Teorema da variedade estável

(seguindo Le Calvez, Yoccoz).

<u>Proposição:</u> Seja $T: E \to E$ um endomorfismo hiperbólico do Banach E, com $ch(T)=\lambda$, $E = E^s \oplus E^u$ a decomposição associada e $\|\cdot\|$ uma norma adaptada. Seja $\varphi: E \to E$ limitada e Lipschitz com $\mathrm{Lip}\,\varphi = \varepsilon < \varepsilon_0 := 1-\lambda$, e $\varphi(0)=0$.

Para $f = T+\varphi$, vamos definir $W^s(0) := \{x \in E / (f^n(x))_{n\geq 0} \text{ limitada}\}$. Então $W^s(0)$ é o gráfico de uma função $\Psi: E^s \to E^u$, Lipschitz com $\mathrm{Lip}\,\Psi = \lambda + \varepsilon$.

Também a restrição de f em $W^s(0)$ é $(\lambda+\varepsilon)$-Lipschitz, por isso $W^s(0) = \{x \in E / \lim_{n\to+\infty} f^n(x) = 0\}$.

<u>Demonstração:</u> Seja $r \in (\lambda+\varepsilon, 1)$, e $\mathcal{E} := \{(x_n)_{n\geq 0} \in E^{\mathbb{N}} / (r^{-n}x_n)_{n\geq 0} \text{ limitada}\}$.

É facil ver que $\mathcal{E}$ é um Banach com a norma $\|x\| = \sup_{n\geq 0} r^{-n}\|x_n\|$.

O espaço $\mathcal{E}$ tem uma decomposição $\mathcal{E} = \mathcal{E}^s \oplus \mathcal{E}^u$, onde $\mathcal{E}^s = \{(x_n)_{n\geq 1} \text{ em } E^s / (r^{-n}x_n)_{n\geq 1} \text{ seja limitada}\}$

e $\mathcal{E}^u = \{(x_n)_{n\geq 0} \text{ em } E^u / (r^{-n}x_n)_{n\geq 0} \text{ seja limitada}\}$

Dada cada sequência $(x_n)_{n\geq 0} = (x_n^s + x_n^u)_{n\geq 0}$, podemos fabricar duas sequências $(y_n^s)_{n\geq 1}$ e $(y_n^u)_{n\geq 0}$ assim:

$$\boxed{\begin{aligned} y_{n+1}^s &= F^s(x_n^s, x_n^u) = T^s(x_n^s) + \varphi^s(x_n^s, x_n^u) \\ y_n^u &= x_n^u + (T^u)^{-1}\left(x_{n+1}^u - F^u(x_n^s, x_n^u)\right) = (T^u)^{-1}\left(x_{n+1}^u - \varphi^u(x_n^s, x_n^u)\right) \end{aligned}}$$

Porque essa escolha bizarra? Porque $\begin{cases} y_{n+1}^s = x_{n+1}^s \\ y_n^u = x_n^u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1}^s = F(x_n^s, x_n^u) \\ x_{n+1}^u = F^u(x_n^s, x_n^u) \end{cases} \Leftrightarrow x_{n+1} = F(x_n)$.

Agora, se $(\tilde{x}_n)_{n\geq 0}$ é uma outra sequência, com sequências associadas $(\tilde{y}_n^s)_{n\geq 1}$ e $(\tilde{y}_n^u)_{n\geq 0}$, temos:

$$\begin{cases} \|y_{n+1}^s - \tilde{y}_{n+1}^s\| \leq (\lambda+\varepsilon)\,\|x_n - \tilde{x}_n\| \\ \|y_n^u - \tilde{y}_n^u\| \leq \lambda\|x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}\| + \lambda\varepsilon\|x_n - \tilde{x}_n\|. \end{cases}$$

Obs.: isso implica $\|y_{n+1}^s\| \leq (\lambda+\varepsilon)\|x_n\|$ então $(y_n^s)_{n\geq 1} \in \mathcal{E}^s$. Da mesma maneira, $(y_n^u)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}^u$.

