

MINICURSO – COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO NORTE
2014

Comitê Científico

Flávia Morgana de O. Jacinto (UFAM) - Coordenadora

Hugo Alex Carneiro Diniz (UFOPA)

Jorge Herbert Soares de Lira (UFC)

Marcelo Miranda Viana da Silva (IMPA-SBM)

Renato de Azevedo Tribuzy (UFAM)

Rodrigo Bissacot Proença (USP)

Rúbia Gonçalves Nascimento (UFPA)

<http://www.loja.sbm.org.br/>



Sociedade Brasileira de Matemática

2014

Introdução
à
Dinâmica Holomorfa

Sylvain Bonnot
sylvain@ime.usp.br

Departamento de Matemática
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo



Sociedade Brasileira de Matemática

Rio de Janeiro - RJ, Brasil
2014

Coordenação Editorial:

Flávia Morgana de O. Jacinto

Editora: SBM

Impresso na Gráfica:

Capa: ? ? ?

Patrocínio: Superintendência da Zona Franca de Manaus (SUFRAMA)

Copyright ©2014 by Autores
Direitos reservados, 2014 pela SBM.

**Catálogo elaborado pela Biblioteca ???
Biblioteca: ????**

Bonnot, Sylvain

Introdução à dinâmica holomorfa – Rio de Janeiro, RJ :
SBM, 2014, ?? p., 20.5 cm - (Minicurso Colóquio CO 2014; v. ??)

ISBN ????-????

1. Dinâmica 2. Funções holomorfas

I. Bonnot, Sylvain. , III. Introdução à dinâmica holomorfa. IV. Série

CDD - 51

Dedico estas notas ao Sucrilho e ao Costelinha

Agradecimentos

À minha família, e à Luciana.
À FAPESP pela bolsa (11/2650-4)

Conteúdo

Prefácio	11
1 Parte I: Preliminares	13
1.1 Funções holomorfas: um resumo	13
1.2 O ponto no infinito: a esfera de Riemann	14
1.3 Iteração em \mathbb{C} : uma história curta	16
2 Dinâmica local	23
2.1 Pontos fixos	23
2.2 Atratores e super-atratores	24
2.2.1 Atratores	24
2.2.2 Super-atratores	26
2.3 Pontos neutros	31
2.3.1 Pontos parabólicos.	31
2.3.2 Ponto neutro irracional	34
3 Dinâmica global	37
3.1 Conjuntos de Julia e de Fatou	37
3.2 A família quadrática	38
3.3 Conjuntos de Julia e discos apertados	40
3.4 Quebra-cabeça de Yoccoz	41
4 O conjunto de Mandelbrot \mathcal{M}	45
4.1 Propriedades básicas	45
4.2 Topologia de \mathcal{M}	47
4.3 Um modelo para \mathcal{M}	48
5 Dinâmica em \mathbb{C}^2	53
5.1 Funções holomorfas em \mathbb{C}^n	53
5.2 Possibilidades	54

5.3	Particularidades da dimensão 2: domínios de Fatou-Bieberbach	55
5.4	Aplicações de Hénon complexas	57
5.4.1	Propriedades básicas:	57
5.4.2	Conjuntos de Julia para aplicações de Hénon	59
5.4.3	Coordenada de Böttcher	62
5.4.4	Modelos topológicos	63
6	Software	67

Prefácio

Essas notas foram realizadas para meu mini-curso no III Colóquio de Matemática da Região Norte. O objetivo é dar uma introdução rápida na área da dinâmica holomorfa, com ênfase em exemplos explícitos. Para isso, muitas ilustrações foram incluídas: a maioria dos objetos da dinâmica holomorfa, como os conjuntos de Julia, ou o conjunto de Mandelbrot possuem uma beleza natural revelada somente nos anos 80 com o uso dos computadores. Nessas notas, me concentrei principalmente nos aspectos topológicos da teoria, mas muitas outras abordagens são possíveis.

São Paulo, 10/09/2014.

Sylvain Bonnot

Capítulo 1

Parte I: Preliminares

1.1 Funções holomorfas: um resumo

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Vamos dizer que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é *holomorfa* se para cada ponto $z_0 \in U$ existe uma bola $B_\epsilon(z_0) \subset U$ de raio $\epsilon > 0$ tal que f nessa bola pode ser escrita como uma série convergente de potências:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ para todo } z \in B_\epsilon(z_0). \quad (1.1.1)$$

Equações de Cauchy-Riemann Podemos também escrever $z = x + iy$ e ver f como uma função $f(x, y)$ de duas variáveis reais. Da mesma maneira, $f(x, y)$ pode ser escrita como $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Com essa notação, podemos demonstrar que f é holomorfa se e somente se u e v são de classe C^1 e

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.1.2)$$

Essas equações são chamadas as *equações de Cauchy-Riemann*.

É comum introduzir dois operadores diferenciais

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \text{ e também } \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (1.1.3)$$

Essa notação foi escolhida para satisfazer por exemplo $\frac{\partial}{\partial z}(z) = 1$. Assim podemos reescrever as equações de Cauchy-Riemann como $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Formula integral de Cauchy Existe uma outra caracterização possível da holomorphicidade. A função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa se f é de classe C^1 e, para cada bola $B_\epsilon(z_0) \subset U$ temos:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (1.1.4)$$

Teorema 1.1 (Teorema de Liouville). *Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa e limitada é constante.*

Teorema 1.2 (Teorema da identidade). *Sejam $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções holomorfas num conjunto aberto e conexo $U \subset \mathbb{C}$, tais que $f(z) = g(z)$ para todo z num aberto não vazio $V \subset U$, então $f = g$.*

Teorema 1.3 (Teorema de extensão de Riemann). *Seja $f : B_\epsilon(z_0) - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa limitada. Então f tem uma extensão holomorfa $f : B_\epsilon(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$.*

Teorema 1.4 (Teorema da aplicação de Riemann). *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, simplesmente conexo, distinto de \mathbb{C} . Então existe uma aplicação biholomorfa $f : U \rightarrow B_1(0)$.*

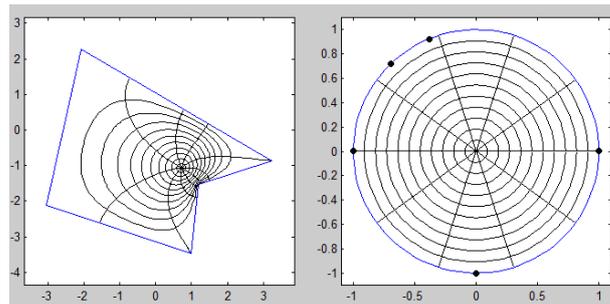


Figura 1.1: Aplicação de Riemann para um polígono

1.2 O ponto no infinito: a esfera de Riemann

No espaço \mathbb{R}^3 com coordenadas (x, y, t) podemos considerar a esfera unitária S^2 ,

$$x^2 + y^2 + t^2 = 1.$$

Seja $N = (0, 0, 1)$ o polo Norte da esfera e $S = (0, 0, -1)$ o polo Sul.

A projeção estereográfica associada à N associa a cada ponto $M \in S^2 - N$ a interseção da reta (NM) com o plano $t = 0$. A coordenada complexa deste ponto é

$$z = \frac{x + iy}{1 - t}.$$

A aplicação $(x, y, t) \mapsto z$ é um homeomorfismo de $S^2 - N$ sobre \mathbb{C} , chamada um *mapa*.

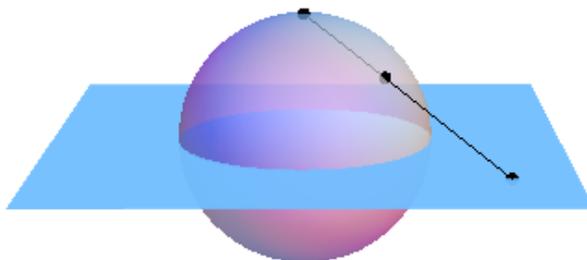


Figura 1.2: Projeção stereográfica

Podemos também definir uma função composta com uma projeção estereográfica associada a S e depois uma conjugação complexa (i.e $z \mapsto \bar{z}$). O resultado é

$$w = \frac{x - iy}{1 + u}.$$

A aplicação $(x, y, t) \mapsto w$ é também um *mapa* de $S^2 - S$ sobre \mathbb{C} .

Uma observação importante é que $z.w = 1$.

A esfera S^2 com esses dois mapas é chamada a *esfera de Riemann*, denotada por $\widehat{\mathbb{C}}$.

Funções holomorfas em $\widehat{\mathbb{C}}$. Seja $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ um conjunto aberto. Uma função f é *holomorfa* em U se: para todo ponto $M \neq N$ f pode ser escrita numa vizinhança de M distinta de N como uma função holomorfa em z , e para topo ponto $M \neq S$, f pode ser escrita numa vizinhança de M distinta de S como uma função de w . Para um aberto $U \subset \widehat{\mathbb{C}} - \{N, S\}$, uma função holomorfa em z é também holomorfa em w (lembra da relação: $z.w = 1$).

A esfera de Riemann pode ser vista como uma *compactificação* do plano complexo \mathbb{C} , i.e como o resultado de acrescentar um ponto ∞ no plano. Conjuntos do tipo $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| > R\} \cup \{\infty\}$ formam uma base de

vizinhanças de ∞ , e uma função f definida em U é holomorfa perto de ∞ se e somente se

$$w \mapsto \frac{1}{f(1/w)}$$

é holomorfa perto de $w = 0$.

1.3 Iteração em \mathbb{C} : uma história curta

Nessa seção, nós vamos dar uma visão rápida da história da dinâmica holomorfa. Para mais detalhes, ver (Audin, 2011) e também a introdução escrita por J.H. Hubbard do livro (Tan, 2000).

O início. Podemos dizer que a dinâmica holomorfa começou com o estudo do **método de Newton** no plano complexo feito por Cayley em 1879. Este algoritmo bem conhecido de determinação das raízes de uma equação $f(x) = 0$ funciona assim: começando com um ponto inicial x_0 , determinar a intersecção com a horizontal da reta tangente no gráfico de $y = f(x)$, passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ (ver Figura 1.3).

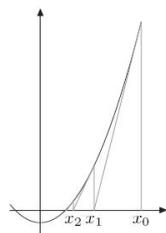


Figura 1.3: O método de Newton em dimensão 1, real

É fácil lembrar dessa fórmula: a reta passando pelos pontos $(z_n, f(z_n))$ e $(z_{n+1}, 0)$ tem que ter uma inclinação igual à $f'(z_n)$, então $\frac{0-f(z_n)}{z_{n+1}-z_n} = f'(z_n)$.

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

Agora essa fórmula faz sentido para números complexos também e cria de maneira natural um sistema dinâmico: a iteração da função $z \mapsto z - \frac{f(z)}{f'(z)}$.

O primeiro problema é o seguinte: como escolher o ponto inicial da iteração? Uma outra maneira de reformular o problema seria: determinar o conjunto de todos os pontos iniciais tais que a iteração do método de Newton converge para uma raiz determinada.

Cayley observou que a questão depende da função f :

The solution is easy and elegant in the case of a quadric equation, but the next succeeding case of the cubic equation appears to present considerable difficulty.

CAMBRIDGE, March 3d, 1879.

Para entender a observação de Cayley, vamos dar algumas definições úteis.

Definição 1.1. *A bacia de atração de uma raiz α pela iteração do método de Newton é o conjunto de todos os pontos z_0 tais que a seqüência z_n converge para α .*

Cayley tinha razão: as raízes da equação $z^3 - 1 = 0$ são

$$1, j = e^{2i\pi/3}, j^2 = e^{4i\pi/3}.$$

As bacias de atração têm uma topologia extremamente complicada: na figura 1.4, por exemplo o conjunto em verde é a bacia da raiz $\alpha = 1$.

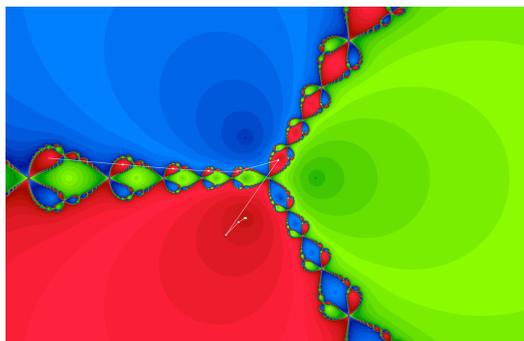


Figura 1.4: As Bacias de atração para $z \mapsto z^3 - 1$, e, em branco, um exemplo de órbita que tem limite igual a j^2 .

O seguinte exemplo mostra que o caso de uma equação quadrática é simples, como Cayley explicou:

Exemplo 1.1. *Descrever as bacias de atração das raízes de $f(z) = z^2 - 1 = 0$, para a iteração da aplicação de Newton*

$$N_f(z) = z - \frac{z^2 - 1}{2z} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Solução: As bacias das raízes -1 e $+1$ são os dois semi-planos

$$U_{-1} := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) < 0\} \text{ e } U_1 := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Para ver isso, podemos fazer uma mudança de variável $w = \frac{z+1}{z-1}$ e ver que a aplicação N_f escrita nessa variável é simplesmente $w \mapsto z^2$. O seguinte diagrama resume a situação:

Conjugação de N_f com $w \mapsto w^2$:

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{\phi} & w = \frac{z+1}{z-1} \\ \downarrow N_f & & \downarrow w^2 \\ \frac{z^2+1}{2z} & \xrightarrow{\phi} & \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \end{array}$$

■

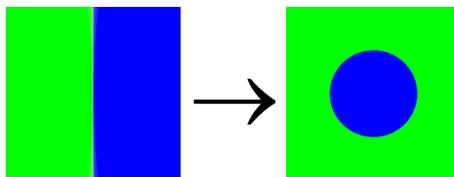


Figura 1.5: Bacias no plano z e as bacias correspondentes no plano w

Trabalho de G. Julia e P. Fatou (início do século XX) Eles foram os primeiros a estudar de maneira sistemática a iteração das funções holomorfas, e os conjuntos invariantes chamados hoje de *conjunto de Julia* e *conjunto de Fatou*.

