# Revisão : máximo, minimo em dimensão 1

## Teorema (Teorema de Rolle)

*Seja $f$ uma função que satisfaça as seguintes hipóteses:*

1. $f$ *é contínua no intervalo fechado* $[a,b]$,
2. $f$ *é diferenciável no intervalo aberto* $(a,b)$,
3. $f(a) = f(b)$, *Então existe um número* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

## Teorema (do valor intermediário)

*Se $f$ for contínua em $[a,b]$ e se $\gamma$ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um $c \in ]a,b[$ tal que $f(c) = \gamma$.*

**Consequência:** se $f(a) < 0, f(b) > 0 \Rightarrow$ existe $\gamma \in ]a,b[$ tal que $f(\gamma) = 0$.

## Teorema

*Se $f$ for contínua em $[a,b]$ então existirão $x_1$ e $x_2$ em $[a,b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in [a,b]$. (Isto é $f(x_1)$ é o valor mínimo de $f$ em $[a,b]$, e $f(x_2)$ é o valor máximo)*

# Valor intermediário e equação $y' = 0$

### Teorema

*Se $f'(x) = 0$ para todo $x$ em um intervalo $(a,b)$ então $f$ é constante em $(a,b)$.*

**Prova:** Vamos tomar $x_1 < x_2$. Então existe um $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c).(x_2 - x_1) = 0.(x_2 - x_1)$.

**Consequência muito importante:** determinar as primitivas de uma função $f(x)$ em $(a,b)$

### Definição

*Uma função $F(x)$ em $(a,b)$ é uma primitiva de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$ em $(a,b)$.*

### Exercício

*Determinar todas as primitivas em $\mathbb{R}$ de:*

1. $f(x) = 5x^2 + 2x + 1$
2. $f(x) = \cos(x)$
3. $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ *em* $(a,b) = (0,\infty)$

# Máximo, mínimo local

## Definição

1. *Uma função $f$ tem um máximo local em $c$ se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x$ em algum intervalo aberto contendo $c$.*
2. *Uma função $f$ tem um mínimo local em $c$ se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x$ em algum intervalo aberto contendo $c$.*

**Como reconhecer um máximo ou mínimo local para $f$ derivavel:**

## Teorema

*Se $f$ tiver um máximo ou mínimo local em $c$ e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.*

**Demonstração:**

## Definição

*Um número crítico de uma função $f$ é um número $c$ no domínio de $f$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

# Teste da derivada primeira

## Teorema

*Suponha que c seja um número critico de $f$ contínua.*

1. *Se o sinal de $f'$ mudar de positivo para negativo em c então $f$ tem um máximo local em c,*
2. *Se o sinal de $f'$ mudar de negativo para positivo em c, então $f$ tem um mínimo local em c,*
3. *Se $f'$ não mudar de sinal em c , então $f$ não tem máximo ou mínimo locais em c.*

## Exercício

*Encontre os valores de max e min com o teste da primeira derivada para* $f(x) = x^5 - 5x + 3$

# Máximo absoluto (ou global)

## Definição

*Uma função $f$ tem máximo absoluto (ou máximo global) em $c$ se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D_f$. O número $f(c)$ é chamado valor máximo de $f$ em $D_f$. Também $f$ tem um mínimo absoluto em $c$ se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D_f$, e o número $f(c)$ é chamado valor mínimo de $f$ em $D_f$. Os valores máximo e mínimo de $f$ são chamados valores extremos de $f$.*

**Como determinar os valores extremos de $f$ contínua em $[a, b]$ fechado:**

1. Encontre os valores de $f$ nos números críticos de $f$ em $(a, b)$;
2. Encontre os valores de $f$ nos extremos do intervalo (isto é, em $a$ e $b$);
3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

# Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de $f$

## Exercício

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [0.2, 4]$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$$

$$f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$$

$$f(t) = \sqrt[3]{t}(8 - t), \quad [0, 8]$$

$$f(t) = 2\cos t + \sin 2t, \quad [0, \pi/2]$$

$$f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$$

$$f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$$

$$f(x) = x - \ln x, \quad \left[\tfrac{1}{2}, 2\right]$$

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$$

# Uso da derivada segunda

**Concavidade:**

## Definição

*Se o gráfico de $f$ estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo $I = (a, b)$, então ele é chamado côncavo para cima em $I$. Se o gráfico estiver abaixo de todas as suas tangentes em $I$, ele é chamado côncavo para baixo em $I$.*

**Como determinar a concavidade:**

## Teorema

1. *Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de $f$ é côncavo para cima em $I$.*
2. *Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ então o gráfico de $f$ é côncavo para baixo em $I$.*

## Exercício

*Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão para:*
$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ *e* $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

# Uso da derivada segunda II

## Definição

*Um ponto $P$ na curva $y = f(x)$ é um ponto de inflexão se $f$ é continua e a função mudar de concavidade em $P$.*

**Observação:** se a curva tiver uma tangente em $P$ ponto de inflexão, então a curva cruza sua tangente em $P$.
**Mais uma aplicação:**

## Teorema (Teste da derivada segunda)

*Suponha que $f''$ seja contínua perto de $c$.*

1. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$ então $f$ tem um mínimo local em $c$.*
2. *Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$ então $f$ tem um máximo local em $c$.*

## Exercício

*Encontre os valores de máximo e mínimo locais de $f$ com o teste das derivadas primeira e depois o teste da derivada segunda, para*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}, \text{ e depois } g(x) = x + \sqrt{1-x}.$$

**Definição**

*Uma função* $f(x,y)$ *tem um máximo local em* $(a,b)$ *se* $f(x,y) \leq f(a,b)$ *para todo* $(x,y)$ *perto de* $(a,b)$. *O número* $f(a,b)$ *é chamado valor máximo local.*

**Mínimo local:** localmente $f(x,y) \geq f(a,b)$.

**Definição**

*Uma função* $f(x,y)$ *tem um máximo absoluto em* $(a,b)$ *se* $f(x,y) \leq f(a,b)$ *para todo* $(x,y)$ *no domínio de* $f$.

# Condição necessaria para ter um máximo ou mínimo local

**Teorema**

*Se $f$ tem derivadas parciais $f_x$,$f_y$ em $(a,b)$ e $(a,b)$ é um máximo local ou mínimo local em $(a,b)$ então $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$.*

**Exercício**

*Mostre o teorema acima.*

**Ponto crítico:**

**Definição**

*Um ponto $(a,b)$ tal que uma das derivadas $f_x$, $f_y$ não existe, ou tal que as duas existem mas $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ é chamado um ponto crítico (ou estacionário).*

# Teorema do valor médio

## Teorema

*Seja $f$ diferenciável num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, e $P_0, P_1$ dois pontos de $U$ tais que o segmento $[P_0P_1] \subset U$. Então existe um ponto $P_3 \in (P_0P_1)$ tal que*

$$f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(P_3).(P_1 - P_0).$$