MAT 0143

Aula 13/ 28/04/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo:

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Regras de diferenciação:** soma, produto, quociente.
3. **Derivadas superiores**
4. **Derivada e exponencial**
5. **Derivada de** sen, cos
6. **Regra da cadeia**

Regras de diferenciação

Teorema (Regra do produto)

Se f e g forem diferenciáveis, então:

$$(f.g)' = f'g + fg'$$

Teorema (Regra do quociente)

Se f eg forem deriváveis em p e se $g(p) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ sera derivável em p e,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2}$$

Regra da cadeia: derivadas e funções compostas

Teorema

Se f e g forem diferenciáveis e $F = f \circ g$ for a função composta $F(x) = f(g(x))$, ento F é diferenciável e

$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x).$$

Na notação de Leibniz: se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções diferenciáveis:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Prova: temos que estudar $\lim_{x\to a} \frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}$. Vamos introduzir:

$$Q(y) = \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)}, \text{ se } y \neq g(a) \text{ e } = f'(g(a)) \text{ se } y = g(a).$$

Agora é facil de ver que $\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a}$ é sempre igual a $Q(g(x)).\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$. Depois podemos tomar o limite.

Exemplos

Exercício

Diferencie:

1. $R(z) = \sqrt{5z - 8}$
2. $\operatorname{sen}(3x^2 + x)$
3. $e^{w^4 - 3w^2 + 9}$
4. $\cos(t^4) + \cos^4(t)$
5. $(g(x))^2$, *onde g é derivavel.*
6. $e^{g(x)}$, *onde g é derivavel.*
7. $h(z) = \frac{2}{(4z + e^{-9z})^10}$

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

8. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt{1 - 2x}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{(1 + \sec x)^2}$

11. $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$

12. $f(t) = \sin(e^t) + e^{\sin t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$

16. $y = e^{-2t} \cos 4t$

17. $f(x) = (2x - 3)^4 (x^2 + x + 1)^5$

18. $g(x) = (x^2 + 1)^3 (x^2 + 2)^6$

19. $h(t) = (t + 1)^{2/3} (2t^2 - 1)^3$

20. $F(t) = (3t - 1)^4 (2t + 1)^{-3}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^3$

22. $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2 + 1}{s^2 + 4}}$

23. $y = \sqrt{1 + 2e^{3x}}$

24. $y = 10^{1 - x^2}$

25. $y = 5^{-1/x}$

26. $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$

28. $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$

Funções inversas

1. **Ideia:** uma função g é inversa da função f quando "g vai desfazer o que f faz"
2. **Examplo:** "desfazer o quadrado":

$$x > 0 \mapsto x^2 \mapsto \sqrt{x^2} = |x| = x \text{ porque } x > 0$$

3. **Exemplo 2:** "desfazer uma função linear $x \mapsto 5x$"

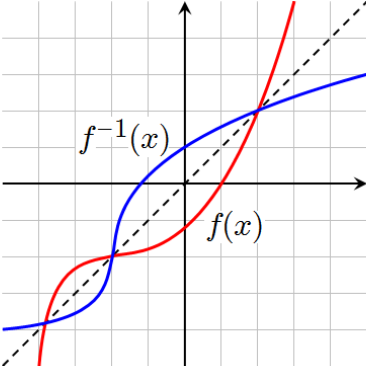
$$x \mapsto 5x \mapsto \frac{1}{5}.5x = x$$

4. **Cuidado!** a função inversa de f não é $\frac{1}{f(x)}$!
5. **Cuidado 2!** o dominio da função inversa (se tem uma) pode ser menor que o dominio de f (exercicio:dar um exemplo).

Exercício

Determine a função inversa de $f(x) = (2x+8)^3$.

- **Notação:** A função inversa de $f(x)$ é denotada por $f^{-1}(x)$ (se existe...)
- **Gráfico da função inversa:** os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$.



Funções inversas III

- **Função inversível** $f : X \to Y$: f é inversível se e somente se, para qualquer $y \in Y$ existe um unico $x \in X$ tal que $f(x) = y$.
- **Função sobrejetiva, ou sobrejetora:** é uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva se para qualquer $y \in B$ existe um (ou mais de um) $x \in A$ tal que $f(x) = y$.
- **Função injectiva, ou injetora:** é uma função f tal que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
- **Função bijectiva, ou inversível:**= função injetora e sobrejetora.