Renascimento da dinâmica holomorfa: a possibilidade de visualizar no computador as bacias de atração deu um grande impulso na dinâmica holomorfa, com os trabalhos de J.H Hubbard, A. Douady, D. Sullivan. O assunto se tornou muito popular depois do trabalho de Mandelbrot. Nós recomendamos o livro de Milnor como uma introdução excelente na área ((Milnor, 2006)) e também (Carleson e Gamelin, 1993) e (Beardon, 1991).

A família de sistemas dinâmicos holomorfos mais estudada é sem dúvidas a família quadrática:

$$P_c : z \mapsto z^2 + c, \text{ com } c \in \mathbb{C}.$$

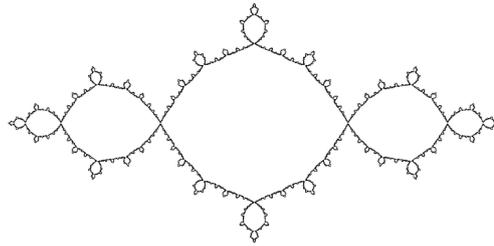


Figura 1.6: Um exemplo de conjunto de Julia. O complemento dele é o conjunto de Fatou.

Os objetos invariantes mais importantes são provavelmente os *conjuntos cheios de Julia*

Definição 1.2 (Conjunto cheio de Julia). *O conjunto de todos os valores iniciais z_0 cujas órbitas não escapam para o infinito sob a iteração de $P_c(z)$.*

Exemplos: bacia de atração do ponto periódico $z_0 = 0$ sob $z \mapsto z^2 - 1$:

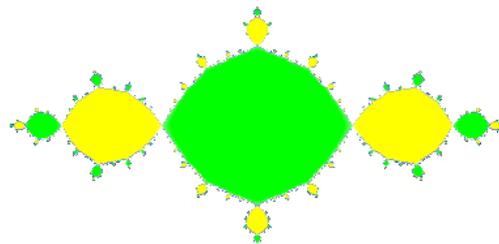


Figura 1.7: Um exemplo de conjunto cheio de Julia: a bacia do ciclo atrativo $0 \mapsto -1 \mapsto 0$.

Conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} . O conjunto de Mandelbrot pode ser definido como

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C}; \text{ a órbita de } 0 \text{ sob iteração de } z \mapsto z^2 + c \text{ é limitada}\}.$$

Este conjunto tem uma topologia extremamente complicada. M. Shishikura mostrou que a dimensão de Hausdorff da fronteira dele é igual a 2. Mais detalhes podem ser encontrados em (Carleson e Gamelin, 1993). \mathcal{M} também pode ser definido como o conjunto de todos os parâmetros $c \in \mathbb{C}$ tais que o conjunto cheio de Julia associado K_c é conexo.

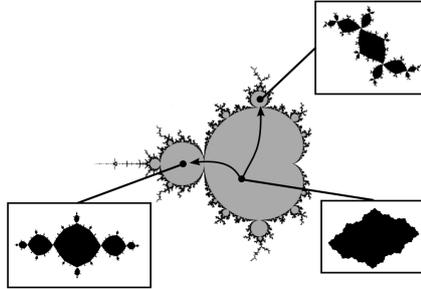


Figura 1.8: Conjunto de Mandelbrot com alguns exemplos de conjuntos cheios de Julia conexos.

Exercícios

Exercício 1.1. *Mostrar que o plano \mathbb{C} e o disco aberto $\mathbb{D} := B_1(0)$ não são isomorfos.*

Exercício 1.2. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ uma aplicação de Riemann para um aberto U simplesmente conexo. Mostrar que f não é única.*

Exercício 1.3. *Seja f holomorfa em \mathbb{C} e tal que existem $n \in \mathbb{N}$, e $M, R > 0$ tais que*

$$|f(z)| \leq M \cdot |z|^n \text{ para todo } |z| \geq R.$$

Mostrar que $f(z)$ é um polinômio de grau menor que n .

Exercício 1.4. *Seja f uma função holomorfa, não constante num aberto conexo U , e $D \subset U$ um aberto conexo tal que $\bar{D} \subset U$ é um compacto de U . Suponhamos que $|f|$ é constante na fronteira ∂D . Mostrar que f tem pelo menos um zero em D .*

Exercício 1.5. *Mostrar que cada transformação $w = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc \neq 0$ é um automorfismo da esfera de Riemann (e na verdade não há mais automorfismos).*

Exercício 1.6. *Mostrar que $w = \frac{z-i}{z+i}$ é um isomorfismo analítico do semi-plano $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$ até o disco $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.*

Exercício 1.7. *Mostrar que as transformações do tipo $w = \frac{az+b}{cz+d}$ que preservam \mathbb{D} são necessariamente do tipo*

$$w = e^{i\theta} \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z} \text{ para } \theta \in \mathbb{R} \text{ e } |z_0| < 1.$$

Vamos indicar algumas etapas:

1. *mostrar que $1 - w\bar{w}$ implica $a\bar{b} = c\bar{d}$ e $a\bar{a} - c\bar{c} = d\bar{d} - b\bar{b}$*

2. *mostrar*

$$1 - w\bar{w} = \frac{(d\bar{d} - b\bar{b})(1 - z\bar{z})}{|cz + d|^2}$$

3. *deduzir que $d\bar{d} - b\bar{b} > 0$ e $|a| = |d|$;*

4. *mostrar que $\frac{c}{a} = \frac{\bar{b}}{\bar{d}} = \bar{\lambda}$ tal que $|\lambda| < 1$;*

5. *concluir, com a introdução de z_0 definido por $z_0 = \lambda \frac{d}{a}$.*

Exercício 1.8. *Que tipo de curva é a imagem por $z \mapsto z^2$ de um círculo passando pela origem?*

Exercício 1.9. *Escrever a fórmula do algoritmo de Newton para $f(z) = z^3 - 1$.*

Exercício 1.10. *Seja $C := \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| = 1\}$ um círculo passando pela origem. Desenhar a pré-imagem do círculo C pela aplicação $z \mapsto z^2$.*

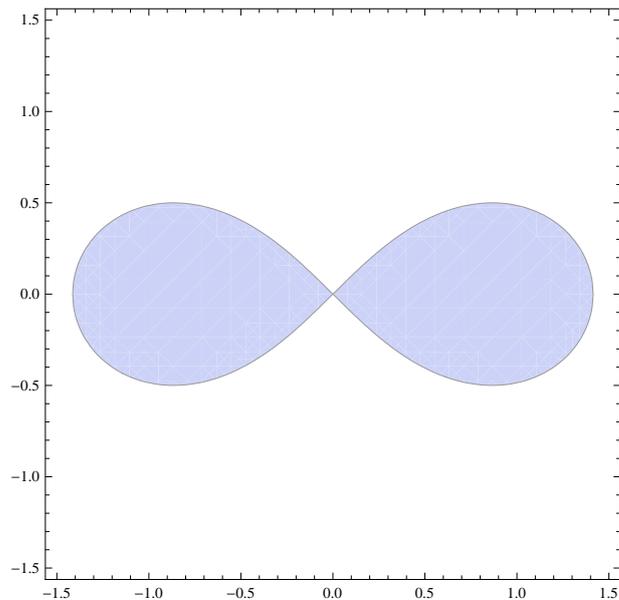


Figura 1.9: Pré-imagem por $z \mapsto z^2$ de um círculo passando pela origem

Exercício 1.11. *Seja $P(z)$ um polinômio em $z \in \mathbb{C}$. Mostrar que P tem uma extensão holomorfa na esfera de Riemann.*

Capítulo 2

Dinâmica local

2.1 Pontos fixos

Falando das órbitas periódicas das equações diferenciais, Henri Poincaré observou que o estudo delas é o único ponto de entrada para entender um sistema dinâmico complicado:

“ce qui rend ces solutions périodiques aussi précieuses, c’est qu’elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous pouvons pénétrer dans une place jusqu’ici réputée inabordable”

H. Poincaré

No estudo dos sistemas dinâmicos discretos, as órbitas periódicas têm a mesma importância. O exemplo mais simples é o exemplo de um ponto fixo.

Definição 2.1. *Seja f uma função definida numa vizinhança de $z_0 \in \mathbb{C}$. O ponto z_0 é chamado um ponto fixo de f se $f(z_0) = z_0$.*

Forma normal de f perto de um ponto fixo. Perto de um ponto fixo z_0 podemos escrever f como

$$f(z) = z_0 + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \dots$$

ou, depois de uma translação podemos simplesmente supor que $z_0 = 0$. Assim, $f(z) = \lambda z + \dots$, onde o número λ é chamado o *multiplicador* do ponto fixo.

-
1. $|\lambda| < 1$: o ponto fixo z_0 é chamado um *atrator*;
 2. $\lambda = 0$: z_0 é um super-atrator;
 3. $|\lambda| = 1$: z_0 é chamado *neutro*.
 - a) se $\lambda = e^{2i\pi p/q}$ com $p/q \in \mathbb{Q}$, o ponto é *parabólico*,
 - b) se não, z_0 é irracional neutro.
 4. $|\lambda| > 1$: z_0 é um repulsor.

Órbitas periódicas. Para uma órbita periódica

$$z_0 \mapsto z_1 := f(z_0) \mapsto \dots \mapsto z_{n-1} \mapsto z_0$$

de período n (também chamada um *ciclo*), o *multiplicador* λ é definido como

$$\lambda = (f^n)'(z_0) = f'(z_{n-1}) \cdot f'(z_{n-2}) \cdot \dots \cdot f'(z_0)$$

Dependendo do valor de λ o ciclo é um atrator, um super-atrator, etc. . . .

2.2 Atratores e super-atratores

Definição 2.2. A *bacia* de um atrator é o conjunto de todos os pontos z_0 cuja órbita converge para o atrator.

2.2.1 Atratores

Nós estudamos aqui a situação de um ponto fixo z_0 que é um atrator:

$$f(z_0) = z_0 \text{ e } f'(z_0) = \lambda \text{ onde } 0 < |\lambda| < 1.$$

Por exemplo $z_0 \simeq 0,27$ para $f(z) = z^2 + 0,2$ é tal que $|f'(z_0)| \simeq 0,54 < 1$. Um teorema bem antigo de Koenigs mostra que a dinâmica perto do atrator é realmente a mesma que a dinâmica da aplicação linear associada $z \mapsto \lambda z$:

Teorema 2.1 (Koenigs, 1884). *Existe uma aplicação biholomorfa $w = \phi(z)$ definida numa vizinhança de z_0 até uma vizinhança de 0 que conjuga $f(z)$ com a aplicação linear $g(w) = \lambda w$. A conjugação é única, a menos de uma multiplicação por um número diferente de zero.*

Demonstração: Nós queremos resolver a equação funcional $\phi \circ f = \lambda\phi$, isto é, encontrar uma aplicação ϕ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} z & \xrightarrow{f} & f(z) = w \\ \phi \downarrow & & \phi \downarrow \\ w & \xrightarrow{\lambda} & \lambda w \end{array}$$

Depois de uma translação podemos supor que $z_0 = 0$ e definir $\phi_n(z) = \frac{f^n(z)}{\lambda^n} = z + (\text{termos de ordem superior})$. Já podemos observar que

$$\phi_n \circ f = \frac{f^{n+1}}{\lambda^n} = \lambda\phi_{n+1},$$

assim, se $\phi_n \rightarrow \phi$ temos imediatamente a equação funcional $\phi \circ f = \lambda\phi$.

Agora vamos mostrar a convergência de ϕ_n : existe um C e um δ tais que para $|z| \leq \delta$,

$$|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2 \text{ e } |f(z)| \leq |\lambda||z| + C|z|^2 \leq (|\lambda| + C\delta)|z|,$$

onde $(|\lambda| + C\delta) < 1$. Assim, por indução, $|f^n(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)^n |z|$, para $|z| \leq \delta$.

Agora,

$$|\phi_{n+1}(z) - \phi_n(z)| = \left| \frac{f^n(f(z)) - \lambda f^n(z)}{\lambda^{n+1}} \right| \leq \frac{C|f^n(z)|^2}{\lambda^{n+1}} \leq \rho^n \frac{C|z|^2}{|\lambda|}$$

onde aqui temos que $\rho = \frac{(|\lambda| + C\delta)^2}{|\lambda|} < 1$ para δ pequeno.

Assim, a convergência das ϕ_n é uniforme para $|z| \leq \delta$.

Para concluir, é um exercício de mostrar que cada conjugação de $g(z) = \lambda z$ com a função g mesma tem que ser do tipo $z \mapsto Kz$. ■

Essa linearização local pode ser estendida para a bacia do atrator, mas a conjugação ϕ é somente analítica sem ser necessariamente biholomorfa:

Teorema 2.2 (Linearização global para um atrator). *Seja f definida e \mathbb{C} (por exemplo um polinômio) com um atrator em z_0 , de bacia \mathcal{B} e multiplicador λ . Então existe uma aplicação analítica $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\phi(z_0) = 0$ que semi-conjuga f com $z \mapsto \lambda z$.*

Caso do repulsor $|\lambda| > 1$: Localmente, a função f tem uma função inversa, tal que a origem é agora um atrator, então um repulsor tem também uma linearização local.

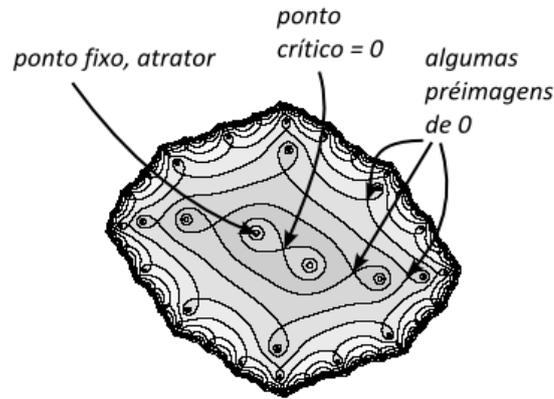


Figura 2.1: Linearização global dentro da bacia de um atrator

2.2.2 Super-atratores

Definição 2.3. Um ponto fixo z_0 de f é chamado um super-atrator se

$$f'(z_0) = 0.$$

Vamos começar com alguns exemplos de super-atratores:

Exemplo 1: $z_0 = -1$ para a aplicação de Newton $N(z) = \frac{z^2 + 1}{2z}$.

