MAT 0143

Aula 20/ 20/05/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Teorema fundamental do cálculo

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 1)

Se f for contínua em $[a, b]$ então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é continua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 2)

Se f for contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Praticar: calcule as derivadas

Exercício

Calcule as derivadas:

1. $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1} dz$
2. $y = \int_0^{x^4} \cos^2 \theta d\theta.$

Praticar: calcular a integral (se existe)

19. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\, dx$

20. $\int_{-1}^{1} x^{100}\, dx$

21. $\int_{1}^{4} (5 - 2t + 3t^2)\, dt$

22. $\int_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$

23. $\int_{1}^{9} \sqrt{x}\, dx$

24. $\int_{1}^{8} x^{-2/3}\, dx$

25. $\int_{\pi/6}^{\pi} \sin\theta\, d\theta$

26. $\int_{-5}^{5} e\, dx$

27. $\int_{0}^{1} (u + 2)(u - 3)\, du$

28. $\int_{0}^{4} (4 - t)\sqrt{t}\, dt$

29. $\int_{1}^{9} \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$

30. $\int_{0}^{2} (y - 1)(2y + 1)\, dy$

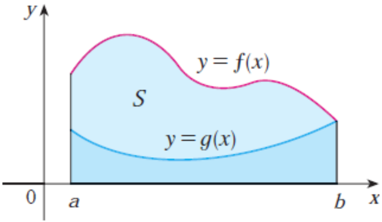
31. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 t\, dt$

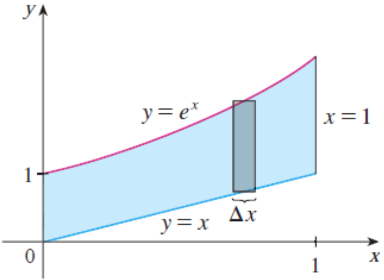
32. $\int_{0}^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

Definição

Seja f contínua em $[a,b]$ com $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$. Vamos definir A como o conjunto do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$. Então:

$$\text{área } A = \int_a^b f(x)dx.$$





Áreas entre duas curvas

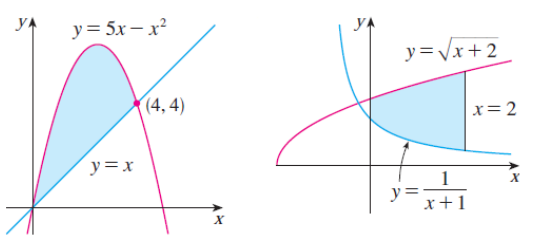
Definição

A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$ onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ é:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Exercício

Encontre as áreas das regiões sombreadas:



Exercício

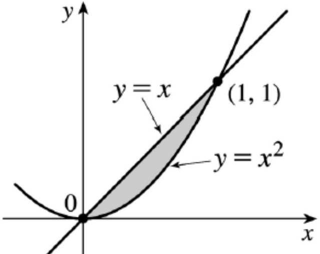
Encontre a área da região entre $y = x$ e $y = x^2$

Solução: Temos que determinar a interseção das duas curvas:

$$x = x^2 \Rightarrow x = 0 \text{ou } x = 1$$

Depois, entre $x = 0$ e $x = 1$ temos que $x \geq x^2$ então:

$$A = \int_0^1 (x - x^2)dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

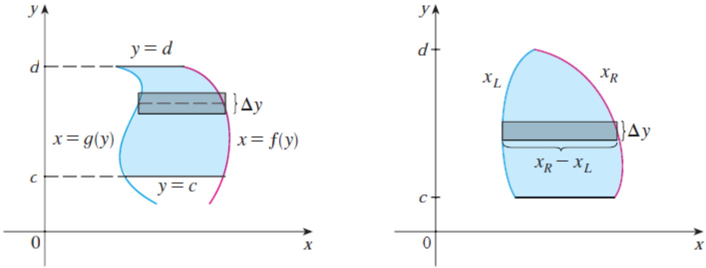


Áreas entre duas curvas

Exercício

Encontre a área da região entre $y = \sqrt{x}$ *e* $y = x/2$ *e* $0 \leq x \leq 9$

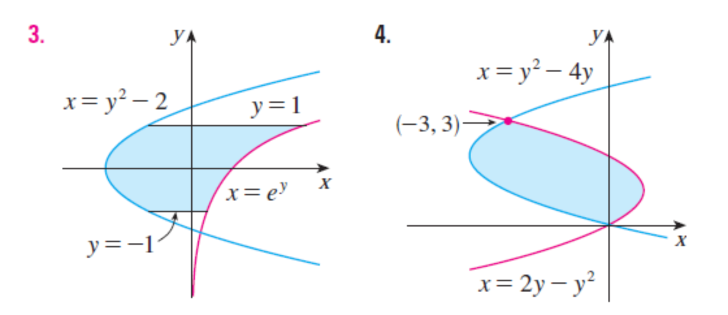
Funções de y: as vezes, é mais facil de descrever uma região com curvas do tipo $x = g(y)$.