Teorema

1. *Seja f uma função continua e estritamente crescente, então f é inversível.*
2. *Seja f uma função continua e estritamente decrescente, então f é inversível.*

Derivada de $g = f^{-1}$

Teorema

Seja f uma função inversível, com função inversa g. Se f e g forem diferenciáveis, temos que

$$g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(g(x))} \text{ para todos} x \in D_g$$

for derivável em $q = g(p)$, com $f'(q) \neq 0$, e se g for continua em p, então g será derivável em p.

Prova: temos que

$$f(g(x) = x.$$

Podemos tomar a derivada:

$$f'(g(x).g'(x) = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Exemplos

Arco-seno: $\text{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ é continua e estritamente crescente, então existe uma inversa, chamada $arc \quad sen : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ com derivada

$$(arc\text{sen})'(x) = \frac{1}{\text{sen}'(arc\text{sen}x)} = \frac{1}{\cos(arcsenx)}$$

mas agora

$$[\cos(arcsenx)]^2 + [\text{sen}(arcsenx)]^2 = 1 \Rightarrow [\cos(arcsenx)]^2 + x^2 = 1$$

então $[\cos(arcsenx)] = \sqrt{1-x^2}$ e finalmente:

$$(arc\text{sen})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$$

Exercício

Mostrar que $(arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Funções Logarítmicas

Observação: para $a > 1$, $x \mapsto a^x$ é continua e crescente (ou decrescente), então existe uma função inversa chamada *função logaritmíca com base a*, denotada por $\log_a$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Propriedades I:

$$\log_a(a^x) = x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x \text{ para todo } x > 0$$

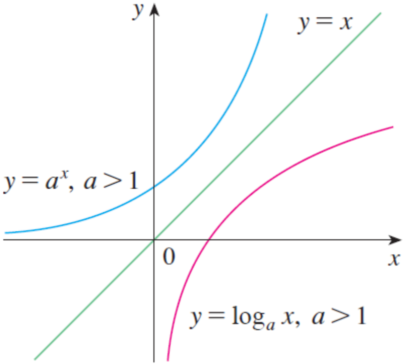
Propriedades II:

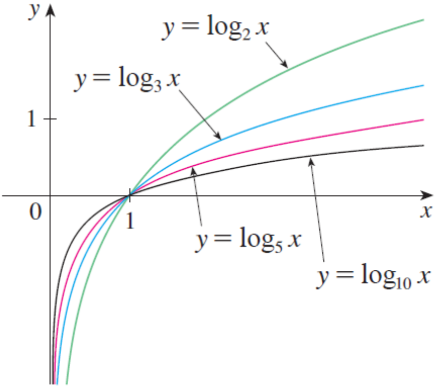
Teorema (Leis dos logaritmos)

Se x e y forem > 0, então:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r.\log_a x$ *onde r é qualquer número real.*

Gráfico em relação à a^x:





Log e limites:

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \text{ e também } \lim_{xto+\infty} \log_a x = +\infty$$

John Napier: depois de 20 anos de trabalho...

Gr. 0

min	Sinus	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
0	0	Infinitum	Infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51
10	29088	58399857	58399814	43	9999959	50
11	31997	57446759	57446707	52	9999950	49
12	34906	56576646	56576584	62	9999940	48
13	37815	55776222	55776149	73	9999928	47
14	40724	55035148	55035064	84	9999917	46
15	43632	54345225	54345129	96	9999905	45
16	46541	53699843	53699734	109	9999892	44
17	49450	53093600	53093577	123	9999878	43
18	52359	52522019	52521881	138	9999863	42
19	55268	51981356	51981202	154	9999847	41
20	58177	51468431	51468361	170	9999831	40
21	61086	50980537	50980450	187	9999813	39
22	63995	50515342	50515137	205	9999795	38
23	66904	50070827	50070603	224	9999776	37
24	69813	49645239	49644995	244	9999756	36
25	72721	49237030	49236765	265	9999736	35
26	75630	48844826	48844539	287	9999714	34
27	78539	48467431	48467122	309	9999692	33
28	81448	48103763	48103431	332	9999668	32
29	84357	47752859	47752503	356	9999644	31
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30