Exemplo 2: $z_0 = 0$ para $f(z) = z^2 + z^3$.

Exemplo 3: $z_0 = 0$ para a aplicação $g(z) = \frac{z^2}{1 + 0.24z^2}$

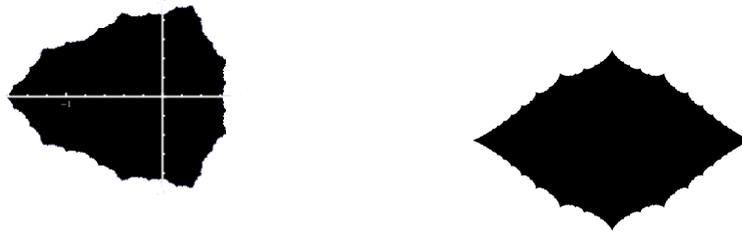
O seguinte lema mostra que super-atratores são muito comuns:

Lema 2.1. Seja $P_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio quadrático dado pela formula

$$P_c(z) = z^2 + c.$$

Então existe uma extensão $\widehat{P}_c : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de P_c na esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ tal que o ponto $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ é um super-atrator.

Demonstração: A mudança de variável $w = \frac{1}{z}$ manda ∞ até 0. Nessa nova variável, a aplicação é agora dada por



(a) $f(z) = z^2 + z^3$

(b) $g(z) = \frac{z^2}{1 + 0.24z^2}$

Figura 2.2: Exemplos de bacias super-atrativas em preto

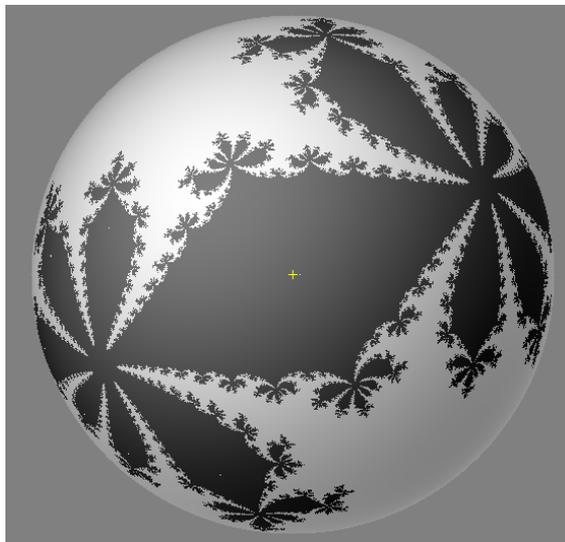


Figura 2.3: Polinômio na esfera de Riemann, com a bacia do infinito em cinza

mudança de variável:

$$\begin{array}{ccc}
 w & \longrightarrow & z = \frac{1}{w} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \frac{w^2}{1 + cw^2} & \longleftarrow & z^2 + c = \frac{1}{w^2} + c
 \end{array}$$

$$w \mapsto \frac{w^2}{1 + cw^2} = w^2(1 - cw^2 + \dots) = w^2 - cw^4 + \dots$$

Nessa expansão não tem um termo de grau 1, então $w = 0$ é um superatrator. ■

Agora é fácil ver que a bacia do ponto ∞ contém um disco aberto $D(\infty, R)$ de raio $R > 0$:

Lema 2.2. *Seja $P(z) = z^d + a_{d-2}z^{d-2} + \dots + a_0$. Então existe um $R > 0$ tal que $|z| > R \implies z_n \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Simplesmente temos que

$$P(z) = z^d \left(1 + \frac{a_{d-2}}{z^2} + \dots + \frac{a_0}{z^d} \right),$$

então $|P(z)| \geq |z|^{d \cdot \frac{1}{2}} > K \cdot |z|$ para um $K > 1$ e z grande. Por indução temos $|P^{(n)}(z)| \geq K^n \cdot |z|$ e o resultado é uma consequência imediata. A condição $a_{d-1} = 0$ pode ser sempre obtida depois de uma conjugação com uma função linear. ■

Coordenada de Böttcher. Vamos começar com o exemplo da função $P_{-2} : z \mapsto z^2 - 2$. Para z muito grande, P_{-2} age como $z \mapsto z^2$. Infelizmente não existe uma conjugação topológica entre as duas funções. Mas fora do segmento $[-2, 2]$ uma conjugação explícita deste tipo existe, chamada a *coordenada de Böttcher*:

Teorema 2.3. *Seja $K_{-2} := [-2, 2]$. Então a função $\phi(w) = z = w + \frac{1}{w}$ é uma aplicação biholomorfa de $\mathbb{C} - \bar{\mathbb{D}}$ até $\mathbb{C} - K_{-2}$ que conjuga $P_{-2} : z \mapsto z^2 - 2$ com $P_0 : w \mapsto w^2$.*

Demonstração: Verificar que ϕ é uma conjugação significa verificar a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} w & \xrightarrow{\phi} & z = w + 1/w \\ \downarrow & & \downarrow P_c \\ w^2 & \xrightarrow{\phi} & z^2 - 2 = (w + 1/w)^2 - 2 = w^2 + \frac{1}{w^2} \end{array}$$

Agora $z = w + \frac{1}{w}$ não é invertível em \mathbb{C} , mas podemos verificar que a restrição dessa aplicação a $\mathbb{C} - \bar{\mathbb{D}}$ é biholomorfa (cada etapa é um exercício no fim deste capítulo):

1. mostre que $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ é biholomorfa de $\mathbb{C} - \bar{\mathbb{D}}$ até $\{z; \Re(z) > 0\}$;
2. mostre $z \mapsto z^2$ é biholomorfa de $\{z; \Re(z) > 0\}$ até $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$;
3. mostre $z \mapsto \frac{2+2z}{1-z}$ é biholomorfa de $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ até $\mathbb{C} - [-2, 2]$.
4. mostre que a composição de todas essas aplicações é exatamente $z \mapsto z + \frac{1}{z}$.

Mais uma observação: a aplicação $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ é também biholomorfa de \mathbb{D} até $\mathbb{C} - [-2, 2]$. ■

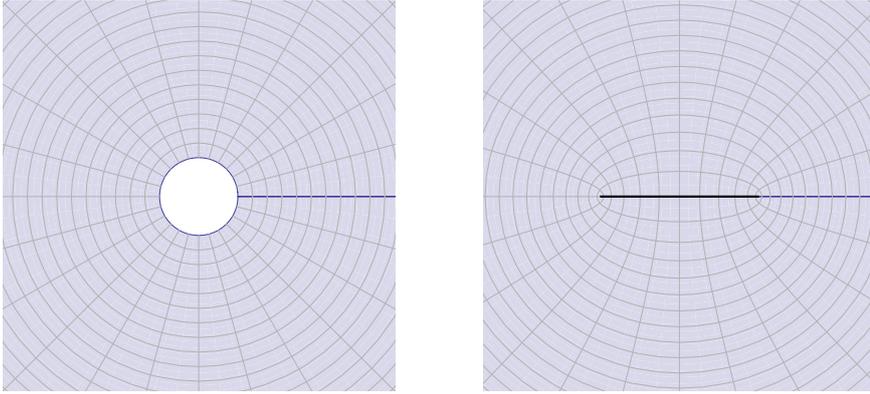


Figura 2.4: $\mathbb{C} - \bar{\mathbb{D}}$ e a imagem dele pela aplicação $z \mapsto z + \frac{1}{z}$

Na verdade, essa construção da coordenada de Böttcher pode ser feita de maneira muito mais geral, cada vez que tem um ponto fixo super-atrator:

Teorema 2.4 (Coordenada de Böttcher). *Seja $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots$ com $a_n \neq 0$ e $n \geq 2$. Então existe uma vizinhança U de 0 e uma conjugação local $\phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ que conjuga f com $w \mapsto w^n$. Essa conjugação ϕ é única a menos de uma multiplicação por uma raiz $(n-1)$ -ésima da unidade.*

Nós vamos demonstrar uma versão um pouco diferente deste teorema, mais adaptada à dinâmica polinomial:

Teorema 2.5. *Seja $P(z)$ um polinômio de grau $k \geq 2$. Então para R suficientemente grande, existe uma aplicação*

$$\phi : \{|z| > R\} \rightarrow \mathbb{C},$$

biholomorfa de $V := \{|z| > R\}$ até $\phi(V)$ tal que $\phi(P(z)) = (\phi(z))^k$. Essa aplicação é única a menos de uma multiplicação por uma raiz $(k-1)$ -ésima da unidade.

Demonstração: É fácil ver que para R grande temos que $P(V) \subset V$ e que $\psi(z) := \log \frac{P(z)}{z^k}$ é bem definida e limitada em V . Podemos então escrever $P(z)$ como $P(z) = z^k \cdot \exp \psi(z)$. Por indução temos que

$$P^n(z) = z^{k^n} \cdot \exp(k^{n-1}\psi(z) + \dots + \psi(P^{n-1}(z))).$$

Assim podemos definir um “ramo de $\sqrt[k^n]{P^n(z)}$ ”, simplesmente como

$$\phi_n(z) := z \cdot \exp\left(\frac{1}{k}\psi(z) + \dots + \frac{1}{k^n}\psi(P^{n-1}(z))\right).$$

Agora ψ é limitada em V então $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^j}\psi(P^{j-1}(z))$ converge uniformemente em V , então ϕ_n também converge uniformemente para um limite ϕ analítica em V . A equação funcional $\phi \circ P = \phi^k$ é consequência da seguinte equação, fácil de verificar:

$$\phi_n(P(z)) = (\phi_{n+1}(z))^k.$$

■

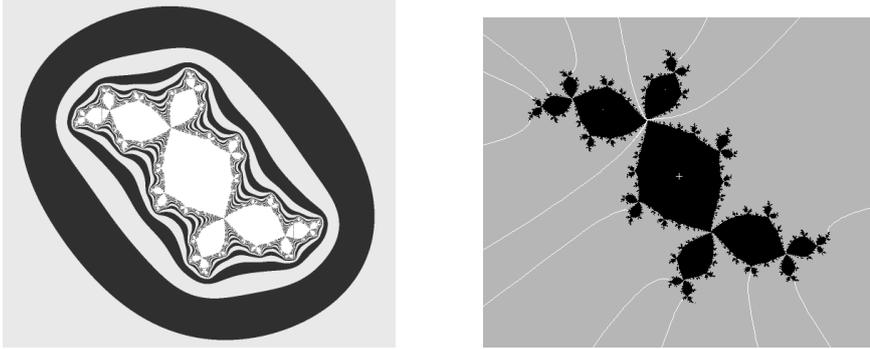


Figura 2.5: Equipotenciais $\phi^{-1}(|z| = R)$ e raios externos $\phi^{-1}(\arg(z) = \text{constante})$

Uniformização e coordenada de Böttcher. Seja P_c um polinômio quadrático tal que $K_c := \{z \in \mathbb{C}; \text{a órbita de } z \text{ é limitada}\}$ é conexo. Então a função de böttcher dá a uniformização da bacia do infinito, isto é uma aplicação de Riemann dessa bacia até o disco $\hat{\mathbb{C}} - \mathbb{D}$.

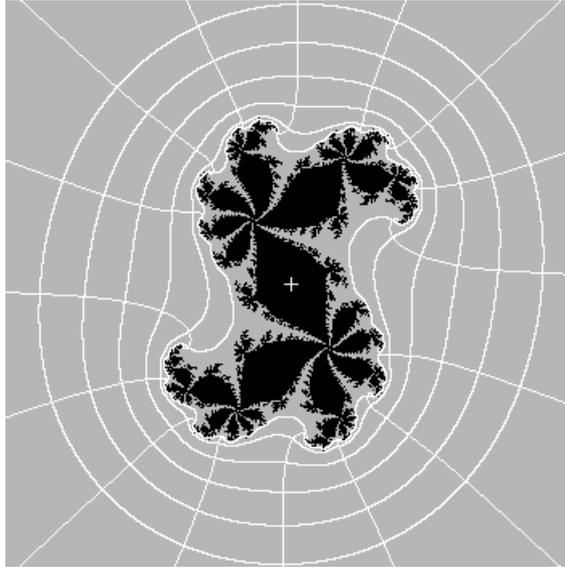


Figura 2.6: Um exemplo de uniformização da bacia do ∞

2.3 Pontos neutros

2.3.1 Pontos parabólicos.

Nessa seção, a função f é definida perto do ponto fixo $z_0 = 0$ e tem a seguinte expressão

$$f(z) = e^{2i\pi p/q}z + a_{r+1}z^{r+1} + a_{r+2}z^{r+2} + \dots$$

O caso mais simples é o caso do multiplicador $\lambda = 1$ (isto é $p/q = 0$). Nessa situação, podemos escrever a função f localmente como:

$$f(z) = z + az^{n+1} + O(z^{n+2}), \text{ onde } a \neq 0.$$

O inteiro $n + 1$ é chamado a *multiplicidade* do ponto fixo parabólico. É fácil ver que a função não pode ter uma conjugação com a identidade $z \mapsto z$. Podemos ver isso num exemplo simples de $f(z) = z(1 + 10z^3)$. A parte positiva do eixo real é invariante e tal que $f(r) > r$ para todo $r > 0$ (então 0 é repulsor nessa direção), mas na parte negativa, a origem é um atrator:

Direções atrativas

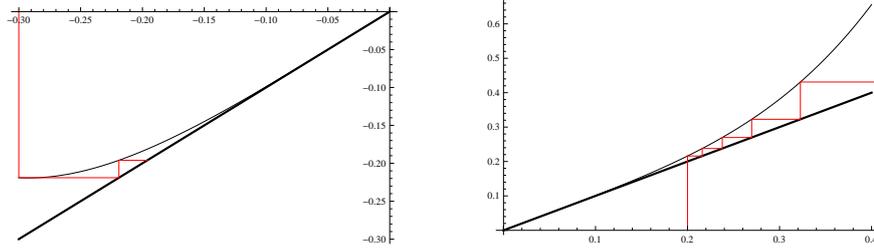


Figura 2.7: Direções atrativas e repulsivas para um ponto parabolico

Definição 2.4. *Seja*

$$f(z) = z + az^{r+1} + O(z^{r+2}), \text{ onde } a \neq 0.$$

Seja $v \in S^1$ um vetor unitário. Então v é chamado uma direção atrativa se av^r é real e negativo. E v é uma direção repulsiva se av^r é real e positivo.

