Resumo: plano tangente e reta normal

Definição

Seja f diferenciável no ponto (x_0, y_0). O plano

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(x_0, y_0)(y - y_0)$$

é chamado o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Observação:se f não é diferenciável, o plano escrito acima pode existir, mas sem ser "tangente" no gráfico.

Teorema

A reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dada pela equação parametrica:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t. \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Plano tangente e reta normal

Exercício

considere a função $f(x,y) = x.\phi(x/y)$ *onde* ϕ *é derivável. Mostre que os planos tangentes ao gráfico passam pela origem.*

Exercício

Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + y$ *e tangente ao gráfico de* $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Diferencial de uma função

Definição

A diferencial de $f(x, y)$ é dada por

$$df = f_x dx + f_y dy$$

Exercício

Determine a diferencial da função:

1. $z = x^3 . \ln(y^2)$
2. $R = \alpha . \beta^2 . \cos(\lambda)$
3. $T = \frac{v}{1+u.v.w}$

Mais sobre a noção de diferenciabilidade

Exercício

Seja $f(x,y)$ diferenciável em (a,b) então f é contínua em (a,b).

Exercício

Seja $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Mostre que as derivadas parciais em $(0,0)$ existem mas que f não é diferenciável em $(0,0)$. Que podemos dizer da continuidade de f_x e f_y em $(0,0)$?

Regra da cadeia

Teorema

(Caso 1) Seja $z = f(x,y)$ *uma função diferenciável de* x *e* y*, e* $x = g(t)$*,* $y = h(t)$ *duas funções diferenciáveis de* t*. Então a composta* $t \mapsto f(g(t),h(t))$ *é uma função diferenciável de* t *e*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ideia da demonstração: Todas as funções são diferenciáveis, então podemos utilizar as linearizações delas:

1. $g(a+t) \simeq g(a) + g'(a).t$
2. $h(a+t) \simeq h(a) + h'(a).t$
3. $f(x_0+u, y_0+v) \simeq f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).v$

Queremos calcular $\lim_{t\to 0} \frac{f(g(a+t),h(a+t)) - f(g(a),h(a))}{t} = \frac{dz}{dt}(a)$.

Temos

$$f(g(a+t),h(a+t)) \simeq f(g(a)+g'(a).t,h(a)+h'(a).t)$$

$$\simeq f(g(a),h(a)) + \frac{\partial f}{\partial x}(g(a),h(a)).g'(a).t + \frac{\partial f}{\partial y}(g(a),h(a)).h'(a)t$$

Isso implica:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(g(a+t),h(a+t)) - f(g(a),h(a))}{t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(g(a),h(a)).g'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(a),h(a)).h'(a)$$

Em resumo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Regra da cadeia , caso 1

Exercício

Utilize a regra da cadeia para determinar dz/dt ou dw/dt.

$$z = x^2 + y^2 + xy, \quad x = \sin t, \quad y = e^t$$

$$z = \cos(x + 4y), \quad x = 5t^4, \quad y = 1/t$$

$$z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}, \quad x = \ln t, \quad y = \cos t$$

$$z = \tan^{-1}(y/x), \quad x = e^t, \quad y = 1 - e^{-t}$$

$$w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$$

$$w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t, \quad z = \tan t$$

Regra da cadeia , caso 2

Teorema

Suponha que $z = f(x,y)$ *seja uma função diferenciável de* x *e* y*, onde* $x = g(s,t)$ *e* $y = h(s,t)$ *são funções diferenciáveis de* s *e* t*. Então:*

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

e também:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Observação: regra da cadeia e algebra linear (matrizes).

Regra da cadeia , caso 2

Exercício

Utilize a regra da cadeia para determinar $\partial z/\partial s$ ou $\partial z/\partial t$.

$$z = x^2 y^3, \quad x = s\cos t, \quad y = s\sin t$$

$$z = \arcsin(x - y), \quad x = s^2 + t^2, \quad y = 1 - 2st$$

$$z = \sin\theta\cos\phi, \quad \theta = st^2, \quad \phi = s^2 t$$

$$z = e^{x+2y}, \quad x = s/t, \quad y = t/s$$

$$z = e^r\cos\theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$$

$$z = \tan(u/v), \quad u = 2s + 3t, \quad v = 3s - 2t$$

Regra da cadeia , caso geral

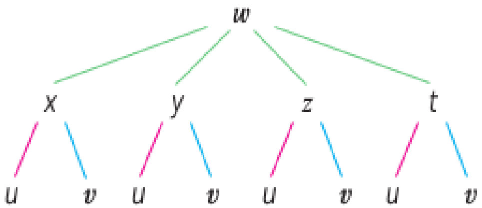
Teorema

Suponha que $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ *seja uma função diferenciável de* n *variáveis* $x_1, \ldots x_n$ *onde cada* x_i *é uma função diferenciável de* m *variáveis* $t_1, \ldots, t_m$. *Então* u *é uma função diferenciável de* $t_1, \ldots, t_m$ *e*

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Como lembrar do resultado:



Regra da cadeia , caso geral

Exercício

Escreve a regra da cadeia (utilizando um diagrama em árvore).

$$u = f(x, y), \quad x = x(r, s, t), \; y = y(r, s, t)$$

$$R = f(x, y, z, t), \quad x = x(u, v, w), \; y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \; t = t(u, v, w)$$

$$w = f(r, s, t), \quad r = r(x, y), \; s = s(x, y), \; t = t(x, y)$$

$$t = f(u, v, w), \quad u = u(p, q, r, s), \; v = v(p, q, r, s), \\ w = w(p, q, r, s)$$

Exercício

Determine as derivadas parciais indicadas

$$z = x^4 + x^2y, \quad x = s + 2t - u, \quad y = stu^2;$$
$$\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u} \qquad s = 4, t = 2, u = 1$$

$$T = \frac{v}{2u + v}, \quad u = pq\sqrt{r}, \quad v = p\sqrt{q}\,r;$$
$$\frac{\partial T}{\partial p}, \frac{\partial T}{\partial q}, \frac{\partial T}{\partial r} \qquad p = 2, q = 1, r = 4$$

$$w = xy + yz + zx, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = r\theta;$$
$$\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial \theta} \qquad r = 2, \theta = \pi/2$$

$$P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \quad u = xe^y, \quad v = ye^x, \quad w = e^{xy};$$
$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \qquad x = 0, y = 2$$

$$N = \frac{p + q}{p + r}, \quad p = u + vw, \quad q = v + uw, \quad r = w + uv;$$
$$\frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial w} \qquad u = 2, v = 3, w = 4$$

Derivadas de ordem superior

Suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ tem também derivadas parciais. Então podemos definir:

$$f_{xx} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

e também

$$f_{yx} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Teorema (teorema de Clairaut, também chamado teorema de Schwarz)

Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem contínuas em D então

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Equações diferenciais parciais

Equação de Laplace: as soluções são chamadas funções harmônicas.

$$\Delta u := \nabla^2 u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Equação da onda: seja $u = u(x, t)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi$$

Equações diferenciais parciais

Equação de Laplace:

Exercício

Se $z = f(x, y)$ *onde* $x = r\cos\theta$ *e* $y = r\mathrm{sen}\theta$. *Encontre* $\partial z/\partial r$ *e* $\partial z/\partial\theta$ *e mostre*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

Exercício

Se $u = f(x, y)$ *onde* $x = e^s\cos t$ *e* $y = e^s\mathrm{sen}t$.*Mostre*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

Equações diferenciais parciais

Equação da onda:

Exercício

Mostre que cada função $z = f(x + at) + g(x - at)$ *é solução de*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$