89

Logaritmos naturais

Definição: $\log_e x = \ln x$
Propriedades I:

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$
$$\ln(e^x) = x \text{ para } x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln x} = x \text{ para } x > 0$$

Propriedades II: "Mudança de base"

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \text{ para todo } a > 0, a \neq 1$$

Teorema (Logaritmos e derivadas)

1. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$,
2. *Para todo* $x \in (0, \infty)$ $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
3. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x . \ln a$
4. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

Exemplos

Exercício

Determine a derivada:

1. $y = e^{3x}.arc\text{sen}(2x)$
2. $y = x^2.e^{arctg(2x)}$.
3. $y = e^{-3x} + \ln(arctgx)$

Equações diferenciais

Definição

Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função y que aparece na equação também com as derivadas de y.

Exemplos: $y' = 3y + 1$, $y'' = -y$, $y.y' = 2y''$.
O primeiro teorema é muito intuitivo:

Teorema

As soluções da equação $y' = 0$ num intervalo (a, b) são exatamente as funções constantes.

Teorema

As soluções da equação $y' = k.y$ num intervalo (a, b) são exatamente as funções

$$y(t) = C.e^{kt}, \text{ onde } C \text{ é uma constante.}$$

Solução de $y' = ky$

Prova: E facil de ver que $y(t) = C.e^{kt}$ são soluções.
Agora seja $g(t)$ uma solução. Vamos definir uma nova função

$$h(t) = g(t).e^{-kt}$$

Então $h'(t) = g'(t).e^{-kt} + g(t)(-k.e^{-kt}) = kg(t)e^{-kt} - kg(t).e^{-kt} = 0$.
Isso implica que $h(t) = Constante = C$, e depois que $g(t) = C.e^{kt}$.

Exercício (Equação $y' = ky + b$)

1. *dar um exemplo de solução.*
2. *Mudar de variavel: escolher uma função simples do tipo $u = \alpha.y + \beta$ para obter uma nova equação do tipo $u' = K.u$*
3. *resolver a equação original.*

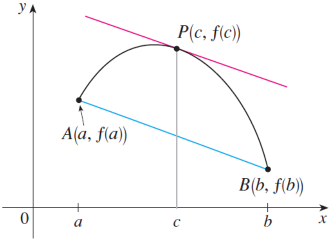
Estudo da variação das funções

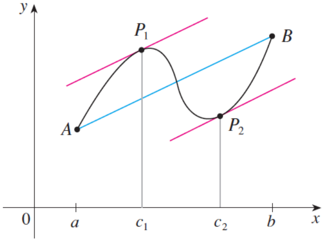
Objetivo: dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, queremos cortar $\mathbb{R}$ em intervalos (a, b) onde f é crescente ou decrescente.

Teorema (Teorema do valor médio)

Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \text{ ou } f(b) - f(a) = f'(c).(b - a)$$





Intervalos de crescimento e de decrescimento

Teorema

Seja f contínua no intervalo I

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I,*
2. *Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente decrescente em I.*

Demonstração: Vamos mostrar o primeiro caso: sejam $s < t$. Então existe $c \in (s, t)$ tal que $f(t) - f(s) = f'(c).(t - s) > 0$.

Exercício

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
3. $x = \frac{t}{1+t^2}$
4. $f(x) = (\ln x)/x$

Dois teoremas sem demonstrações

Teorema (do valor intermediário)

Se f for contínua em $[a,b]$ e se γ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c in$]a,b[$ tal que $f(c) = \gamma$.

Consequência importante: se $f(a) < 0, f(b) > 0$ e f contínua em $[a,b]$ então existe $\gamma \in]a,b[$ tal que $f(\gamma) = 0$.

Teorema

Se f for contínua em $[a,b]$ então exisirão x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$. (Isto é $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em $[a,b]$, e $f(x_2)$ é o valor máximo)

Mais consequências do teorema do valor medio

Exercício ($e^x \to \infty$ mais rapidamente que x)

1. *Mostrar* $e^x > x$ *para todo* $x \geq 0$
2. *Mostre que* $e^x > (x^2)/2$ *para todo* $x \geq 0$
3. *Mostre que* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Exercício

Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ *admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raiz.*