Consequência: temos uma aplicação $\Phi : E^s \times \mathcal{E}^s \times \mathcal{E}^u \to \mathcal{E}^s \times \mathcal{E}^u$

$$\left(x_0^s, (x_n^s)_{n\geq 1}, (x_n^u)_{n\geq 0}\right) \mapsto \left((y_n^s)_{n\geq 1}, (y_n^u)_{n\geq 0}\right)$$

Lema: Φ é $\left(\frac{\lambda+\varepsilon}{r}\right)$-Lipschitz.

Demo.: $r^{-(n+1)} \| y^s_{n+1} - \tilde{y}^s_{n+1} \| \leq r^{-(n+1)} (\lambda+\varepsilon) \| x_n - \tilde{x}_n \| \leq \frac{\lambda+\varepsilon}{r} \cdot \| x - \tilde{x} \|$

e também $r^{-n} \| y^u_n - \tilde{y}^u_n \| \leq \lambda \varepsilon r^{-n} \| x_n - \tilde{x}_n \| + \lambda r^{-n} \| x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1} \| \leq (\lambda\varepsilon + \lambda \ ) \| x - \tilde{x} \| \leq \frac{\lambda+\varepsilon}{r} \| x - \tilde{x} \|$.

(porque $\lambda \leq \frac{\lambda}{r}$ e $\lambda\varepsilon \leq \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{r}$). Podemos observar que $\frac{\lambda+\varepsilon}{r} < 1$, e aplicar o seguinte lema:

Teorema do ponto fixo com parâmetro:

Sejam (X,d) e (Y,d) dois espaços métricos com Y completo. Seja $\phi : X \times Y \to Y$, contínua tal que:

$\exists\, \lambda \in (0,1)$ tal que: $\forall x \in X, \forall y, y' \in Y$ temos: $d(\phi(x,y), \phi(x,y')) \leq \lambda\, d(y,y')$.

Então, $\forall x \in X$, $\exists!$ solução $y = \theta(x)$ da equação $\phi(x,y) = y$ e $\theta : X \to Y$ é contínua.

Demonstração: a existência e unicidade de $y = \theta(x)$ solução de $\phi(x,y) = y$ vem do teorema do ponto fixo (simples).

Agora: $\forall x, x' \in X$: $d(\theta(x), \theta(x')) = d(\phi(x,\theta(x)), \phi(x',\theta(x'))) \leq d(\phi(x,\theta(x)), \phi(x',\theta(x))) + d(\phi(x',\theta(x)), \phi(x',\theta(x')))$.

$$\leq d(\phi(x,\theta(x)), \phi(x',\theta(x))) + \lambda\, d(\theta(x), \theta(x'))$$

Consequência: $d(\theta(x), \theta(x')) \leq \frac{1}{1-\lambda} d(\phi(x,\theta(x)), \phi(x',\theta(x))) \Rightarrow \theta$ é contínua em $x \in X$.

$\square$

Assim: $\forall\, x_0^s \in E^s$, existe um $\underset{\mathcal{E}^s \times \mathcal{E}^u}{\theta(x_0^s)}$, único, tal que $x_0^s \mapsto \theta(x_0^s)$ seja contínua e $\theta(x_0^s) = \Phi(x_0^s, \theta(x_0^s))$.

Aqui $\theta(x_0^s)$ pode ser escrito como $\theta(x_0^s) = \Big(\underbrace{(x_n^s)_{n\geq 1}}_{= \theta_n^s(x_0^s)}, \underbrace{(x_n^u)_{n\geq 0}}_{= \theta_n^u(x_0^s)} \Big)$, então: $\begin{cases} x_{n+1}^s = f^s(x_n^s, x_n^u) \\ x_{n+1}^u = f^u(x_n^s, x_n^u) \end{cases}$

Em resumo: dado $x_0^s \in E^s$, existe um único $x_0^u := \theta_0^u(x_0^s) \in E^u$ tal que $\big(f^n(x_0^s, x_0^u)\big) \in \mathcal{E}$.

Agora: se $r = 1$, $\{x \,/\, \text{órbita}(x) \text{ limitada}\}$ é o grafico de $\theta_0^u := \psi$.

Se $r \in (\lambda+\varepsilon, 1)$: $(r^{-n} f^n(x))$ limitada $\Rightarrow f^n(x) \to 0$ $(r < 1!)$, se $f^n(x)$ limitada.

