MAT 0143

Aula 22/ Quarta 28/05/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Valor Médio de uma função

Para uma quantidade finita de números:

$$y_{med} = \frac{y_1 + y_2 \ldots + y_n}{n}$$

Para um número infinito de medidas: dado um gráfico da temperatura $T = f(t)$ $0 \leq t \leq 24$ horas, podemos fazer 24 medidas e calcular a média (isto é fazer uma medida durante a primeira hora do dia, uma medida durante a segunda hora, etc...)

$$\frac{f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star)}{n}, \text{ com } n = 24$$

mas temos que

$$\frac{f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star)}{n} = \frac{1}{b-a} . \frac{b-a}{n} . (f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star))$$

cujo limite é $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

Valor Médio de uma função

Então podemos definir:

Definição

O valor médio da função f *no intervalo* $[a, b]$ *é:*

$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

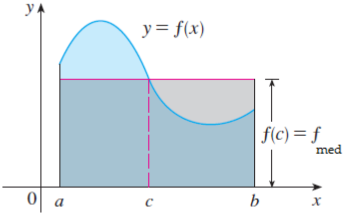
Teorema

Se f *é contínua em* $[a, b]$ *então existe um* $c \in [a, b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

Prova: O teorema do valor médio para $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ diz que existe $c \in (a, b)$ tal que $F(b) - F(a) = F'(c).(b-a)$. Mas agora, temos que $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Valor Médio de uma função



Exercício

Se uma xicara de café tem uma temperatura de 95 *graus, em uma sala cuja temperatura ambiente é de* 20 *graus. De acordo com a Lei de resfriamento de Newton, a temp. do café após t minutos será:*

$$T(t) = 20 + 75e^{-t/50}$$

Qual é a temperatura média do café durante a primeira meia hora?

Integrais indefinidas

Definição

A integral indefinida de f é o conjunto de todas as antiderivadas de f. Ela é denotada por

$$\int f(x)dx.$$

Teorema

Para determinar $\int f(x)dx$, é suficiente de encontrar uma antiderivada F de f, e depois

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ onde } C \text{ é uma constante arbitraria.}$$

Tabela de antiderivadas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$$

Regra da Substituição

Teorema

Se $u = g(x)$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo I e f for continua em I então

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du$$

Este teorema é uma consequência imediata da regra da cadeia:

$$\int F'(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int f(u)du$$

Como utilizar o teorema? $\int x.\cos(x^2+1)dx$. Vamos fazer $u = x^2 + 1$, então $du = 2xdx$. Isso implica: $xdx = \frac{1}{2}du$. Finalmente,

$$\int x.\cos(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)du$$

Mas agora $\frac{1}{2}\int \cos(u)du = \frac{1}{2}\text{sen}u + C = \frac{1}{2}\text{sen}(x^2+1) + C.$

Praticar com a regra da Substituição: #14 e #21

9. $\int (1-2x)^9\, dx$

10. $\int (3t+2)^{2.4}\, dt$

11. $\int (x+1)\sqrt{2x+x^2}\, dx$

12. $\int \sec^2 2\theta\, d\theta$

13. $\int \dfrac{dx}{5-3x}$

14. $\int u\sqrt{1-u^2}\, du$

15. $\int \sin \pi t\, dt$

16. $\int e^x \cos(e^x)\, dx$

17. $\int \dfrac{e^u}{(1-e^u)^2}\, du$

18. $\int \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

19. $\int \dfrac{a+bx^2}{\sqrt{3ax+bx^3}}\, dx$

20. $\int \dfrac{z^2}{z^3+1}\, dz$

21. $\int \dfrac{(\ln x)^2}{x}\, dx$

22. $\int \cos^4\theta \sin\theta\, d\theta$

Algumas Respostas

9) $(-1/20)(1-2x)^{10}$

11) $(1/3)(x(2+x))^{3/2}$

14) $(-1/3)(1-u^2)^{3/2}$

21) $(ln(x))^3/3$

Regra da Substituição para integrais definidas:

Teorema

Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na variação de $u = g(x)$ então

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Exercício

Calcule a integral definida $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3}dx$

Resposta: vamos fazer $u = 1 + x^3$, $du = (1 + x^3)'dx = (3x^2)dx$. Quando $x = 0$ temos $u = 1 + 0 = 1$ e quando $x = 1$ temos $u = 1 + 1^3 = 2$. Finalmente

$$I = \int_1^2 \frac{1}{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln 2}{3}$$

Regra da Substituição para integrais definidas:

61. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \tan x)\, dx$

62. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \sin(\sin x)\, dx$

63. $\displaystyle\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1 + 2x)^2}}$

64. $\displaystyle\int_0^{a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

65. $\displaystyle\int_0^{a} x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx \quad (a > 0)$

66. $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \sin x\, dx$

67. $\displaystyle\int_1^{2} x\sqrt{x - 1}\, dx$

68. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{x}{\sqrt{1 + 2x}}\, dx$

69. $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

70. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

71. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^z + 1}{e^z + z}\, dz$

72. $\displaystyle\int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T - \alpha)\, dt$

