Teoremas de ponto fixo

Def: $h: X \to Y$ entre espaços métricos é Lipschitz se existe $K \geq 0$ tal que

$$\forall x, x' \in X,\ d(h(x), h(x')) \leq K\, d(x, x').$$

A constante de Lipschitz $Lip(h)$ é definida por: $Lip(h) := \sup \left\{ \dfrac{d(h(x), h(x'))}{d(x, x')} ;\ x, x' \in X,\ x \neq x' \right\}$.

Teorema do ponto fixo de Banach:

Seja (X, d) um espaço métrico completo e $h: X \to X$ uma contração (i.e $Lip(h) < 1$).

Então h tem um único ponto fixo x_0 e também: $\forall x \in X,\ d(x, x_0) \leq \dfrac{1}{1 - Lip(h)}\, d(x, h(x))$.

Dem.: unicidade: se x_0 e x_1 fixos, $d(x_1, x_2) = d(h(x_1), h(x_2)) \leq Lip(h)\, d(x_1, x_2) < d(x_1, x_2) \Rightarrow d(x_1, x_2) = 0$.

existência: $\forall n, m \in \mathbb{N},\ m \leq n$ temos $d(h^m(x), h^n(x)) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(h^i(x), h^{i+1}(x)) \leq \sum_{i=m}^{n-1} Lip(h)^i\, d(x, h(x))$

$$\leq \frac{[Lip(h)]^m}{1 - Lip\, h}\, d(x, h(x)).$$

Assim, para qualquer x dado, $(h^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converges para um x_0, necessariamente ponto fixo, e tal que: $d(x, x_0) \leq \dfrac{1}{1 - Lip\, h}\, d(x, h(x))$.

Perturbações de Lipschitz de uma aplicação linear:

Teorema: Seja E um espaço de Banach e $A: E \to E$ uma aplicação linear tal que a inversa $(A - Id)^{-1}$ existe e seja contínua. Se $\varphi: E \to E$ é Lipschitz com $\mathrm{Lip}\,\varphi < \|(A - Id_E)^{-1}\|^{-1}$ então $A + \varphi$ tem um único ponto fixo x_0. Também, temos: $$\|x_0\| \leq \frac{\|(A - Id_E)^{-1}\varphi(0)\|}{1 - \|(A - Id_E)^{-1}\|\,\mathrm{Lip}(\varphi)}.$$

Demonstração: $$x_0 = (A+\varphi)(x_0) \iff x_0 = \underbrace{-(A - Id_E)^{-1}\varphi}_{\text{Lipschitz, com constante } \leq \|(A - Id_E)^{-1}\|\,\mathrm{Lip}(\varphi).}(x_0).$$

Então podemos aplicar o teorema do ponto fixo de Banach para $(A - Id_E)^{-1}\varphi$, com $x = 0$. $\square$

Na verdade, este teorema é uma versão do teorema das funções implícitas:

Corólario: Seja $A: E \to E$ linear no Banach E tal que A^{-1} existe e seja contínua. Para toda $\varphi: E \to E$ Lipschitz tal que $\mathrm{Lip}(\varphi) < \|A^{-1}\|^{-1}$, a aplicação $A + \varphi: E \to E$ é invertível. Também $(A+\varphi)^{-1}$ é Lipschitz com: $$\mathrm{Lip}\left[(A+\varphi)^{-1}\right] \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\cdot \mathrm{Lip}(\varphi)}.$$

Dem. $\forall y \in E$ dado, $A(x)+\varphi(x)=y$ pode ser escrito como $(A+id_E)(x)+\varphi(x)-y=x$. Então o teorema acima pode ser aplicado com a aplicação linear $A+id_E$ e a aplicação Lipschitz $x \mapsto \varphi(x)-y$ (cuja constante de Lipschitz é também $Lip(\varphi)$). Assim, podemos obter $\forall y \in E$ um único $x \in E$ com $A(x)+\varphi(x)=y$.