A origem dessa noção é a seguinte: cada órbita $f^n(z)$ que tem limite igual ao ponto parabólico 0 é tal que a sequência das direções $\frac{f^n(z)}{|f^n(z)|}$ converge para uma das direções atrativas. A situação correspondente para as direções repulsivas pode ser obtida com o estudo de f^{-1} (que é bem definido perto de zero).

Definição 2.5. *Dada v uma direção atrativa para f . Uma **pétala atrativa** associada a v é um disco topológico P tal que*

1. $0 \in \partial P$;
2. f é injetora em P e $f(\overline{P} - \{0\}) \subset P$;
3. para todo $z \in P$, a órbita $f^n(z)$ converge para 0 na direção v ;
4. toda órbita $f^n(z)$ que converge para 0 na direção v tem que entrar em P .

As pétalas não são definidas de maneira única.

Um bom modelo para a dinâmica de $f(z) = z + z^{p+1} + \dots$ é aquele dado pelas trajetórias do campo (holomorfico) de vetores $z^{p+1} \frac{\partial}{\partial z}$.

As pétalas atrativas e repulsivas podem ser escolhidas de maneira a criar juntas uma boa vizinhança (isto é, um disco topológico) do ponto fixo parabólico: este resultado é chamado o teorema da Flor, de Leau e Fatou.

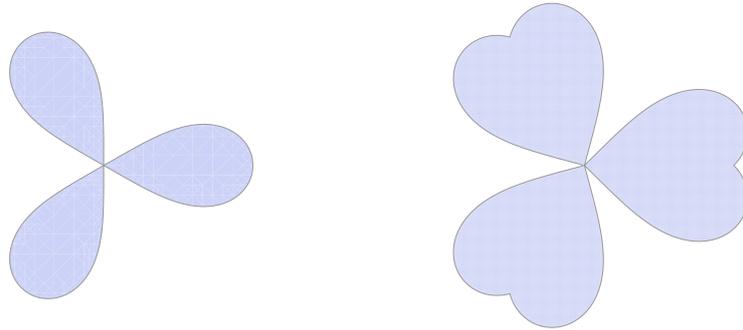


Figura 2.8: Dois exemplos de escolha de pétalas para a mesma função

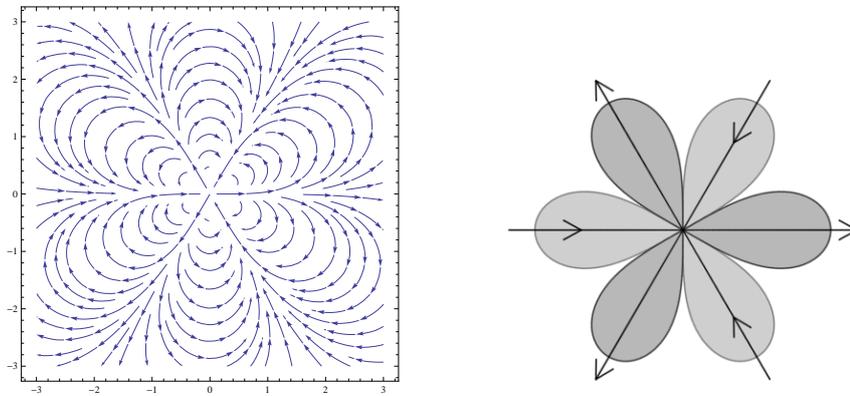


Figura 2.9: Dinâmica de $z^{p+1} \frac{\partial}{\partial z}$ e dinâmica numa vizinhança do ponto parabólico

Teorema 2.6 (Teorema da Flor de Leau-Fatou). *Seja z_0 um ponto parabólico de multiplicidade $n + 1 \geq 2$, então, dentro de cada vizinhança de z_0 , existe uma família P_j (com $1 \leq j \leq 2n$, mod $(2n)$) de pétalas simplesmente conexas, tais que P_j é atrativa para j ímpar (e repulsiva para j par). Essas pétalas podem ser escolhidas tais que a reunião*

$$\{z_0\} \cup P_0 \cup \dots \cup P_{2n-1}$$

é uma vizinhança de z_0 . Quando $n > 1$, cada P_j tem intersecção somente

com P_{j-1} e P_{j+1} e essas intersecções são simplesmente conexas.

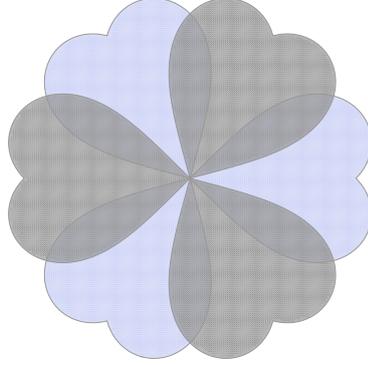


Figura 2.10: Teorema da Flor de Leau-Fatou

Dinâmica dentro de uma pétala. Dentro de cada pétala, existem coordenadas adaptadas, chamadas coordenadas de Fatou:

Teorema 2.7. Cada pétala P tem uma conjugação $\phi : P \rightarrow \mathbb{C}$, chamada **coordenada de Fatou** com $w \mapsto w+1$. Isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 P \cap f^{-1}(P) & \xrightarrow{f} & P \\
 \phi \downarrow & & \phi \downarrow \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow{w \mapsto w+1} & \mathbb{C}
 \end{array}$$

Caso geral: $\lambda = e^{2i\pi p/q}$. No caso geral de um multiplicador $\lambda = e^{2i\pi p/q}$, se f^q tem uma multiplicidade de $m+1$, então o número de pétalas atrativas (ou repulsivas) é $m = kq$ (para um inteiro k). A dinâmica geral é uma rotação nas pétalas de número de rotação combinatorial igual a $\frac{p}{q}$.

2.3.2 Ponto neutro irracional

Quando $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ com θ irracional, a situação é muito mais complicada e não podemos dar muita informação aqui. Os pontos fixos que possuem uma

conjugação com $z \mapsto \lambda z$ são chamados *pontos de Siegel*. O maior conjunto onde existe uma conjugação é chamada um *disco de Siegel*.

Os outros pontos são chamados *pontos de Cremer*.

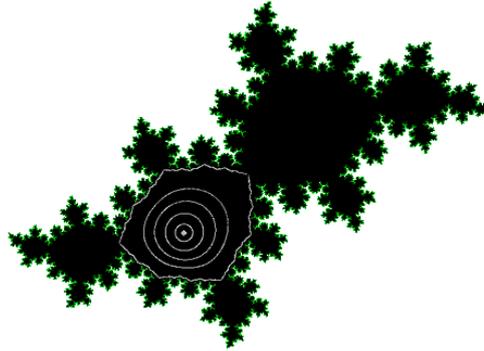


Figura 2.11: Disco de Siegel

Exercícios

Exercício 2.1. *Seja f uma função analítica não constante, definida perto da origem. Mostrar a existência de dois biholomorfismos locais $w = g(z)$ e $u = h(z)$ tais que $h \circ f \circ g^{-1}(w) = w^k$. Isto é, a forma local de uma aplicação f é sempre simples.*

Exercício 2.2. *Mostre que cada conjugação de $g(z) = \lambda z$ com g mesma tem que ser do tipo $z \mapsto K.z$, para uma constante K .*

Exercício 2.3. *Da um exemplo de função analítica que tem no mesmo tempo um super-atrator e um repulsor.*

Exercício 2.4. *Determine todas as aplicações $g(z)$ definidas perto de 0 tais que g comuta com $z \mapsto z^d$ (com $d > 1$).*

Exercício 2.5. *Seja $P_3(z) = z^3 - 3z$. Mostre que $P_3(w + w^{-1}) = w^3 + w^{-3}$.*

Exercício 2.6. *Determine a imagem de $|z| > 1$ pela aplicação $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$.*

Exercício 2.7. *Determine o grau da aplicação $z \mapsto z + \frac{1}{z}$, vista como uma aplicação $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.*

Exercício 2.8. *Prove o teorema de linearização global para um atrator.*

Exercício 2.9. *Mostre que não existe uma conjugação topológica entre $P_{-2} : z \mapsto z^2 - 2$ e $P_0 : z \mapsto z^2$.*

Exercício 2.10. *Que tipo de ponto fixo tem a função $z \mapsto z^3$ em $z_0 = 1$?*

Exercício 2.11. *1. Mostre que $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ é biholomorfa de $\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$ até $\{z; \Re(z) > 0\}$;*

2. mostre $z \mapsto z^2$ é biholomorfa de $\{z; \Re(z) > 0\}$ até $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$;

3. mostre $z \mapsto \frac{2+2z}{1-z}$ é biholomorfa de $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$ até $\mathbb{C} - [-2, 2]$.

4. mostre que a composição de todas essas aplicações é exatamente $z \mapsto z + \frac{1}{z}$.

Exercício 2.12. *Mostre que a aplicação $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ é biholomorfa de \mathbb{D} até $\mathbb{C} - [-2, 2]$.*

Capítulo 3

Dinâmica global

3.1 Conjuntos de Julia e de Fatou

A noção de conjunto cheio de Julia é bem adaptada para a dinâmica dos polinômios, mas tem que ser estendida para tratar também da dinâmica das aplicações racionais.

Definição 3.1. *Uma família \mathcal{F} de aplicações holomorfas num domínio $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ é **normal** se cada sequência infinita de elementos de \mathcal{F} contém uma subsequência que converge uniformemente em todos os compactos de U .*

De maneira geral, a verificação da normalidade de uma família é feita com o teorema de Montel:

Teorema 3.1. *Seja \mathcal{F} uma família de aplicações holomorfas num domínio $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$. Suponhamos que existem três pontos distintos $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ tais que $f(U) \subset \widehat{\mathbb{C}} - \{a, b, c\}$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Então \mathcal{F} é uma família normal.*

Com a noção de normalidade aplicada às iterações de uma função analítica, podemos finalmente definir de maneira geral os conjuntos de Fatou e de Julia:

Definição 3.2. *Dada uma função holomorfa f , o **conjunto de Fatou de f** é definido como:*

$$F_f := \{z \in \widehat{\mathbb{C}}; \{f^n\}_n \text{ é uma família normal numa vizinhança de } z\}.$$

*E o complemento de F é o **conjunto de Julia J_f** .*

Sullivan mostrou que para uma aplicação racional, uma componente periódica do conjunto de Fatou tem que ser de um tipo bem definido, dentro de uma lista de cinco possibilidades:

Teorema 3.2 (Sullivan). *Uma componente U periódica de período p do conjunto de Fatou de uma aplicação racional pode ser somente de um tipo na seguinte lista:*

1. *uma bacia atrativa;*
2. *uma bacia super-atrativa;*
3. *uma bacia parabólica: isto é, existe um $x_0 \in \partial U$ tal que $(f^p)'(x_0) = 1$ e todos os pontos de U convergem para x_0 ;*
4. *um disco de Siegel;*
5. *um anel de Herman: U é homeomorfo a um anel, e f^p age como uma rotação irracional neste anel.*

Nessa lista, somente o ultimo caso é novo: na verdade, é possível mostrar que polinômios nunca possuem anéis de Herman. No resto do capítulo, nós vamos concentrar na dinâmica da família quadrática, que já é extremamente rica.

3.2 A família quadrática

A família de funções mais importante neste curso é a família quadrática:

$$f_c : z \mapsto z^2 + c,$$

onde $c \in \mathbb{C}$ é um parâmetro complexo. Na verdade essa maneira de escrever um polinômio quadrático tem nada de particular:

Lema 3.1. *Seja $T(z) = az^2 + 2bz + d$ um polinômio quadrático. Então a função $S(z) = az + b$ conjugua $T(z)$ com*

$$f_c(z) = z^2 + c,$$

onde $c = ad + b - b^2$.

Demonstração: Temos simplesmente que verificar a igualdade:

$$f_c \circ S = S \circ T.$$

■

Exemplo fundamental: a aplicação $f_0 : z \mapsto z^2$. A dinâmica é bem mais simples aqui, mas vai servir de modelo para uma coleção muito grande de outros exemplos. Podemos escrever $z = re^{i\theta}$, e obter $f^{on}(z) = r^{2^n} e^{i2^n\theta}$. Então $r > 1 \Rightarrow f^{on}(z) \rightarrow \infty$, e $r < 1 \Rightarrow f^{on}(z) \rightarrow 0$. No círculo $r = |z| = 1$, a aplicação é conjugada com $S(\theta) = 2\theta \pmod{1}$. É comum escrever o ângulo $\theta \in S^1 := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ na expansão 2-adica, por exemplo:

$$\theta = 0.0100100011 \dots \mapsto S(\theta) = 0.100100011 \dots$$

Isto é, a aplicação S é o "shift" (também chamada "aplicação deslocamento"): a ação dela é de mover o ponto decimal de um lugar para a direita, e colocar um zero na parte inteira.

Uma idéia fundamental de Thurston é que mais ou menos todos os conjuntos cheios de Julia (que são conexos, localmente conexos) são como o disco, *apertado* em alguns pontos do bordo, indicados pelo ângulo associado $\theta \in S^1 = \partial\mathbb{D}$.

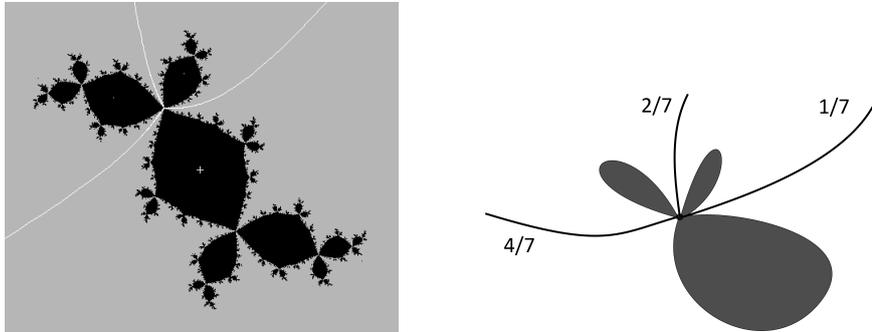


Figura 3.1: Apertando um disco, nos ângulos $1/7, 2/7, 4/7$

Por isso, a primeira questão é de saber quando um conjunto cheio de Julia é conexo. O seguinte teorema de Douady e Hubbard mostra que a resposta depende somente da iteração do ponto crítico (na família quadrática, somente 0 é crítico).

