

Mat 234 Medida e integração - Lista 6

Sylvain Bonnot

Exercício 1. Seja $f_n \geq 0$ tal que $f_n \rightarrow f$ em medida. Mostre que $\int f \leq \liminf \int f_n$.

Exercício 2. Suponhamos que $|f_n| \leq g$ com $g \in L^1$ e $f_n \rightarrow f$ em medida. Mostre que $\int f = \lim \int f_n$ e que $f_n \rightarrow f$ em L^1 .

Exercício 3. Mostre que $f_n \rightarrow f$ em medida se e somente se para todo $\epsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) < \epsilon \text{ para todo } n \geq N.$$

Exercício 4. Sejam f_n e f funções mensuráveis de X para \mathbb{C} e $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Se ϕ é contínua e $f_n \rightarrow f$ quase-sempre então $\phi \circ f_n \rightarrow \phi \circ f$ q.s.

Exercício 5. Mostre que no teorema de Egoroff a hipótese $\mu(X) < \infty$ pode ser trocada por $|f_n| \leq g$ para todo n onde g é integrável.

Exercício 6. Seja μ a medida de contagem em \mathbb{N} , então $f_n \rightarrow f$ em medida se e somente se $f_n \rightarrow f$ uniformemente.