Vamos mostrar que θ é $(\lambda+\varepsilon)$-Lipschitz: (se $r=1$): $\|\theta(x_0^s) - \theta(\tilde{x}_0^s)\| = \|\Phi(x_0^s, \theta(x_0^s)) - \Phi(\tilde{x}_0^s, \theta(\tilde{x}_0^s))\|$

$$\leq (\lambda+\varepsilon) \max\{\|x_0^s - \tilde{x}_0^s\|, \|\theta(x_0^s) - \theta(\tilde{x}_0^s)\|$$

$$\leq (\lambda+\varepsilon) \|x_0^s - \tilde{x}_0^s\|.$$

Vamos mostrar: $f_{|W^s(0)}$ é $(\lambda+\varepsilon)$-Lipschitz:

$$\|f(x_0^s, \psi(x_0^s)) - f(\tilde{x}_0^s, \psi(\tilde{x}_0^s))\| = \|f^s(x_0^s, \psi(x_0^s)) - f^s(\tilde{x}_0^s, \psi(\tilde{x}_0^s))\|$$

(lembra: $\|\cdot\| = \max(\|y^s\|, \|y^u\|)$ e $f^u(\cdot) = \psi \circ f^s(\cdot)$ e ψ contração!)

$$\leq \lambda \|x_0^s - \tilde{x}_0^s\| + \varepsilon \|(x_0^s, \psi(x_0^s)) - (\tilde{x}_0^s, \psi(\tilde{x}_0^s))\|$$

$$\leq (\lambda+\varepsilon) \|(x_0^s, \psi(x_0^s)) - (\tilde{x}_0^s, \psi(\tilde{x}_0^s))\|$$

$\square$

Diferenciabilidade de Ψ:

Proposição: com as mesmas hipoteses, se f é de classe C^p e $D\varphi(0)=0$ (i.e $Df(0)=T$), e $r<1$, então: $W_r^s(0)$ é o gráfico de uma função C^p, denotada Ψ e $D\Psi(0)=0$.

Demonstração:

Lema: Versão diferenciável do teorema do ponto fixo com parâmetro.

Sejam E e F dois espaços vetoriais com normas, F Banach. Seja $\phi: E\times F \to F$ de classe C^p, $p\geq 1$ tal que: $\sup\limits_{x,y} \|D_2\phi(x,y)\| = \lambda < 1$.

Então: $\forall x \in E$, existe uma única solução $y=\theta(x)$ de $\phi(x,y)=y$. Também essa aplicação θ é C^p e temos: $D\theta(x) = \left(Id_F - D_2\phi(x,\theta(x))\right)^{-1} \circ D_1\phi(x,\theta(x))$

Demonstração: . Cada $y \mapsto \phi(x,y)$ é λ-Lipschitz: $\Longrightarrow \exists\, \theta: E \to F$ onde $y=\theta(x)$ é a única solução de $\phi(x,y)=y$.

. mostrar θ é C^p: aplicar o teorema das funções implicitas para $\phi(x,y)-y=0$ em $(x_0,\theta(x_0))$, observando que $Id_F - D_2\phi(x_0,\theta(x_0))$ é invertível. A solução local obtida coincide com θ.

Voltando na demonstração:

é suficiente mostrar que ϕ é C^p, mas é facil ver que isso é equivalente ao seguinte:

mostrar que a seguinte função é C^p

$$\mathcal{F} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$
$$(x_n)_{n\geq 0} \mapsto (f(x_n))_{n\geq 0}$$

Seja então $x = (x_n)_{n\geq 0}$, $h = (h_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{E}$. Para $n \geq 0$, $t \in [0,1]$ e $1 \leq k \leq p$ vamos definir:

$$D_k(t,n) := D^k_{x_{n,t}} f \quad \text{onde} \quad x_{n,t} := x_n + t\, h_n .$$

A formula de Taylor implica: $f(x_n + h_n) = f(x_n) + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell!} D_\ell(0,n)(h_n, \dots, h_n) + R_k$,

com o resto $R_k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 [D_k(t,n) - D_k(0,n)](h_n, \dots, h_n)(1-t)^{k-1} dt$.