Essa equação pode ser re-escrita como $x=A^{-1}y-A^{-1}\varphi(x)$. Aplicando isso para um outro $y' \in E$, temos $x'=A^{-1}y'-A^{-1}\varphi(x')$.

Consequência: $\|x-x'\| \leqslant \|A^{-1}\|\cdot\|y-y'\|+\underbrace{\|A^{-1}\|\cdot Lip(\varphi)}_{<1}\cdot\|x-x'\| \Rightarrow \|x-x'\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot Lip\,\varphi}\cdot\|y-y'\|$. $\square$

Exercício: vamos definir $\psi: E \to E$ por $\psi := (A+\varphi)^{-1}-A^{-1}$. Mostre: ψ é Lipschitz com:

$$Lip(\psi) \leqslant \frac{Lip(\varphi)\,\|A^{-1}\|^2}{1-\|A^{-1}\|\,Lip(\varphi)} \quad \text{e também, } \forall y \in E,\ \|\psi(y)\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,Lip(\varphi)}\cdot\|\varphi\, A^{-1}(y)\|.$$

O seguinte lema vai ser útil para estender uma aplicação Lipschitz φ: bola $\to Y$ numa $\tilde{\varphi}: E \to Y$.

Lema: Seja E espaço vetorial com norma $\|\cdot\|$. Seja $r \in [0,\infty)$ então a aplicação $\rho_r : E \to \overline{B}_{\|\cdot\|}(0,r)$ definida por
$$\rho_r(x)=\begin{cases} x & \text{se } \|x\| \leqslant r \\ r\frac{x}{\|x\|} & \text{se } \|x\| \geqslant r \end{cases}$$
é Lipschitz com $Lip(\rho_r) \leqslant 2$.

Demo.: 1) $\boxed{\|x\| \leq r \text{ e } \|y\| \leq r}$: $\|\rho_r(x)-\rho_r(y)\| = \|x-y\|$.

2) $\boxed{\|x\| \leq r \leq \|y\|}$:

$$\|\rho_r(x)-\rho_r(y)\| = \left\|x - \frac{r}{\|y\|}y\right\| = \frac{\|(\|y\|.x - ry)\|}{\|y\|} \leq \frac{\|(\|y\|x - \|y\|y)\| + \|(\|y\|y - ry)\|}{\|y\|} \leq \frac{\cancel{\|y\|}.\|x-y\| + (\|y\|-r)\cancel{\|y\|}}{\cancel{\|y\|}}$$

$$\leq \|x-y\| + \|y\| - \|x\| \leq 2\|x-y\|.$$

3) $\boxed{\|x\| \geq r \text{ e } \|y\| \geq r}$:

$$\|\rho_r(x)-\rho_r(y)\| = \left\|\frac{r}{\|x\|}x - \frac{r}{\|y\|}y\right\| = r.\frac{\|(\|y\|x - \|x\|y)\|}{\|x\|.\|y\|} \leq r.\frac{\|(\|y\|x - \|y\|y) + \|(\|y\|y - \|x\|y)\|}{\|x\|.\|y\|}$$

$$\leq r.\frac{\|y\|.\|x-y\| + \left(\big|\|y\|-\|x\|\big|\right)\|y\|}{\|x\|.\|y\|} = r.\frac{\|x-y\|}{\|x\|} + r.\frac{\big|\|y\|-\|x\|\big|}{\|x\|}$$

$$\leq 2.\|x-y\|.$$

Lema de extensão: Sejam E espaço vetorial com norma $\|\cdot\|$ e (Y,d) espaço métrico. Se $\varphi: \overline{B}_{\|\cdot\|}(0,r) \longrightarrow Y$ é Lipschitz, então φ pode ser estendida numa $\tilde{\varphi}: E \to Y$, Lipschitz, tal que $\tilde{\varphi}(E) = \varphi(\overline{B}_{\|\cdot\|}(0,r))$, e tal que: $Lip(\tilde{\varphi}) \leq 2.Lip(\varphi)$. (demo: fazer $\tilde{\varphi} = \varphi\,\rho_r$!).