Integração por partes

Derivada de um produto:

$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$

Ou, também:

$$f(x)g'(x) = [f(x).g(x)]' - f'(x).g(x)$$

Teorema (Regra de integração por partes)

Vamos supor que $f'(x).g(x)$ tem uma primitiva, então:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

Outra notação: podemos fazer $u = f(x)$ e $v = g(x)$, então $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ e

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Exemplos: Integração por partes, integrais indefinidas

Exercício

Calcule:

1. $\int x.e^x dx$ (*Resp:* $e^x(x-1)+C$
2. $\int ln(x)dx$ (*Resp:* $x.ln(x)-x+C$)
3. $\int (lnx)^2 dx$ (*Resp:* $2x-2x.ln(x)+x(ln(x))^2+C$)
4. $\int x\text{sen}x dx$ (*Resp:* $-x.\cos x+\text{sen}x+C$)

Integração por partes para integrais definidas

Teorema

Sejam f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a, b]$, então:

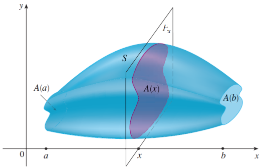
$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx$$

Exercício

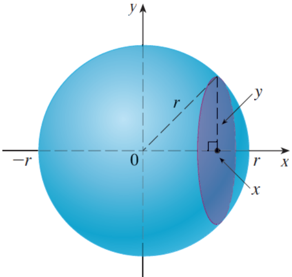
Calcule:

1. $\int_0^1 x.e^x dx$
2. $\int_0^{\pi/2} e^x . \cos x dx$
3. $\int_0^x t^2.e^{-st} dt$
4. $\int_1^2 \ln x dx$

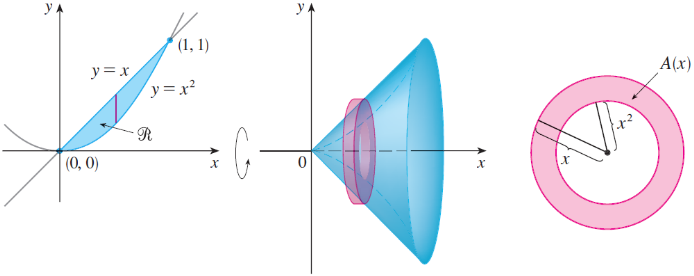
Ideia: cortar o objeto em cilindros de base $A(x)$ e altura dx, e depois fazer a soma $\int_a^b A(x)dx$, onde $A(x)$ é a área da secção transversal.



Exemplo da esfera de raio r: aqui $A(x) = \pi.y^2 = \pi.(r^2 - x^2)$.



São sólidos obtidos pela rotação de uma região ao redor de um eixo.
Método 1: método dos "anéis"



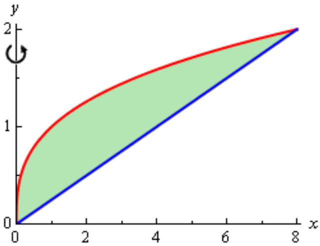
Aqui a área da secção transversal é simplesmente:

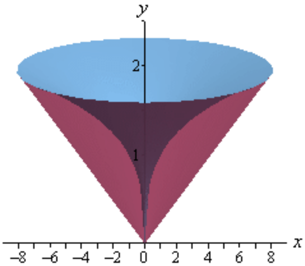
$$A(x) = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2 = \text{ area de um anel}$$

Exercício

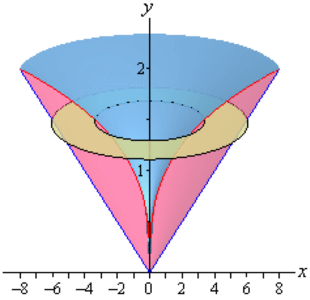
Determine o volume do solido obtido pela rotação da região S ao redor do eixo y. A região S é a região em $x \geq 0, y \geq 0$ entre os gráficos de $y = x/4$ e $y = \sqrt[3]{x}$

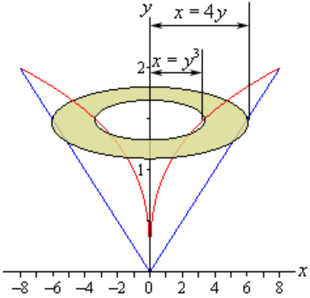
Região S:





Exemplo:





Secção transversal:

$$A(y) = \pi((4y)^2 - (y^3)^2) = \pi.(16y^2 - y^6)$$

Volume:

$$V = \int_0^2 A(y)dy = \pi. \int_0^2 16y^2 - y^6 dy = \pi.[\frac{16}{3}y^3 - \frac{1}{7}y^7]_0^2 = \frac{512}{21}\pi$$

Exercício

Determine o volume do solido obtido pela rotação da região S ao redor da reta $y = 4$. A região S é a região entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2 - 2x$

Região S