Teorema 3.3 (Douady-Hubbard). *Seja f um polinômio de grau $d \geq 2$. Se o conjunto de Julia cheio contém todos os pontos críticos finitos de f , então, os dois conjuntos K e $J = \partial K$ são conexos e o complemento de K é isomorfo à $\mathbb{C} - \bar{\mathbb{D}}$ sob um isomorfismo*

$$\hat{\phi} : \mathbb{C} - K \rightarrow \mathbb{C} - \bar{\mathbb{D}},$$

tal que

$$\hat{\phi} \circ f(z) = \phi(z)^d.$$

Quando, pelo menos, um ponto crítico de f pertence a $\mathbb{C} - K$, então K e J têm um número de componentes conexos não enumerável.

Na próxima seção, nós vamos descrever com mais detalhes essa descrição topológica dos conjuntos de Julia.

3.3 Conjuntos de Julia e discos apertados

Conjuntos cheios de Julia. Lembra que o conjunto cheio de Julia K_c para $P_c : z \mapsto z^2 + c$ é definido como

$$K_c := \{z \in \mathbb{C}; \text{ a órbita de } z \text{ é limitada}\}.$$

A ideia de Thurston é de definir no disco uma relação de equivalência entre pontos no bordo, e depois tomar o quociente do disco pela relação, isto é *apertando o disco*.

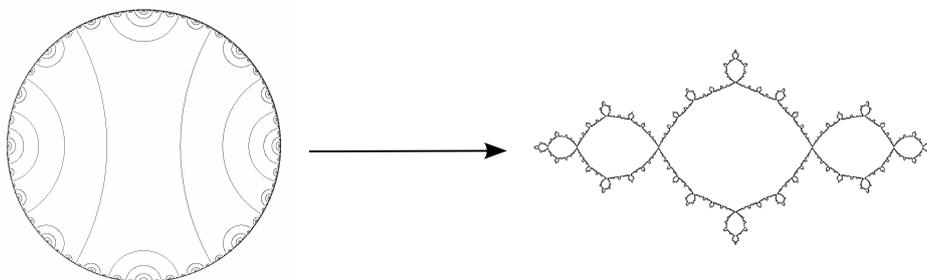


Figura 3.2: Apertar um disco ao longo de uma laminação para criar um conjunto de Julia

As etapas da construção de Thurston são as seguintes:

1. **Primeira etapa :** definir uma relação de equivalência \sim no círculo $\mathbf{T} \subset \mathbb{D}$ tal que:
 - (a) o gráfico de \sim em $\mathbf{T} \times \mathbf{T}$ é fechado;
 - (b) A relação \sim determina uma *laminação*, i.e classes de equivalência distintas c_1 e c_2 têm fechos convexos (no disco de Poincaré) disjuntos.
2. **Segunda etapa :** Estender a relação de equivalência numa relação \simeq definida no disco \mathbb{D} : as classes de equivalência são os fechos convexos (na geometria de Poincaré) das classes de equivalência de \sim , ou são os

pontos de $\overline{\mathbb{D}} - L$, onde L é a reunião dos fechos convexos das classes de \sim .

3. **Terceira etapa:** formar o quociente $\overline{\mathbb{D}}/\simeq$. O resultado é chamado o *disco apertado* associado à \sim .

A utilidade dessa construção geral vem do fato de que ela permite construir modelos para os conjuntos de Julia cheio (conexos e localmente conexos, ver (Douady, 1993)):

Teorema 3.4 (Douady). *Seja $K \subset \mathbb{C}$ um compacto conexo, com complemento conexo, e localmente conexo. Então existe um homeomorfismo de K com um disco apertado.*

Carathéodory mostrou que para um compacto com as propriedades acima, a aplicação de Riemann $\gamma : \mathbb{D} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} - K$ do complemento tem uma extensão contínua até o bordo $\gamma : S^1 \rightarrow \partial K$. Assim podemos definir uma relação de equivalência com $t \sim t'$ se e somente se $\gamma(t) = \gamma(t')$.

A laminação geodésica que aparece na descrição de um conjunto de Julia cheio K_c (para $P_c : z \mapsto z^2 + c$) é invariante sob duplicação do ângulo $\theta \mapsto 2\theta \pmod{1}$.

Transição de um disco até um disco apertado: A transição (topológica) de um disco até um disco apertado acontece na família quadrática quando o parâmetro c vai da cardioide \mathcal{H} (i.e a componente hiperbólica do conjunto de Mandelbrot, que é composta de todos os parâmetros $c \in \mathbb{C}$ tais que P_c tem um ponto fixo atrativo), até qualquer outra componente hiperbólica.

3.4 Quebra-cabeça de Yoccoz

Uma outra consequência muito útil da existência da coordenada de Böttcher ϕ é a construção de uma partição dinâmica, o *quebra-cabeça de Yoccoz*. As peças são simples, delimitadas por pedaços de equipotenciais ($|\phi| = \text{constante}$) e raios externos ($\arg(\phi) = \text{constante}$). A equação funcional da função de Böttcher, $\phi \circ P = \phi^2$ diz que P manda um raio externo de ângulo $t \in S^1$ para o raio de ângulo $2t$, e manda uma equipotencial $|\phi| = R$ para a equipotencial $|\phi| = R^2$.

Nível 0 do quebra-cabeça: Seja P_c um polinômio quadrático com conjunto cheio de Julia conexo, com um ponto fixo repulsor α (que seja distinto do raio externo de ângulo 0). Sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ os raios externos que possuem α como intersecção. Seja D a componente limitada do complemento em \mathbb{C}

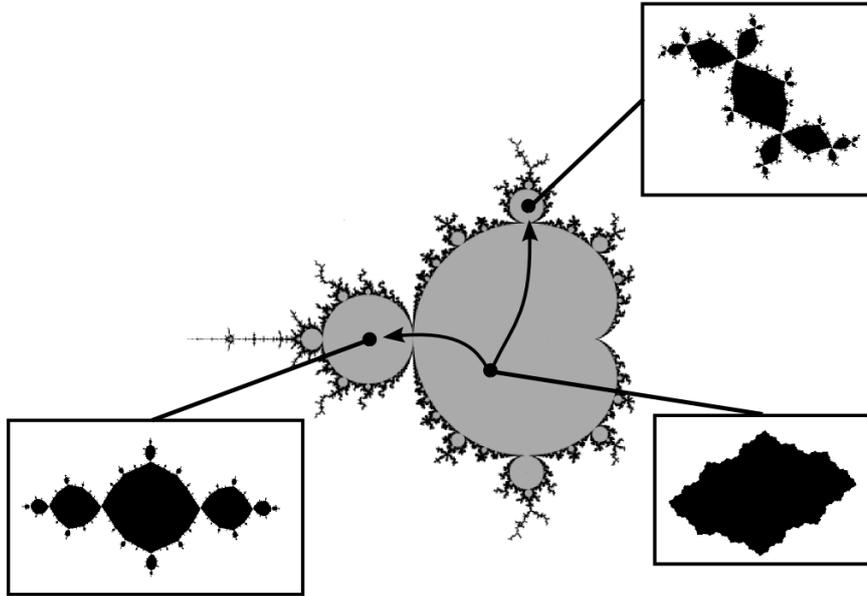


Figura 3.3: Deformações de K_c : de um disco até um disco apertado

de uma equipotencial $|\phi| = R$ (para $R > 1$). Então as peças do nível 0, são as componentes conexas de $D - \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$.

Nível 1 do quebra-cabeça: Tomando a pre-imagem da equipotencial $|\phi| = R$, e as preimagens dos raios externos γ_i podemos definir as peças do nível seguinte, e continuar assim para todos os níveis. O fato fundamental é que a aplicação P manda peças sobre peças (com um grau que pode ser maior do que 1), definindo assim uma partição dinâmica.

As cores das peças foram escolhidas aqui para sugerir que uma peça cinza vai até uma peça mais escura. O nível 0 contém três peças.

Na figura do nível 1, as peças com um tom de cinza são as pre-imagens da peça do nível 0 com o mesmo tom.

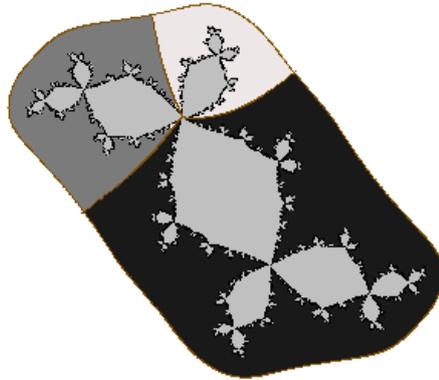


Figura 3.4: Quebra-cabeça, nível 0

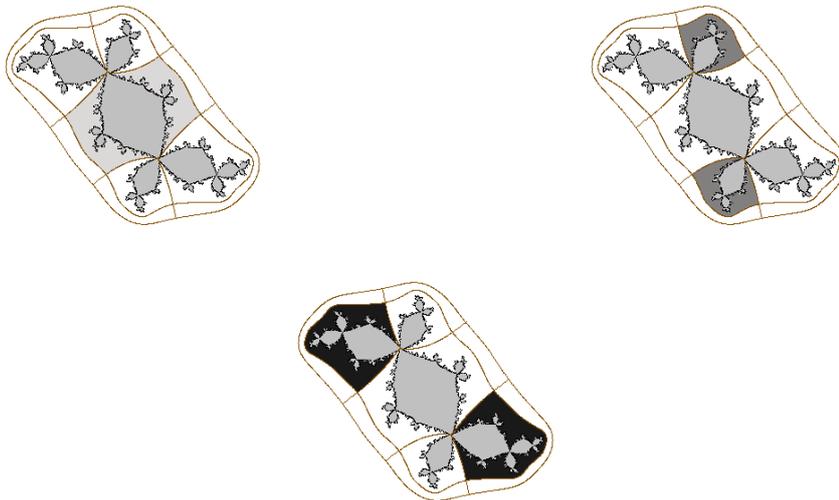


Figura 3.5: Nível 1 do quebra-cabeça

Exercícios

Exercício 3.1. 1. *Mostre que um polinômio quadrático tem também uma outra forma normal $z \mapsto az(1-z)$ (mais utilizada para aplicações reais*

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

2. Mostre que um polinômio cúbico pode ser conjugado com $f_{a,b}(z) = z^3 - 3a^2z + b$.

Essa maneira de escrever o polinômio cúbico tem uma simetria interessante: os pontos críticos (i.e onde a derivada é zero) são $a, -a$.

Exercício 3.2. Dar um exemplo de ponto θ no círculo que tem uma **órbita densa**, i.e para qualquer intervalo aberto $I \subset S^1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^{on}(\theta) \in I$. **Dica:** Um θ que vai certamente visitar os intervalos $I_1 = 0,00\star, I_2 = 0,01\star, I_3 = 0,10\star, I_4 = 0,11\star$ seria $\theta = 0,|00|01|10|11|\dots$.

Exercício 3.3. Polinômios de Tchebychev.

1. Mostre que $P(z) = 2z^2 - 1$ satisfaz $P(\cos z) = \cos(2z)$.

2. Mostre que $M : z \mapsto \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ satisfaz $M(z^2) = P \circ M(z)$.

3. Mostre que a imagem do círculo $|z| = 1$ pela aplicação M é o segmento $[-1, 1]$.

Capítulo 4

O conjunto de Mandelbrot \mathcal{M}

4.1 Propriedades básicas

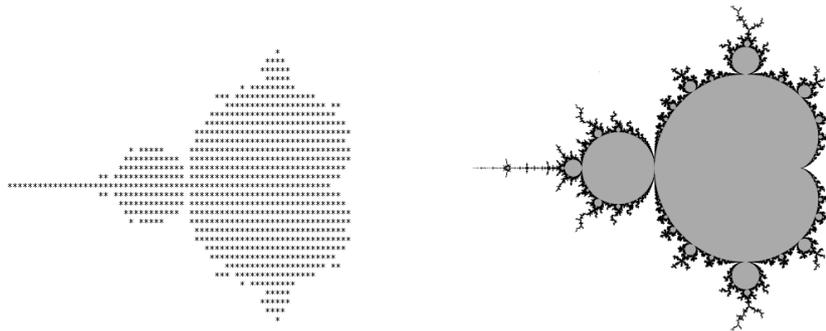


Figura 4.1: O conjunto de Mandelbrot em 1978 e hoje

Nessa seção nós descrevemos o conjunto de Mandelbrot e o avanço fundamental feito por Adrien Douady e John Hamal Hubbard em 1982, quando eles mostraram que este conjunto de Mandelbrot é conexo (ver (Douady e Hubbard, 1985)). A introdução de (Tan, 2000) explica em detalhes a história do conjunto de Mandelbrot.

O conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} pode ser definido como

$$\mathcal{M} := \{c \in \mathbb{C} \mid \text{a órbita de } 0 \text{ sob iteração de } P_c \text{ é limitada}\}.$$

\mathcal{M} pode também se definido como o conjunto de todos os $c \in \mathbb{C}$ tais que K_c é conexo.

Teorema 4.1. *O conjunto de Mandelbrot é um compacto contido em $\{|z| \leq 2\}$.*

Demonstração: Para $|c| > 2$, $|P_c^2(0)| \geq |c| \cdot (|c| - 1)$ e por indução

$$|P_c^{n+1}(0)| \geq (|c|(|c| - 1)^{2^{n-2}})^2 - |c| \geq |c|(|c| - 1)^{2^{n-1}} \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Assim, $c \in \mathcal{M}$ se e somente se $|P_c^n(0)| \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas isso significa que \mathcal{M} é um conjunto fechado em $\{|z| \leq 2\}$. ■

Antes de demonstrar a conexidade, nós vamos precisar de alguns lemas.

