Mat 234 Medida e integração -Lista 5

Sylvain Bonnot

Espaços L^p

Exercício 1. *Seja f a função definida em $(0,+\infty)$ por*

$$f(x) = \frac{1}{x(1+|\ln x|)^2)}$$

(a) Mostre que $f \in L^1((0,1])$.

(b) Seja $p \in (1,\infty)$, mostre que $f \notin L^p((0,1])$.

(c) Seja $p \in [1,\infty)$, mostre que $f \in L^p([1,+\infty)$.

Exercício 2. *Seja $(E,\mathcal{T},\mu)$ um espaço de medida tal que $\mu(E) < +\infty$. Seja $1 \leq p < q < +\infty$.*

(a) Mostre que $L^\infty(E) \subset L^q(E) \subset L^p(E) \subset L^1(E)$.

(b) Mostre com um exemplo que a hipótese $\mu(E)$ é necessária.

(c) Mostre que a injeção $i : L^q \to L^p$ é contínua para as normas $\|.\|_q$ e $\|.\|_p$.

Exercício 3. *Seja $(E,\mathcal{T},\mu)$ um espaço de medida e $p \in [1,+\infty)]$ e $(f_n)_n$ uma sequência de funções de $L^p(E,\mathcal{T},\mu)$. Suponhamos que*

(a) (i) $f_n \to f$ para q.t.p;

(b) (ii) $f_n \to g$ para a norma $\|.\|_p$.

Mostre que $f = g$ para quase todo ponto.

Exercício 4. *Para $n \in \mathbb{N}$ vamos considerar a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f_n(x) := n.I_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}(x).$$

(a) Mostre que a sequência $(f_n)_n$ converge para quase todo ponto para a função nula.

(b) Estude a convergência da sequencia $(f_n)_n$ em L^p para $p \in [1,\infty]$.

Exercício 5. *Seja $n \in \mathbb{N}^\star$. Seja $a(n)$ o único inteiro tal que*

$$2^{a(n)} \leq n \leq 2^{a(n)+1} - 1$$

e f_n a função indicadora definida em $[0,1)$ por

$$f_n(x) = I_{[n2^{-a(n)}-1,(n+1)2^{-a(n)}-1}(x).$$

(a) desenhe f_1, f_2, f_3, f_4.

(b) seja $p \in [1,+\infty)$. Mostre que a sequência f_n converge em $L^p([0,1))$ para a função nula.

(c) Mostre que para todo $x \in [0,1)$ a sequência $f_n(x)$ não tem limite.