

MAT 0143

Aula 16/ 07/05/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

- 1 **Site:** <http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html>
- 2 **Equação** $y' = ky + b$.
- 3 Intervalos de crescimento e decrescimento
- 4 **Teorema do valor médio**
- 5 **Teorema do valor intermediário**
- 6 **Existência de um máximo e mínimo globais para f contínua em $[a, b]$**
- 7 **Primitivas de uma função $f(x)$**

Teorema do valor intermediário e consequências

Teorema (Teorema de Rolle)

Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

- 1 f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$,
- 2 f é diferenciável no intervalo aberto (a, b) ,
- 3 $f(a) = f(b)$, Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema (do valor intermediário)

Se f for contínua em $[a, b]$ e se γ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = \gamma$.

Consequência: se $f(a) < 0, f(b) > 0 \Rightarrow$ existe $\gamma \in]a, b[$ tal que $f(\gamma) = 0$.

Teorema

Se f for contínua em $[a, b]$ então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. (Isto é $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$, e $f(x_2)$ é o valor máximo)

Máximo, mínimo local

Definição

- 1 *Uma função f tem um máximo local em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c .*
- 2 *Uma função f tem um mínimo local em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c .*

Como reconhecer um máximo ou mínimo local para f derivável:

Teorema

Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Demonstração:

Definição

Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Exercício

Encontre os números críticos:

$$① \quad f(x) = \frac{x-2}{(x-3)(x-4)}$$

$$② \quad g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$$

Teste da derivada primeira

Teorema

Suponha que c seja um número crítico de f contínua.

- 1 Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c então f tem um máximo local em c ,
- 2 Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c , então f tem um mínimo local em c ,
- 3 Se f' não mudar de sinal em c , então f não tem máximo ou mínimo locais em c .

Exercício

Encontre os valores de max e min com o teste da primeira derivada para $f(x) = x^5 - 5x + 3$

Máximo absoluto (ou global)

Definição

Uma função f tem máximo absoluto (ou máximo global) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D_f$. O número $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D_f . Também f tem um mínimo absoluto em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D_f$, e o número $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D_f . Os valores máximo e mínimo de f são chamados valores extremos de f .

Como determinar os valores extremos de f contínua em $[a, b]$ fechado:

- 1 Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b) ;
- 2 Encontre os valores de f nos extremos do intervalo (isto é, em a e b);
- 3 O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f

Exercício

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [0.2, 4]$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$$

$$f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$$

$$f(t) = \sqrt[3]{t}(8 - t), \quad [0, 8]$$

$$f(t) = 2\cos t + \sin 2t, \quad [0, \pi/2]$$

$$f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$$

$$f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$$

$$f(x) = x - \ln x, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$$

Uso da derivada segunda

Concavidade:

Definição

Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo $I = (a, b)$, então ele é chamado côncavo para cima em I . Se o gráfico estiver abaixo de todas as suas tangentes em I , ele é chamado côncavo para baixo em I .

Como determinar a concavidade:

Teorema

- 1 Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f é côncavo para cima em I .
- 2 Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f é côncavo para baixo em I .

Exercício

Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão para:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} \text{ e } g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$$

Definição

Um ponto P na curva $y = f(x)$ é um ponto de inflexão se f é contínua e a função mudar de concavidade em P .

Observação: se a curva tiver uma tangente em P ponto de inflexão, então a curva cruza sua tangente em P .

Mais uma aplicação:

Teorema (Teste da derivada segunda)

Suponha que f'' seja contínua perto de c .

- 1 Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$ então f tem um mínimo local em c .
- 2 Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$ então f tem um máximo local em c .

Exercício

Encontre os valores de máximo e mínimo locais de f com o teste das derivadas primeira e depois o teste da derivada segunda, para

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}, \text{ e depois } g(x) = x + \sqrt{1 - x}.$$

Teorema

Vamos supor que f e g têm derivadas e que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

onde a pode ser um número real finito, $+\infty$ ou $-\infty$, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Como mostrar o teorema: caso fácil onde f' é contínua: simplesmente observar que $f(x) \simeq f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$ perto de a .

Exercício

Com a regra de L'Hôpital, estudar:

- 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
- 2 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{5t^4 - 4t^2 - 1}{10 - t - 9t^3}$
- 3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$
- 4 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$ (pensar: $f(x) = \frac{\ln x}{1/x}$!)
- 5 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x$ (que tentar? $e^x / (1/x)$ ou x/e^{-x} ?)
- 6 Mais complicado: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ (do tipo ∞^0).

Problemas de otimização

Exercício

Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r .

Exercício

Encontre os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto $(1,0)$.

Prova: Escrever o quadrado da distância $d^2 = (x - 1)^2 + y^2$ como uma função de x e encontrar os pontos críticos e aplicar o teste da derivada segunda. Calcular também os valores em -1 e 1 (lembra que $x \in [-1, 1]$).

Exercício

Área do maior retângulo inscrito na elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.