MAT 0143

Aula 15/ 05/05/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo:

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Derivada da função inversa**
3. **Logaritmos**
4. **Equação** $y' = ky$ e a aplicações
5. Intervalos de crescimento e decrescimento

Equações diferenciais

Definição

Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função y que aparece na equação também com as derivadas de y.

Exemplos: $y' = 3y + 1, y'' = -y, y.y' = 2y''$.
O primeiro teorema é muito intuitivo:

Teorema

As soluções da equação $y' = 0$ num intervalo (a, b) são exatamente as funções constantes.

Teorema

As soluções da equação $y' = k.y$ num intervalo (a, b) são exatamente as funções

$$y(t) = C.e^{kt}, \text{ onde } C \text{ é uma constante.}$$

Solução de $y' = ky + b$

Exercício (Equação $y' = ky + b$)

1. *dar um exemplo de solução.*
2. *Mudar de variavel: escolher uma função simples do tipo* $u = \alpha.y + \beta$ *para obter uma nova equação do tipo* $u' = K.u$
3. *resolver a equação original.*

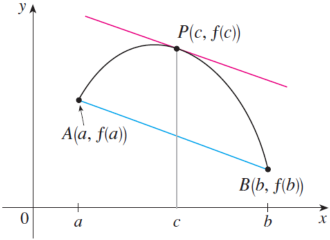
Estudo da variação das funções

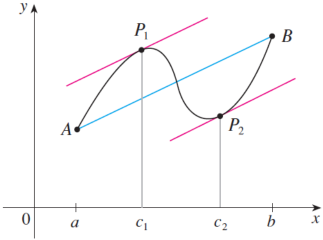
Objetivo: dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, queremos cortar $\mathbb{R}$ em intervalos (a, b) onde f é crescente ou decrescente.

Teorema (Teorema do valor médio)

Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \text{ ou } f(b) - f(a) = f'(c).(b - a)$$





Intervalos de crescimento e de decrescimento

Teorema

Seja f contínua no intervalo I

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I,*
2. *Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente decrescente em I.*

Demonstração: Vamos mostrar o primeiro caso: sejam $s < t$. Então existe $c \in (s, t)$ tal que $f(t) - f(s) = f'(c).(t - s) > 0$.

Exercício

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
3. $x = \frac{t}{1+t^2}$
4. $f(x) = (\ln x)/x$

Dois teoremas sem demonstrações

Teorema (do valor intermediário)

*Se f for contínua em $[a,b]$ e se γ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c*in*$]a,b[$ tal que $f(c)=\gamma$.*

Consequência importante: se $f(a)<0, f(b)>0$ e f contínua em $[a,b]$ então existe $\gamma \in]a,b[$ tal que $f(\gamma)=0$.

Teorema

Se f for contínua em $[a,b]$ então exisirão x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$. (Isto é $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em $[a,b]$, e $f(x_2)$ é o valor máximo)

Mais consequências do teorema do valor medio

Exercício ($e^x \to \infty$ mais rapidamente que x)

1. *Mostrar* $e^x > x$ *para todo* $x \geq 0$
2. *Mostre que* $e^x > (x^2)/2$ *para todo* $x \geq 0$
3. *Mostre que* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Exercício

Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ *admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude* 1 *que contenha tal raiz.*

Teorema (Teorema de Rolle)

Seja f uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:

1. *f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$,*
2. *f é diferenciável no intervalo aberto (a, b),*
3. *$f(a) = f(b)$, Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Teorema (do valor intermediário)

Se f for contínua em $[a, b]$ e se γ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um cin$]a, b[$ tal que $f(c) = \gamma$.

Consequência: se $f(a) < 0, f(b) > 0 \Rightarrow$ existe $\gamma \in]a, b[$ tal que $f(\gamma) = 0$.

Teorema

Se f for contínua em $[a, b]$ então exisirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a, b]$. (Isto é $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$, e $f(x_2)$ é o valor máximo)

Valor intermediário e equação $y' = 0$

Teorema

Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b) então f é constante em (a, b).

Prova: Vamos tomar $x_1 < x_2$. Então existe um $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c).(x_2 - x_1) = 0.(x_2 - x_1)$.
Consequência muito importante: determinar as primitivas de uma função $f(x)$ em (a, b)

Definição

Uma função $F(x)$ em (a, b) é uma primitiva de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$ em (a, b).

Exercício

Determinar todas as primitivas em $\mathbb{R}$ de:

1. $f(x) = 5x^2 + 2x + 1$
2. $f(x) = \cos(x)$
3. $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ *em* $(a, b) = (0, \infty)$

Máximo, mínimo local

Definição

1. *Uma função f tem um máximo local em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.*
2. *Uma função f tem um mínimo local em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.*

Como reconhecer um máximo ou mínimo local para f derivavel:

Teorema

Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Demonstração:

Definição

Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Exercícios

Exercício

Encontre os números críticos:

1. $f(x) = \frac{x-2}{(x-3)(x-4)}$
2. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

Teste da derivada primeira

Teorema

Suponha que c seja um número critico de f contínua.

1. *Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c então f tem um máximo local em c,*
2. *Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c,*
3. *Se f' não mudar de sinal em c , então f não tem máximo ou mínimo locais em c.*

Exercício

Encontre os valores de max e min com o teste da primeira derivada para $f(x) = x^5 - 5x + 3$

Máximo absoluto (ou global)

Definição

Uma função f tem máximo absoluto (ou máximo global) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D_f$. O número $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D_f. Também f tem um mínimo absoluto em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D_f$, e o número $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D_f. Os valores máximo e mínimo de f são chamados valores extremos de f.

Como determinar os valores extremos de f contínua em $[a, b]$ fechado:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b);
2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo (isto é, em a e b);
3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f

Exercício

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [0.2, 4]$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$$

$$f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$$

$$f(t) = \sqrt[3]{t}\,(8 - t), \quad [0, 8]$$

$$f(t) = 2\cos t + \sin 2t, \quad [0, \pi/2]$$

$$f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$$

$$f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$$

$$f(x) = x - \ln x, \quad \left[\tfrac{1}{2}, 2\right]$$

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$$

Uso da derivada segunda

Concavidade:

Definição

Se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo $I = (a, b)$, então ele é chamado côncavo para cima em I. Se o gráfico estiver abaixo de todas as suas tangentes em I, ele é chamado côncavo para baixo em I.

Como determinar a concavidade:

Teorema

1. *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f é côncavo para cima em I.*
2. *Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de f é côncavo para baixo em I.*

Exercício

Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão para:
$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ e $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

Uso da derivada segunda II

Definição

Um ponto P na curva $y = f(x)$ é um ponto de inflexão se f é continua e a função mudar de concavidade em P.

Observação: se a curva tiver uma tangente em P ponto de inflexão, então a curva cruza sua tangente em P.

Mais uma aplicação:

Teorema (Teste da derivada segunda)

Suponha que f'' seja contínua perto de c.

1. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$ então f tem um mínimo local em c.*
2. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$ então f tem um máximo local em c.*

Exercício

Encontre os valores de máximo e mínimo locais de f com o teste das derivadas primeira e depois o teste da derivada segunda, para

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}, \text{ e depois } g(x) = x + \sqrt{1 - x}.$$