
3. **Expresse o conjunto com a notação de intervalos:**
$$\{x | 3x + 1 < \frac{x}{3}\}$$
4. **Esboce os gráficos das funções:**
$$f(x) = |2x-1|, f(x) = x^2 - 3x + 4, f(x) = |x-2| + 5$$
5. **Determine a equação** da reta que passa pelo ponto $(1,3)$ e paralela a $y = 2x + 3$
6. **Determine o domínio das funções:**
$$\sqrt{x+2}, \sqrt{\frac{2x-1}{1-3x}}, \frac{x}{x+2}, \sqrt{x^2-1}$$