Exercício 1. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Mostre que*

$$(x, y) \to f(x) + g(y) \text{ é mensurável.}$$

(aqui "mensurável" significa "mensurável" para a σ-álegbra produto.

Exercício 2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função mensurável positiva. Mostre que o seguinte conjunto é mensurável e calcule a medida dele (para a medida produto):*

$$E = \{(x, y) | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Exercício 3. *Para todo $E \subset \mathbb{R}$ vamos definir $\tilde{E} \subset \mathbb{R}^2$ definido por $\tilde{E} = \{(x, y) | x - y \in E\}$. Também $\mathcal{I} = \{E \in Bor(\mathbb{R}); \tilde{E} \in Bor(\mathbb{R}^2)\}$. (Lembra que $Bor(C)$ significa "os borelianos de C").*

Exercício 4. *Deduzir do teorema de Fubini e da relação $\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \int_0^\infty x e^{-x^2 y^2} dy$ se $x > 0$ a seguinte relação:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Exercício 5. *Podemos (ou não) aplicar o teorema de Fubini para a seguinte função?*

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

em $[0, 1] \times [0, 1]$.

Exercício 6. *Com o teorema de Fubini, calcule de 2 maneiras diferentes a integral $\int_a^b \int_0^1 y^x dy, 0 < a < b$ e determine o valor de*

$$\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\log y} dy.$$

Exercício 7. *Com o teorema de Fubini, calcule de 2 maneiras diferentes a integral $\int_0^A \int_0^A e^{-xy} sen(x) dx dy$ e mostre que*

$$\lim_{a \to +\infty} \int_0^A \frac{sen(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$