Lema 4.1. *Seja ϕ_c a função de Böttcher associada a P_c perto de ∞ . Então a função $G_c(z) := \log |\phi_c(z)|$ pode ser estendida até \mathbb{C} e pode ser escrita como*

$$G_c(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log^+ |P_c^n(z)|,$$

onde $\log^+ |z| = \max\{\log |z|, 0\}$.

Demonstração: Para $z \in K_c$, $\log^+ |P_c^n(z)|$ é limitada, então o limite de $\frac{1}{2^n} \log^+ |P_c^n(z)|$ é 0. Para $z \notin K_c$, o lema é uma consequência da equação funcional da função de Böttcher. ■

Lema 4.2. *A função $G_c(z)$ é contínua como função de (z, c) .*

Demonstração: Para $|z| \leq K$ temos

$$|\log^+ |P_c^n(z)| - 2 \log^+ |z|| \leq |P_c(z) - z^2| = |c| \leq K,$$

cuja consequência é

$$\left| \frac{1}{2^n} \log^+ |P_c^n(z)| - \frac{1}{2^{n-1}} \log^+ |P_c^{n-1}(z)| \right| \leq \frac{K}{2^n}.$$

Então a convergência é uniforme no conjunto $\{(z, c); |c| \leq K\}$. ■

Lema 4.3. *O conjunto*

$$U := \{(z, c) \in \mathbb{C}^2; G_c(z) > G_c(0)\}$$

é aberto e $\phi_c(z)$ é analítica em (z, c) em U .

Demonstração: A continuidade de $G_c(z)$ em (z, c) mostra que U é aberto. Agora a representação de ϕ_c como um produto infinito

$$\phi_c(z) = z \cdot \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{P_c^n(z)^2}\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}},$$

mostra que a convergência uniforme deste produto resulta da convergência uniforme obtido pela função $G_c(z)$. ■

4.2 Topologia de \mathcal{M}

No seguinte teorema, nós vamos precisar somente do caso $c \notin \mathcal{M}$.

Teorema 4.2. *Seja $U_c := \{z \in \mathbb{C} | G_c(z) > G_c(0)\}$. Então a aplicação de Böttcher ϕ_c tem uma extensão analítica que é um isomorfismo*

$$\phi_c : U_c \rightarrow \left\{z \in \mathbb{C}; |z| > e^{G_c(0)}\right\}$$

Se $c \in \mathcal{M}$, então ϕ_c tem uma extensão que é um isomorfismo

$$\mathbb{C} - K_c \rightarrow \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}.$$

Se $c \notin \mathcal{M}$, então $c \in U_c$ e podemos definir uma aplicação $\Phi : \mathbb{C} - \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ com

$$\Phi(c) := \phi_c(c).$$

Teorema 4.3 (Douady-Hubbard). *A aplicação Φ é um isomorfismo $\mathbb{C} - \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}}$. Em particular, o conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} é conexo.*

Demonstração: A demonstração contém as seguintes etapas:

1. Φ é analítica em $\mathbb{C} - \mathcal{M}$: nós sabemos já que $(z, c) \mapsto \phi_c(z)$ é analítica em (z, c) .

2. Φ pode ser estendida até $\widehat{\mathbb{C}} - \mathcal{M}$: Temos que

$$\frac{\Phi(c)}{c} = \left(1 + \frac{c}{c^2}\right)^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{c}{c^2 + c}\right)^{1/4} \cdots \left(1 + \frac{c}{(P_c^n(c))^2} \cdots\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

então $\frac{\Phi(c)}{c} \rightarrow 1$ e podemos estender com $\Phi(\infty) = \infty$.

3. **A extensão é própria:** Utilizando $\log |\Phi(c)| = G_c(c) \rightarrow G_{c_0}(c_0) = 0$ quando $c \rightarrow c_0 \in \partial\mathcal{M}$, podemos deduzir que $|\Phi(c)| \rightarrow 1$ quando $c \rightarrow c_0$. Agora, se Φ não é própria, existe um compacto $K \subset (\mathbb{C} - \overline{\mathbb{D}})$ tal que $\Phi^{-1}(K)$ não é compacto. Mas isso significa que existe uma sequência $c_n \in \Phi^{-1}(M)$ tal que $c_n \rightarrow c_0 \in \mathcal{M}$, isto é, tal que $|\Phi(c_n)| \rightarrow 1$. Isto é uma contradição.
4. Φ é **aberta**: (isto é, a imagem de qualquer aberto é um aberto). Mas isto é verdadeiro para qualquer aplicação analítica não constante.
5. Φ é **fechada**: (isto é a imagem de qualquer fechado é fechada). Isto é uma consequência do fato que ϕ é própria.
6. Φ é **sobrejetiva**: porque a imagem é um conjunto aberto, fechado, e não vazio num conjunto conexo (então a imagem é o espaço inteiro).
7. Φ **tem um grau constante**: porque uma aplicação analítica e própria tem um grau bem definido (e este grau é constante porque $\mathbb{C} - \mathbb{D}$ é conexo).
8. **O grau de Φ é 1**: porque perto de ∞ , $\Phi(c) \sim c$, então Φ pode ser estendida até a esfera de Riemann inteira $\widehat{\mathbb{C}}$. O grau local perto de ∞ é 1, então o grau global também é um, e Φ é um isomorfismo.

■

4.3 Um modelo para \mathcal{M}

O teorema de Douady e Hubbard tem a propriedade notável que o conjunto $\widehat{\mathbb{C}} - \mathcal{M}$ tem uma *aplicação de Riemann* explícita, igual a $\frac{1}{\Phi}$.

A conjectura principal na dinâmica complexa em \mathbb{C} é de saber se a função $(\frac{1}{\Phi})^{-1}$ pode ser estendida numa aplicação contínua em $\overline{\mathbb{D}}$. Essa extensão existe se e somente se \mathcal{M} é localmente conexo. Essa conjectura muito famosa tem o nome de **conjectura MLC**. Suponhamos que *MLC* é verdadeira: então o conjunto de Mandelbrot pode ser descrito como um *disco apertado*.

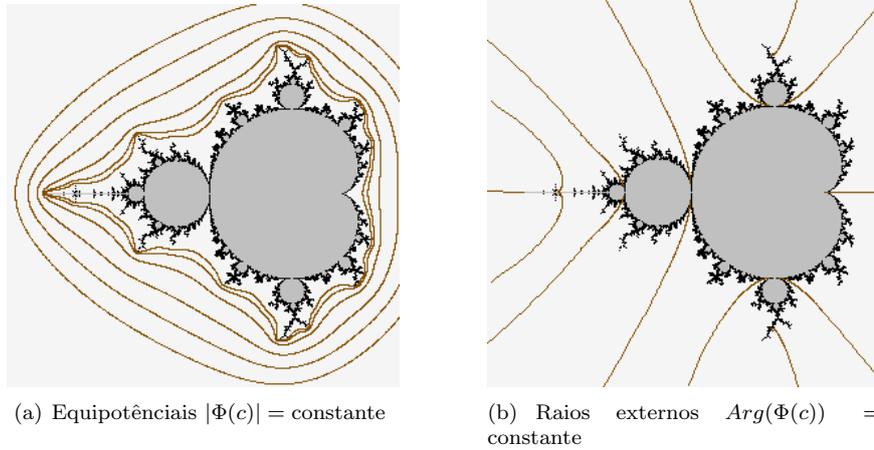


Figura 4.2: A aplicação de Riemann para $\mathbb{C} - \mathcal{M}$

A descrição da laminação do disco a ser apertada é muito simples. Ela é feita através do algoritmo de Lavaurs: **Algoritmo de Lavaurs:**

1. Conectar com uma geodésica os pontos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.
2. Suponhamos que todos os pontos no círculo de período $< k$ (sob iteração de $\theta \mapsto 2\theta \pmod{1}$) foram conectados. Conectar todos os pontos de período k , começando com o primeiro não conectado. Cada um vai ser conectado com o seguinte ponto (na ordem positiva) não conectado, sem atravessar uma geodésica anterior.

É um fato incrível de ver um conjunto tão complicado ter uma descrição tão simples!

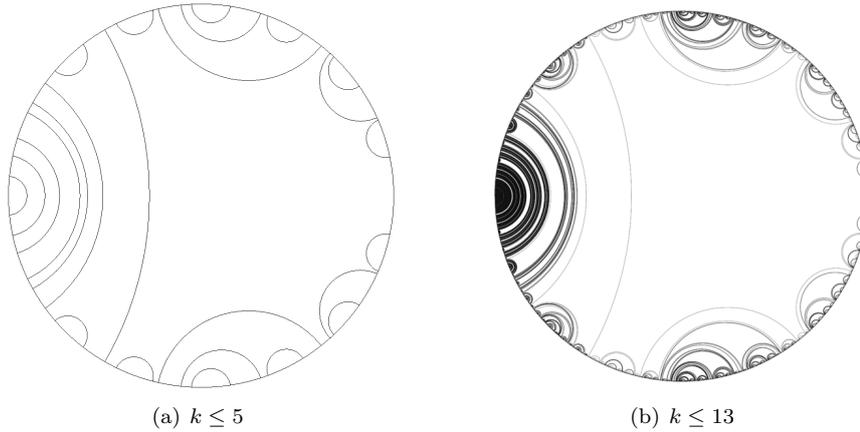


Figura 4.3: Duas etapas no algoritmo de Lavaurs

Exercícios

Exercício 4.1. Descrever o conjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ de todos os parâmetros $c \in \mathbb{C}$ tais que $P_c : z \mapsto z^2 + c$ tem um atrator. Mostrar que a fronteira deste conjunto é uma cardioide de equação paramétrica

$$c = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}.$$

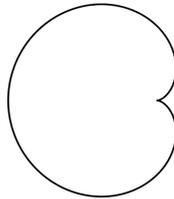


Figura 4.4: A cardioide $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$

Exercício 4.2. Mostrar que P_c tem um 2-ciclo atrator se e somente se c é dentro do disco

$$D := \{c \in \mathbb{C}; |4c + 4| < 1\}.$$

Mostrar que este disco é tangente a \mathcal{C} .

Exercício 4.3. *Quais são os parâmetros c_i tais que P_{c_i} tem um ciclo superatrativo de período 3?*

Exercício 4.4. *Mostrar que $\mathbb{C} - \mathcal{M}$ é conexo.*

Exercício 4.5. *O objetivo é de mostrar que $\mathcal{M} \cap \mathbb{R} = [-2, 1/4]$.*

1. *Para $c > 1/4$, mostrar que $P_c(x) = x$ não tem soluções e que $F_c^n(0)$ não tem pontos de acumulação.*
2. *Para $c < -2$, mostrar que $c \notin \mathcal{M}$.*
3. *Para $c \in [-2, 1/4]$, mostrar que*

$$|F_c^n(0)| \leq a,$$

onde a é a maior raiz de $x^2 - x + c = 0$.

Exercício 4.6. *Desenhar os quocientes da esfera obtidos depois de apertar as laminações no algoritmo de Lavaurs, para um denominador $n \leq 15$.*

Capítulo 5

Dinâmica em \mathbb{C}^2

5.1 Funções holomorfas em \mathbb{C}^n

Sejam n variáveis complexas $z_k = x_k + iy_k$. Como em dimensão um, podemos utilizar as variáveis z_k e \bar{z}_k para escrever a diferencial de uma função f de classe C^1 :

$$df = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \right).$$

Definição 5.1. Uma função $f(z_1, \dots, z_n)$ definida num aberto U de \mathbb{C}^n é holomorfa se e somente se f é de classe C^1 e a diferencial df é igual a

$$df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k.$$

Uma observação simples é que f é necessariamente holomorfa em cada variável separadamente. Na verdade, uma função holomorfa em cada variável separadamente é holomorfa (mas a demonstração é mais difícil).

Muitos resultados da dimensão têm uma extensão, por exemplo a teoria de Cauchy.

Formula de Cauchy.

Teorema 5.1. Seja $f(z_1, z_2)$ uma função contínua no produto dos discos

$$|z_1| < \rho_1, \quad |z_2| < \rho_2$$

e holomorfa em cada variável separadamente. Então para

$$|z_k| < r_k < \rho_k \quad (k = 1, 2),$$

temos

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{f(w_1, w_2) dw_1 dw_2}{(w_1 - z_1)(w_2 - z_2)},$$

onde C_k ($k = 1, 2$) é o círculo $|w_k| = r_k$.

Expansão de uma função holomorfa .

Teorema 5.2. Uma função f holomorfa no produto U dos discos

$$|z_1| < \rho_1, \quad |z_2| < \rho_2$$

tem uma expansão convergente em U dada por

$$f(z_1, z_2) = \sum_{p, q \geq 0} a_{p, q} z_1^p z_2^q.$$

Muitos outros resultados da dimensão um ficam verdadeiros, como o princípio do máximo, o teorema da identidade, o teorema de Liouville. Mas alguns não possuem um equivalente. Por exemplo, o seguinte teorema mostra que o teorema da aplicação de Riemann não é verdadeiro em \mathbb{C}^2 :

Teorema 5.3. O polidisco $\{|z_1| < 1\} \times \{|z_2| < 1\}$ e a bola $B := \{z \in \mathbb{C}^2; \|z\| < 1\}$ não são biholomorfos.

A dimensão 2 tem outras particularidades:

5.2 Possibilidades

Em dimensão complexa maior que 2, há muitas possibilidades de estudo, como por exemplo:

- Endomorfismos polinomiais: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 + x \cdot y + 4 \\ 3x^2 y \end{pmatrix}$
- Funções analíticas em produtos $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, ou $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, ...
- Automorfismos polinomiais: exemplo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} P(x) - ay \\ x \end{pmatrix}$ ("Aplicação de Hénon complexa").

A lista é imensa, e todos esses exemplos são interessantes. Para mais detalhes, ver (Morosawa et al., 2000). Neste curso, vamos concentrar numa família de exemplos muito rica e que pode ser considerada como uma generalização da família quadrática: as *aplicações de Hénon complexas*, que são do tipo:

$$H_{P,c} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mapsto \begin{pmatrix} P(x) - ay \\ x \end{pmatrix}, \text{ onde } P(x) \in \mathbb{C}[X] \text{ e } a \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Depois de uma conjugação por uma aplicação linear, podemos reescrever uma aplicação de Hénon complexa como $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mapsto \begin{pmatrix} P(x)+by \\ bx \end{pmatrix}$. Assim, tomando $b = 0$, é bem claro que essas aplicações são generalizações das funções da família quadrática $P_c : z \mapsto z^2 + c$.

