Transformada de Fourier : parte II

Teorema de inversão

Suponhamos que f e $\hat{f}$ são em L^1. Então $\boxed{f(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-iu\cdot y} \hat{f}(u)\, du, \quad q.s.}$

Isso significa que podemos recuperar f, dada $\hat{f}$.

Para mostrar este teorema, a gente vai precisar de alguns lemas...

Proposição: ① Seja $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_1(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, então $\widehat{f_1}(u) = e^{-u^2/2}$.

② Seja $f_n: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot e^{-|x|^2/2}$ então $\widehat{f_n}(u) = e^{-|u|^2/2}$.

Prova: Seja $g(u) = \int e^{iu.x} e^{-x^2/2} dx$. Podemos aplicar o teorema de diferenciação:

$$g'(u) = i \int \underset{\overset{\shortparallel}{u}}{e^{iux}} \underbrace{x e^{-x^2/2}}_{\overset{\shortparallel}{v'}} dx = \underbrace{\left[i e^{iux} \left(-e^{-x^2/2} \right) \right]_{-\infty}^{\infty}}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \int -u e^{iux} \left(-e^{-x^2/2} \right) dx = -u g(u).$$

Mas podemos resolver a equação diferencial $g'(u) = -u g(u)$.

De fato $[\log g(u)]' = \frac{g'(u)}{g(u)} = -u \Rightarrow \log g(u) = -\frac{u^2}{2} + c_1$

$$\Rightarrow g(u) = c_2 . e^{-u^2/2}.$$

Agora $g(0) = \sqrt{2\pi}$, então $c_2 = \sqrt{2\pi}$.

Mas $\frac{g(u)}{\sqrt{2\pi}} = e^{-u^2/2} = \int e^{iux} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \widehat{f_1}(u)$.

② $\widehat{f_n}(u) = \int \cdots \int e^{i \sum_j u_j x_j} . f_1(x_1) \ldots f_1(x_n) dx_1 \ldots dx_n = \widehat{f_1}(u_1) \ldots \widehat{f_1}(u_n) = e^{-|u|^2/2}$. ☐

Rascunho:

$h(u) = g(u) e^{u^2/2}$

$\Rightarrow h'(u) = g'(u) e^{u^2/2} + g(u). u. e^{u^2/2} = 0$

$\Rightarrow h(u) = c_2$.

$$\int e^{-x^2} dx . \int e^{-y^2} dy = \int e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$
$$= \int e^{-r^2} r \, dr \, d\theta$$
$$= 2\pi . \left[\frac{e^{-r^2}}{-2} \right]_0^{\infty}$$
$$= \pi.$$

Proposição:

Suponhamos $\varphi \in L^1$ e $\int \varphi = 1$. Seja $\varphi_\delta(x) := \dfrac{\varphi(x/\delta)}{\delta^n}$.

1) g contínua com suporte compacto $\Rightarrow g * \varphi_\delta \longrightarrow g$ pontualmente quando $\delta \to 0$.

2) g contínua com suporte compacto $\Rightarrow g * \varphi_\delta \longrightarrow g$ em L^1 quando $\delta \to 0$.

3) Se $f \in L^1$ então $\|f * \varphi_\delta - f\|_1 \longrightarrow 0$ quando $\delta \to 0$.

Prova: temos $\int \varphi_\delta = 1$ $\left(\text{fazer } y = \frac{x}{\delta}\right)$.

$$|g*\varphi_\delta(x) - g(x)| = \left|\int (g(x-y) - g(x))\varphi_\delta(y)\,dy\right| = \left|\int (g(x-\delta y) - g(x))\varphi(y)\,dy\right| \leqslant \int |g(x-\delta y) - g(x)|\,|\varphi(y)|\,dy. \quad \text{I}$$

Mas $|g(x-\delta y) - g(x)|\,|\varphi(y)|$ é dominada por $2\|g\|_\infty \varphi$, então $\text{I} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$ (conv. dominada).

2) Utilizando Fubini:

$$\int |g*\varphi_\delta(x) - g(x)|\,dx = \int \left|\int (g(x-y) - g(x))\varphi_\delta(y)\,dy\right| dx = \int \left|\int (g(x-\delta y) - g(x))\,\varphi(y)\,dy\right| dx \leqslant \int\int |g(x-\delta y) - g(x)|\,|\varphi(y)|\,dy\,dx$$

$$= \int \underbrace{\int |g(x-\delta y) - g(x)|\,dx}_{G_\delta(y)}\,|\varphi(y)|\,dy$$

Para y fixo, $\delta \to 0 \Rightarrow G_\delta(y) \to 0$ (conv. dominada).

Obs: $|G_\delta| \leq 2\|g\|_1$.

Agora, φ é integrável, então o teorema de conv. dominada implica: $\int G_\delta(y)\,|\varphi(y)|\,dy \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$.

③ Seja $\varepsilon > 0$. Utilizando o fato que as funções C^0 com suporte compacto são densas em $L^1(\mathbb{R}^d)$, podemos achar g C^0 com suporte compacto tal que $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Seja $h = f-g$.

Temos: $\|f*\varphi_\delta - f\|_1 \leq \|g*\varphi_\delta - g\|_1 + \|h*\varphi_\delta - h\|_1$

$\leq \|h\|_1 + \|h*\varphi_\delta\|_1 \leq \|h\|_1 + \|h\|_1 \cdot \|\varphi_\delta\|_1 < \varepsilon\,(1+\|\varphi\|_1)$.

Concl: $\limsup_{\delta\to 0} \|f*\varphi_\delta - f\|_1 \leq \limsup_{\delta\to 0} \|h*\varphi_\delta - h\|_1 \leq \varepsilon(1+\|\varphi\|_1)$. $\square$

Teorema: suponhamos $f \in L^1$ e $\hat{f} \in L^1$. Então $f(y) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-iu\cdot y}\,\hat{f}(u)\,du$, quase-sempre.

Teorema: suponhamos $f \in L^1$ e $\hat{f} \in L^1$. Então $f(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-iu.y} \hat{f}(u)\,du$, quase-sempre.

Prova: se $g(x) = \frac{k(x/a)}{a^n}$ então $\hat{g}(u) = \hat{k}(au)$, por isso a transformada de $\frac{1}{a^n}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-x^2/a^2}$ é $e^{-a^2u^2/2}$.

Seja agora $H_a(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{-|x|^2/2a^2}$ então $\hat{H}_a(u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} a^n e^{-a^2|u|^2/2}$.

Mas: $\int \hat{f}(u) e^{-iu.y} H_a(u)\,du = \iint e^{iu.x} f(x) e^{-iu.y} H_a(u)\,dx\,du = \iint e^{iu(x-y)} H_a(u)\,du\, f(x)\,dx = \int \hat{H}_a(x-y) f(x)\,dx$.

(Lembra que $\iint |f(x)||H_a(u)|\,dx\,du < \infty$).

Agora, $\int \hat{f}(u) e^{-iu.y} H_a(u)\,du \longrightarrow (2\pi)^{-n} \int \hat{f}(u) e^{-iu.y}\,dy$ quando $a \to \infty$ (conv. dominada, observando que $\hat{f} \in L^1$ e $H_a(u) \to \frac{1}{(2\pi)^n}$).

Mas, $\int \hat{H}_a(x-y) f(x)\,dx = f * \hat{H}_a(y)$. Com $\delta = \frac{1}{a}$, a proposição acima mostra que $f * \hat{H}_a \xrightarrow[a\to\infty]{} f$ em L^1.

$\square$