Agora: $r < 1 \Rightarrow \lim_n \|x_n\| = 0 = \lim_n \|h_n\|$, então $D_\ell := \sup_{t,n} |D_\ell(t,n)| < +\infty$.

Assim a aplicação ℓ-linear $\left((\alpha^1_n)_{n\geq 0}, \dots, (\alpha^\ell_n)_{n\geq 0}\right) \mapsto \left(D_\ell(0,n)(\alpha^1_n, \dots, \alpha^\ell_n)\right)_{n\geq 0}$ manda $\mathcal{E}^\ell$ para $\mathcal{E}$ com norma $\leq D_\ell$.

Isso implica que $\mathcal{F}$ é C^p.

$\square$

Teorema da variedade estável local:

Seja $f: U \to \mathbb{R}^n$, aplicação de classe C^p definida perto de um ponto fixo x_0. Suponhamos que $Df(x_0)$ é hiperbólica com constante de hiperbolicidade $\lambda \in (0,1)$. Seja a decomposição $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ com norma adaptada $\|\cdot\|$. Seja $\lambda' \in (\lambda, 1)$, então $\exists\, \delta > 0$ tal que $W^s_\delta(x_0) := \{x \in U \,/\, f^n(x) \in B(x_0, \delta)\ \forall n \geq 0\}$ seja o gráfico de uma função C^p, $\psi: x_0 + (E^s \cap \overline{B(0,\delta)}) \to E^u \cap \overline{B(0,\delta)}$, e $\psi(x_0) = 0$, $D\psi(x_0) = 0$.

Também: $\forall x_0 \in W^s_\delta(x_0)$ e $n \geq 0$, temos $\|f^n(x) - x_0\| \leq \lambda'^n \|x - x_0\|$.

Demo: observar que $f - Df(0)$ é $(\lambda' - \lambda)$-Lipschitz perto de x_0.

Observações: $W^s_\delta(x_0)$ é a variedade estável local de x_0.

Se todos os autovalores de $Df(x_0)$ são de modulo < 1 então $W^s_\delta(x_0) = \overline{B(x_0, \delta)}$ e x_0 é um atrator.

Se $Df(x_0)$ é um automorfismo hiperbólico, podemos também definir a variedade instável local $W^u_\delta(x_0)$.

$W^s_\delta(x_0)$ e $W^u_\delta(x_0)$ são variedades tangentes a E^s e E^u em x_0, com única interseção $\{x_0\}$.

."ponto fixo repulsor": Se todos os autovalores de $Df(x_0)$ são de modulo > 1.

Teorema da variedade estável global:

Seja $f: M \to M$ um difeomorfismo $C^p, p \geq 1$ numa variedade M, com ponto fixo x_0.

Suponhamos que $T_{x_0}f$ é hiperbólica com decomposição $T_{x_0}M = E^s \oplus E^u$.

Então: $W^s(x_0) = \{x \in M / \lim_{n \to +\infty} f^n(x) = x_0\}$ é a imagem de uma imersão injetiva $\theta^s: E^s \to M$ de classe C^p

tal que $\theta^s(0) = x_0$ e $T_0\theta^s$ é a inclusão $E^s \to T_{x_0}M$. Este conjunto é a variedade estável de x_0.

Obs: mesmo teorema para $W^u(x_0) := \{x \in M / \lim_{n \to +\infty} f^{-n}(x) = x_0\}$.

Demo.: ① Podemos supor M riemanniana, e utilizar a aplicação exponencial $\phi: T_{x_0}M \to M$ perto de x_0.

② Definir $\tilde{f}: T_{x_0}M \to T_{x_0}M$ por $\phi^{-1} \circ f \circ \phi$ numa bola $\overline{B(0,\delta)}$, e aplicar o teorema da variedade estável local.

③ Observar: $\forall x \in E^s$, $\exists\, n$ tal que $\|\tilde{f}^n(x, \psi(x))\| \leq \delta$, onde $x \mapsto \psi(x)$ é a parametrização de $W^s_\delta(x_0)$.

Podemos então definir: $\theta(x) := f^{-n} \circ \phi(\tilde{f}^n(x, \psi(x)))$ e mostrar que essa definição é independente de n.