Funções de y:

Exercício

Encontre as áreas das regiões sombreadas:



Movimento de uma particula no eixo x

Uma particula se desloca no eixo x, com equação $x = x(t)$ e velocidade $v = v(t)$ (função contínua em $[a, b]$).

Definição

O deslocamento da particula entre os instantes a e b é a diferença

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)dt$$

Definição

O espaço percorrido pela particula entre os instantes a e b é definido como:

$$\int_a^b |v(t)|dt$$

Exercício

Uma particula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2t - 3$, $t \geq 0$.

1. *Calcule o deslocamento entre $t = 1$ e $t = 3$.*
2. *Qual é o espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$?*

Valor Médio de uma função

Para uma quantidade finita de números:

$$y_{med} = \frac{y_1 + y_2 \ldots + y_n}{n}$$

Para um número infinito de medidas: dado um gráfico da temperatura $T = f(t)$ $0 \leq t \leq 24$ horas, podemos fazer 24 medidas e calcular a média (isto é fazer uma medida durante a primeira hora do dia, uma medida durante a segunda hora, etc...)

$$\frac{f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star)}{n}, \text{ com } n = 24$$

mas temos que

$$\frac{f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star)}{n} = \frac{1}{b-a} . \frac{b-a}{n} . (f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star))$$

cujo limite é $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

Valor Médio de uma função

Então podemos definir:

Definição

O valor médio da função f no intervalo $[a, b]$ é:

$$f_{med} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

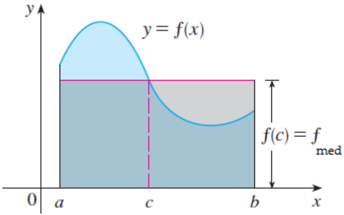
Teorema

Se f é contínua em $[a, b]$ então existe um $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

Prova: O teorema do valor médio para $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ diz que existe $c \in (a, b)$ tal que $F(b) - F(a) = F'(c).(b-a)$. Mas agora, temos que $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Valor Médio de uma função



Exercício

Se uma xicara de café tem uma temperatura de 95 graus, em uma sala cuja temperatura ambiente é de 20 graus. De acordo com a Lei de resfriamento de Newton, a temp. do café após t minutos será:

$$T(t) = 20 + 75e^{-t/50}$$

Qual é a temperatura média do café durante a primeira meia hora?

Integrais indefinidas

Definição

A integral indefinida de f é o conjunto de todas as antiderivadas de f. Ela é denotada por

$$\int f(x)dx.$$

Teorema

Para determinar $\int f(x)dx$, é suficiente de encontrar uma antiderivada F de f, e depois

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ onde } C \text{ é uma constante arbitraria.}$$

Tabela de antiderivadas

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x + C$$

Regra da Substituição

Teorema

Se $u = g(x)$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo I e f for continua em I então

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du$$

Este teorema é uma consequência imediata da regra da cadeia:

$$\int F'(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int f(u)du$$

Como utilizar o teorema? $\int x.\cos(x^2+1)dx$. Vamos fazer $u = x^2 + 1$, então $du = 2xdx$. Isso implica: $xdx = \frac{1}{2}du$. Finalmente,

$$\int x.\cos(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)du$$

Mas agora $\frac{1}{2}\int \cos(u)du = \frac{1}{2}\text{sen}u + C = \frac{1}{2}\text{sen}(x^2+1) + C$.

Praticar com a regra da Substituição

9. $\int (1 - 2x)^9 \, dx$

10. $\int (3t + 2)^{2.4} \, dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2} \, dx$

12. $\int \sec^2 2\theta \, d\theta$

13. $\int \frac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int u\sqrt{1 - u^2} \, du$

15. $\int \sin \pi t \, dt$

16. $\int e^x \cos(e^x) \, dx$

17. $\int \frac{e^u}{(1 - e^u)^2} \, du$

18. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

19. $\int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} \, dx$

20. $\int \frac{z^2}{z^3 + 1} \, dz$

21. $\int \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx$

22. $\int \cos^4\theta \sin \theta \, d\theta$