5.3 Particularidades da dimensão 2: domínios de Fatou-Bieberbach

Nessa parte, nós descrevemos uma diferença importante entre as dinâmicas complexas em dimensão 1 e 2.

Atratores e linearização em dimensão 1: Lembra que uma função f com uma expansão

$$f(z) = z(\lambda + O(z)) \quad \text{com } 0 < |\lambda| < 1$$

é tal que, existe uma conjugação perto de 0:

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1}(z) = \lambda z.$$

Isso significa que f é conjugada com a parte linear da aplicação.

Atratores e linearização em dimensão 2: Agora a situação em dimensão 2 é bem mais complicada. Vamos supor

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

onde

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix} \quad \text{com } 0 < |\lambda| \leq |\mu| < 1$$

e $\left| h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \leq C(|x|^2 + |y|^2)$ para uma constante C . Então f não é sempre conjugada com a parte linear: por exemplo $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ y/4 + x^2 \end{pmatrix}$ (exemplo dado por J. Hubbard).

Caso onde $0 < |\mu|^2 < |\lambda| < |\mu| < 1$.

Teorema 5.4. *Suponhamos que a parte linear $L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix}$ de f é tal que*

$$0 < |\mu|^2 < |\lambda| < |\mu| < 1$$

Então existe uma conjugação local ϕ de f com L , isto é, tal que $L \circ \phi = \phi \circ f$.

Demonstração: Eu aprendi a seguinte demonstração de J. Hubbard.

Vamos escrever $\phi_n = L^{-n} \circ f^{\circ n}$, e estudar a convergência através da série $\phi_{n+1} - \phi_n$. Podemos observar

$$\phi_{n+1} - \phi_n = L^{-(n+1)} \circ h \circ f^{\circ n}.$$

Agora, nós escolhemos $\epsilon > 0$ muito pequeno, tal que $(|\mu| + \epsilon)^2 < |\lambda|$, e $\rho > 0$ pequeno tal que existe um C que satisfaz

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| < \rho &\Rightarrow \left| f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \leq (|\mu| + \epsilon) \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \\ &\left| h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \leq C \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \left| \phi_{n+1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \phi_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| &= \left| L^{-(n+1)} \circ h \circ f^{\circ n} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} C \left((|\mu| + \epsilon)^n \right)^2 = \frac{C}{|\lambda|} \left(\frac{(|\mu| + \epsilon)^2}{|\lambda|} \right)^n. \end{aligned}$$

■

Observação. A condição $\mu = \lambda^k$ (para um $k \geq 1$) é chamada uma ressonância.

Teorema 5.5 (Construção de um domínio de Fatou-Bieberbach). *Seja f uma aplicação de Hénon tal que:*

1. a origem é um ponto fixo;
2. os autovalores λ, μ na origem satisfazem $0 < |\mu|^2 < |\lambda| < |\mu| < 1$, então a conjugação ϕ de f com a parte linear L tem uma extensão biholomorfa $\tilde{\phi} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{C}^2$, onde \mathcal{B} é a bacia atrativa da origem.

Demonstração: A idéia é simplesmente de definir $\tilde{\phi}$ como

$$\tilde{\phi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L^{-n} \circ \phi \circ f^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

e observar que para todo $p \in \mathcal{B}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ $f^n(p)$ é dentro da vizinhança de 0 onde ϕ é definida. Essa definição de $\tilde{\phi}$ não depende de n por causa da equação funcional $L \circ \phi = \phi \circ f$. ■

Um conjunto próprio de \mathbb{C}^2 , biholomorfo a \mathbb{C}^2 é chamado um *domínio de Fatou-Bieberbach*. Em dimensão um, tais conjuntos não existem.

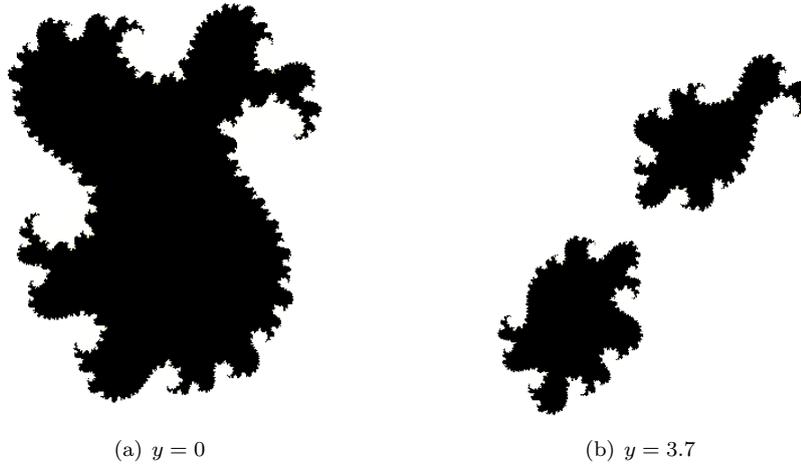


Figura 5.1: Duas fatias horizontais $y = \text{constante}$ de um domínio de Fatou-Bieberbach

5.4 Aplicações de Hénon complexas

5.4.1 Propriedades básicas:

Seja $P(z)$ um polinômio de $\mathbb{C}[z]$, a aplicação

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} P(x) - ay \\ x \end{pmatrix}$$

tem uma aplicação inversa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ (1/a)(P(y) - x) \end{pmatrix},$$

e um jacobiano igual a a . Isso significa que $H_{P,c}$ é um automorfismo polinomial. O seguinte teorema de Friedland e Milnor mostra que dentro da família dos automorfismos polinomiais de \mathbb{C}^2 , as aplicações de Hénon são exatamente aquelas que possuem uma dinâmica interessante:

Teorema 5.6 (Friedland-Milnor). *Seja $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$. Então existem duas possibilidades: f é conjugada em $\text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ a uma composição de aplicações de Hénon complexas, ou f é conjugada a um produto de aplicações elementares do tipo de*

$$E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + p(y) \\ by + c \end{pmatrix},$$

onde $ab \neq 0$ e p é um polinômio.

Dinâmica simplificada: Hubbard e Oberste-Vorth no artigo (Hubbard e Oberste-Vorth, 1994) mostraram a existência de uma "filtração", isto é uma decomposição do plano \mathbb{C}^2 em conjuntos simples, com uma dinâmica simplificada:

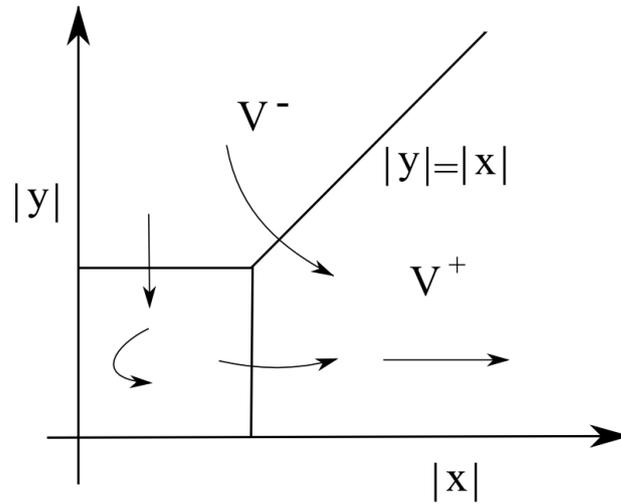


Figura 5.2: Dinâmica simplificada

O fato importante é a existência do conjunto V^+ , que age como uma armadilha: quando um ponto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cai nele, ele nunca escapa, sob iteração de H .

Lema 5.1. *Para cada aplicação $H_{P,c}$, existe $R > 0$ tal que o conjunto $V_R^+ := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x| \geq R \text{ e } |y| \leq |x|\}$ tem a seguinte propriedade:*

$$p \in V_R^+ \Rightarrow H_{P,c}^{\circ n}(p) \in V_R^+, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Demonstração: Vamos mostrar: existe $R > 0$ e $\rho > 1$ tais que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V^+ \Rightarrow H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \text{int}(V^+)$ e $|x_1| > \rho|x|$. Vamos escolher um $\rho > 1$. Temos que $|P(z)/z| \rightarrow \infty$ quando $|z| \rightarrow \infty$. Então $|P(z)| > \rho(1 + |z|)$ para $|z| > R$, R grande.

Agora, vamos supor $|x| \geq R$ e $|y| \leq |x|$ (isto é, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V_R^+$). Então,

$$|x_1| = |P(x) - ay| \geq |P(x)| - |ay| \geq \rho(1 + |x|) - |ay| > \rho|x|.$$

Mas isso significa que:

$$|x_1| > \rho|x| > |x| > \max\{R, |y_1|\},$$

isto é, $H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V^+$. ■

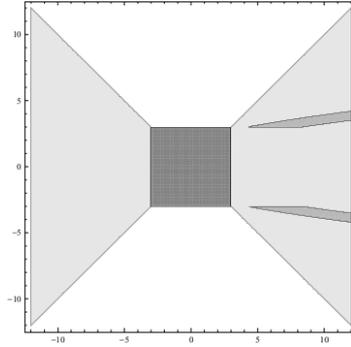


Figura 5.3: Exemplo de uma aplicação de Hénon no plano \mathbb{R}^2 mostrando V^+ e $H(V^+)$ dentro de V^+ .

5.4.2 Conjuntos de Julia para aplicações de Hénon

O objetivo agora é realmente de copiar o estudo da família quadrática $P_c : z \mapsto z^2 + c$, mas agora em dimensão 2. As aplicações de Hénon possuem

inversas, então podemos estudar conjuntos invariantes sob iteração de H ou iteração de H^{-1} , ou ambos.

Vamos começar com algumas definições inspiradas na dinâmica em dimensão 1.

- **Conjunto cheio de Julia (positivo):**

$$K^+ := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \text{ com órbita positiva limitada} \right\}$$

- **Conjunto cheio de Julia (negativo):**

$$K^- := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \text{ com órbita negativa limitada} \right\}$$

- **Conjunto cheio de Julia:**

$$K := K^+ \cap K^-.$$

- **Conjunto de escapeamento U^+ .** Este conjunto é simplesmente o complemento de K^+ ,

$$U^+ := \mathbb{C}^2 - K^+.$$

- **Conjuntos de Julia $J^+ = \partial K^+$, e também $J^- = \partial K^-$.** Podemos definir $J = J^+ \cap J^-$.

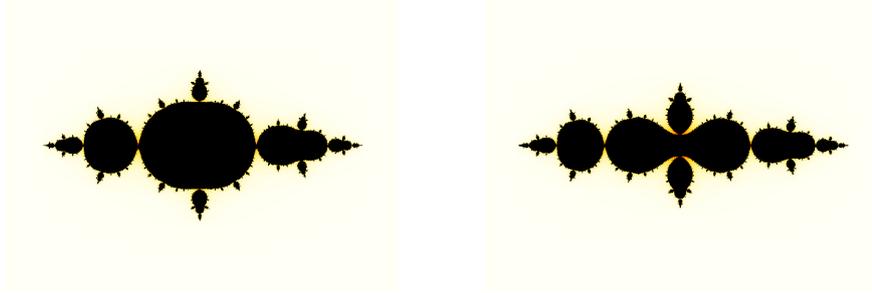


Figura 5.4: Duas fatias horizontais $\{y = \text{constante}\} \cap K^+$ para uma aplicação de Hénon quadrática

Da mesma maneira que para a família quadrática, tem uma relação entre o conjunto de Julia e a fronteira de uma bacia atrativa:

Teorema 5.7 (Bedford-Smillie). • Se p for um atrator para f e B for a bacia de p então $\partial B = J^+$.

- Se p for um ponto de sela então a variedade instável $W^s(p)$ é densa em J^+ .

Um outro teorema de Bedford e Smillie mostrou que o conjunto K^+ é sempre conexo. Mas K não é sempre, então podemos definir o análogo do conjunto de Mandelbrot:

Definição 5.2. O lugar de conectividade é o conjunto dos parâmetros $(c, a) \in \mathbb{C}^2$ tais que o conjunto cheio de Julia $K_{c,a}$ é conexo.

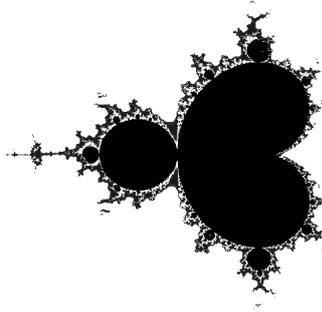


Figura 5.5: Uma fatia $a = -0.2$ do lugar de conectividade (com o software *Saddledrop* de Hubbard e Papadantonakis).

De maneira geral, verificar a conexidade do conjunto de Julia K é difícil, mas os seguintes resultados oferecem uma ajuda notável. Vamos começar com uma definição:

Definição 5.3. Seja p um ponto fixo de tipo sela de uma aplicação de Hénon H . Então a variedade instável $W^u(p)$ é definida como

$$W^u(p) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 : H^{-n} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow p \text{ quando } n \rightarrow \infty \right\}$$

Teorema 5.8 (Hubbard). Seja p um ponto de tipo sela de H , com λ o autovalor expansivo (i.e. $|\lambda| > 1$), com autovetor associado v . Então

$$\gamma : z \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} H^n \left(p + \frac{z}{\lambda^n} v \right)$$

é uma imersão analítica injetiva, tal que $H(\gamma(z)) = \gamma(\lambda z)$.

Uma consequência importante deste resultado é que podemos visualizar na tela do computador a variedade instável. A combinação deste resultado com o seguinte é suficiente para permitir uma visualização direta da conectividade do conjunto K :

Teorema 5.9 (Bedford-Smillie). *O conjunto K é conexo se e somente se $K \cap W^u(p)$ é conexo para um ponto sela p .*

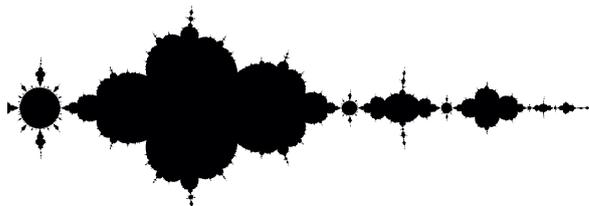


Figura 5.6: Uma variedade instável, com um conjunto de Julia K conexo em preto

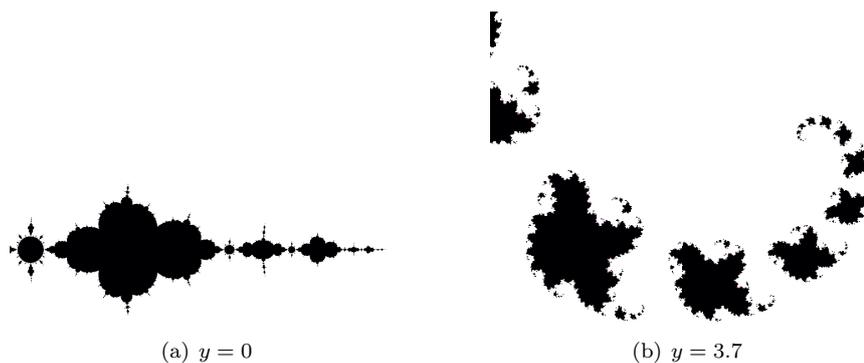


Figura 5.7: Exemplos de conjuntos $K \cap W^u(p)$ conexo e não conexo

5.4.3 Coordenada de Böttcher

Nessa seção, nós ficamos com uma aplicação de Hénon quadrática $H : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + c - ay \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x,y) \\ f(x,y) \end{pmatrix}$. Um resultado fundamental de Hubbard e Oberste-Vorth mostra a existência dentro do aberto V^+ de uma *coordenada de Böttcher*, isto é uma semi-conjugação com a aplicação $z \mapsto z^2$:

Teorema 5.10. *No conjunto aberto V^+ existe uma função $\phi^+ : V^+ \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$\phi^+ \circ H = (\phi^+)^2.$$

Demonstração: Vamos introduzir uma notação:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g(x, y) \\ f(x, y) \end{pmatrix} \mapsto \dots \mapsto \begin{pmatrix} g_n(x, y) \\ f_n(x, y) \end{pmatrix} \dots$$

Com essa notação, temos $g(H^{n-1}(z)) = g_n(z)$ (onde $z = (x, y)$).

Agora, escrevendo $\frac{g(x, y)}{x^2} = \frac{x^2 + c - ay}{x^2} = 1 + \frac{c - ay}{x^2}$ em V^+ , temos que

$$g(x, y) = x^2 \cdot e^{\beta(z)}, \text{ onde } z = (x, y).$$

A função β é limitada em V^+ .

Também, escrevendo $(g_{n-1}(z), f_{n-1}(z))$ no lugar de z :

$$g_n(z) = g_{n-1}(z)^k \exp \beta(H^{n-1}(z)),$$

e, por indução

$$g_n(z) = x^{2^n} \exp(2^{n-1}\beta(z) + \dots + 2\beta(H^{n-2}(z)) + \beta(H^{n-1}(z))).$$

Assim, podemos definir uma raiz 2^n -ésima:

$$\phi_n(z) = x \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\beta(z) + \dots + \frac{1}{2^n}\beta(H^{n-1}(z))\right).$$

A função β é limitada em V^+ então a série dos $\frac{1}{2^n}\beta(H^{n-1}(z))$ é absolutamente convergente. Mas temos a equação funcional $\phi_n(H(z)) = (\phi_{n+1}(z))^2$, então o limite ϕ é tal que

$$\phi \circ H = \phi^2.$$

■

5.4.4 Modelos topológicos

Tem poucos exemplos onde a dinâmica global é completamente entendida. Nessa seção nós vamos descrever um modelo topológico global para a dinâmica de $H : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + c - ay \\ x \end{pmatrix}$, onde a é pequeno e $P_c : z \mapsto z^2 + c$ tem um atrator (isto é, c é dentro da cardioide do conjunto de Mandelbrot). Nessa situação, a dinâmica pode ser escrita com coordenadas polares (r, θ) (onde $r \geq 0$ e θ é um ângulo na esfera de dimensão 3). De maneira mais precisa (ver (Bonnot, 2006)):

Teorema 5.11 (Bonnot). *Para qualquer c na cardioide principal \mathcal{C} do conjunto de Mandelbrot, existe um $\epsilon > 0$ tal que: para qualquer $a \in \mathbb{C}$ satisfazendo $0 < |a| < \epsilon$, existe um homeomorfismo $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow Y$ que conjuga $H_{a,c}$ com $g : Y \rightarrow Y$.*

Para definir a aplicação g do modelo (g, Y) precisamos dos seguintes ingredientes: Primeiro chamamos \mathbf{T} o toro sólido $S^1 \times \mathbb{D}$, em seguida, observamos que a aplicação $\sigma : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ definida por

$$\sigma : (\zeta, z) \mapsto \left(\zeta^2, \frac{1}{2}\zeta + \alpha \frac{z}{\zeta} \right),$$

pode ser estendida até a 3-esfera S^3 inteira, num homeomorfismo $\tilde{\sigma}$. Na 3-esfera vista como a reunião de dois toros sólidos, temos agora dois solenoides invariantes obtidos por iteração de $\tilde{\sigma}$ em $\mathbf{T} \subset S^3$:

$$\Sigma^+ = \bigcap_{n \geq 0} \sigma^n(\mathbf{T}) \quad \text{et} \quad \Sigma^- = \bigcap_{n \geq 0} \sigma^{-n}(\mathbf{T}).$$

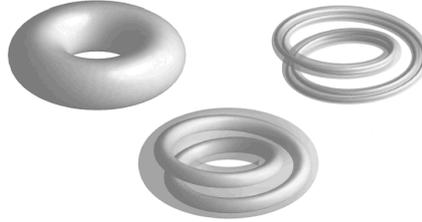


Figura 5.8: Ação de uma aplicação de tipo solenoidal sobre um toro sólido

Em \mathbb{R}^4 com suas coordenadas polares (r, θ) onde $r \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in S^3$, definimos a aplicação do modelo da seguinte maneira:

$$g : (r, \theta) \mapsto \left(r^2, \tilde{\sigma}(\theta) \right).$$

Finalmente vamos definir

$$\text{cone}(\Sigma^-) = \{ (r, \theta) \mid r \geq 1, \theta \in \Sigma^- \}.$$

e o espaço do modelo será definido como: $Y = \mathbb{R}^4 - \text{cone}(\Sigma^-)$.

Neste modelo podemos identificar todos os conjuntos invariantes: o interior de K^+ é uma bola aberta, o conjunto de Julia $J^+ = \partial K^+$ é uma 3-esfera menos um solenoide. E o conjunto de escapamento $U^+ = \mathbb{C}^2 - K^+$ é homeomorfo a $(S^3 - \Sigma) \times \{(1, \infty)\}$.

Exercícios

Exercício 5.1. *Mostrar que o teorema de extensão de Hartogs não é verdadeiro em \mathbb{C} (considerar a função $\frac{1}{z}$).*

Exercício 5.2. *Mostrar que aplicações holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são abertas (i.e a imagem de um aberto é um aberto). Mostrar que essa propriedade não é verdadeira em \mathbb{C}^2 .*

Exercício 5.3. *Dada $f(x, y)$ uma função holomorfa dada pela expansão*

$$f(x, y) = \sum_{p, q \geq 0} a_{p, q} x^p y^q,$$

resolver a equação diferencial holomorfa

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

de maneira formal: isto é, escrever uma solução $y(x)$ como uma série formal $\sum_n b_n x^n$ e mostrar que os coeficientes b_n podem ser determinados de maneira única (neste exercício, a questão do raio de convergência não é tratada).

Exercício 5.4. *Mostrar que a 3-esfera $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ pode ser descrita como a colagem de dois toros sólidos.*

Exercício 5.5. *Mostrar (utilizando expansões de Taylor na origem) que*

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ y/4 + x^2 \end{pmatrix}$$

não tem uma conjugação perto da origem com a aplicação linear tangente

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/2 \\ y/4 \end{pmatrix}$$

Exercício 5.6. *Mostrar que a aplicação*

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ x \end{pmatrix}$$

tem um toro invariante \mathbf{T} . Mostrar que a variedade estável do toro, isto é o conjunto de todos os pontos $p \in \mathbb{C}^2$ tais $d(F^{on}(p), \mathbf{T}) \rightarrow 0$ tem uma equação

$$|x| = |y|^\beta,$$

onde β é raiz do polinômio $X^2 - X - 1$.

Exercício 5.7. *Mostrar que depois de uma conjugação linear, uma aplicação de Hénon complexa quadrática pode ser escrita como*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + c + by \\ bx \end{pmatrix}.$$

Exercício 5.8. *Mostrar que uma aplicação de Hénon com ponto fixo na origem pode ser escrita depois de uma conjugação como*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + \mu x - ay \\ x \end{pmatrix}.$$

Mostrar que os autovalores λ_1, λ_2 são tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = \mu$ e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a$. Finalmente, mostrar que com uma boa escolha dos parâmetros a, μ , os autovalores λ_1, λ_2 podem atingir qualquer valores.

Exercício 5.9. *Mostrar que em dimensão complexa um, os domínios de Fatou-Bieberbach não existem.*

Exercício 5.10. *Para uma aplicação de Hénon H , mostrar que*

$$U^+ = \bigcup_{n \geq 0} H^{-n}(V^+)$$

isto é “a única maneira de escapar, na dinâmica positiva, é de entrar no conjunto V^+ (e ficar preso lá)”.

Exercício 5.11. *Seja $g : (r, \theta) \mapsto (r^2, \sigma(\theta))$ o modelo topológico para uma aplicação de Hénon H quadrática com um atrator. Mostrar que H não pode ter uma conjugação de classe C^1 com a aplicação g .*

Capítulo 6

Software

O uso dos computadores na dinâmica holomorfa transformou completamente a área. Além dos softwares como Mathematica, Matlab ou Sage, os seguintes software são muito úteis:

1. **Ultrafractal:** (software comercial) muito rapido, utiliza uma linguagem simplificada de programação.
2. **Mandel:** muito bom para desenhar raios externos, equipotenciais
<http://www.mndynamics.com/indexp.html>
3. **Otis:** feito com java, pode ser utilizado sem instalar nada,
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira/programs/otis.html>
4. **Schwarz-Christoffel Toolbox for Matlab:** muito util para dar exemplos de aplicações de Riemann,
<http://www.math.udel.edu/~driscoll/SC/>
5. **Snapshot:** um programa de Arnaud Chéritat, muito bem feito, para explorar a familia quadrática:
<http://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/>

Bibliografia

- Audin, M. (2011). *Fatou, Julia, Montel*, volume 2014 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg. The great prize of mathematical sciences of 1918, and beyond, Translated from the 2009 French original by the author, History of Mathematics Subseries.
- Beardon, A. F. (1991). *Iteration of rational functions*, volume 132 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York. Complex analytic dynamical systems.
- Bonnot, S. (2006). Topological model for a class of complex Hénon mappings. *Comment. Math. Helv.*, 81(4):827–857.
- Carleson, L. e Gamelin, T. W. (1993). *Complex dynamics*. Universitext: Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York.
- Douady, A. (1993). Descriptions of compact sets in \mathbf{C} . In *Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, NY, 1991)*, páginas 429–465. Publish or Perish, Houston, TX.
- Douady, A. e Hubbard, J. H. (1984-1985). *Exploring the Mandelbrot set. The Orsay Notes*. Publ. Math. Orsay.
- Hubbard, J. H. e Oberste-Vorth, R. W. (1994). Hénon mappings in the complex domain. I. The global topology of dynamical space. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (79):5–46.
- Milnor, J. (2006). *Dynamics in one complex variable*, volume 160 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, third edition.
- Morosawa, S., Nishimura, Y., Taniguchi, M., e Ueda, T. (2000). *Holomorphic dynamics*, volume 66 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge. Translated from the 1995 Japanese original and revised by the authors.

Tan, L., editor (2000). *The Mandelbrot set, theme and variations*, volume 274 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge.

Índice

- algoritmo de Lavaurs, 49
- aplicação de Hénon complexa, 53
- atrator, 24
- atrator, linearização global, 25

- Böttcher, coordenada de, 28
- bacia de atração, 17
- Bedford-Smillie, teorema de, 59

- cardioide, 50
- Cauchy-Riemann, equações de, 13
- Conjunto cheio de Julia, 19
- conjunto de escapamento, 58
- conjunto de Mandelbrot, 20
- conjunto de Mandelbrot, conexidade, 45
- coordenada de Böttcher, 28
- coordenada de Fatou, 34
- Cremer, ponto de, 35

- direção atrativa, 32
- discos apertados, 40
- Douady-Hubbard, 47

- família quadrática, 38
- Fatou, conjunto de, 37
- Fatou, coordenada de, 34
- Fatou-Bieberbach, 53
- filtração, 56
- formula de Cauchy, em dimensão 2, 52
- Friedland-Milnor, teorema de, 56

- Hénon, aplicação de, 53
- Hartogs, 63
- Herman, anel de, 38

- Koenigs, equação funcional, 25
- Koenigs, teorema de, 25

- Leau-Fatou, teorema de, 34
- Liouville, teorema de, 14
- lugar de conectividade, 59

- Mandelbrot, conjunto de, 20
- MLC, 49
- Montel, teorema de, 37
- multiplicador, 24
- multiplicidade, 31

- neutro, ponto fixo, 24
- Newton, método de, 16
- normal, família, 37

- pétala atrativa, 32
- parabólico, ponto fixo, 31
- ponto fixo, 23
- ponto fixo, forma normal, 23

- repulsor, 24
- Riemann, aplicação de, 14
- Riemann, esfera de, 15

- Saddledrop, 59
- Siegel, disco de, 35
- solenóide, 62

Sullivan, teorema de classificação de,

37

super-atrator, 24

Tchebychev, 42

variedade instável, 59

Yoccoz, quebra-cabeça de, 41