Endomorfismos hiperbólicos de um espaço de Banach

① Endomorfismos hiperbólicos de um espaço de Banach:

Def. Um endomorfismo contínuo $A : E \longrightarrow E$ de um espaço de Banach E é *hiperbólico* se existir uma decomposição $E = E^s \oplus E^u$ e uma norma $\|\cdot\|$ tal que:

ⓐ E^s e E^u são fechados e estáveis por A (i.e $A(E^s) \subset E^s$, $A(E^u) \subset E^u$).

ⓑ $A|_{E^u} : E^u \longrightarrow E^u$ é invertível e $(A|_{E^u})^{-1} : E^u \to E^u$ é contínua.

ⓒ $A|_{E^s}$ e $(A|_{E^u})^{-1}$ são contrações pela norma $\|\cdot\|$ (i.e $\|A|_{E^s}\|, \|(A|_{E^u})^{-1}\| < 1$).

ⓓ $\forall x \in E$, se $x = x^s + x^u$ com $x^s \in E^s$, $x^u \in E^u$ temos $\|x\| = \max(\|x^s\|, \|x^u\|)$.

Uma norma deste tipo é chamada *adaptada* a A. A constante de hiperbolicidade é definida como:

$$\boxed{ch(A) := \max\left(\|A|_{E^s}\|, \|(A|_{E^u})^{-1}\|\right).}$$

Exemplo: uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ é hiperbólica se e somente se ela não tem autovalores de modulo 1.

Dimensão finita & infinita: lembra que em dim $<+\infty$, ser linear $\Rightarrow$ ser contínua.

(Falso em dim. infinita: pensa $A(e_n)=n\|e_n\|$).

Em dim. infinita, este critério de hiperbolicidade é verdadeiro: se E é um Banach sobre $\mathbb{C}$ tal que

$\forall z\in\mathbb{C}$ de modulo 1, $A-z\,Id_E$ tem um inverso contínuo, então A é hiperbólico.

Lema: Seja $A: E\to E$ um endomorfismo hiperbólico do Banach E, com norma adaptada $\|\cdot\|$.

Então $A-Id_E$ é invertível e: $\|(A-Id)^{-1}\|\leqslant \dfrac{1}{1-ch(A)}$.

Demonstração: $A-Id_E$ respeita a decomposição $E^s\oplus E^u$. Temos $\|A|_{E^s}\|<1$, $\|(A|_{E^u})^{-1}\|<1$, então podemos definir $B: E\to E$ (respeitando também a decomposição) pela formula:

$$B(x^s,x^u)=\Big(-\sum_{i\geqslant 0}A^i x^s,\ \sum_{i\geqslant 1}(A|_{E^u})^{-i}x^u\Big).$$

(é facil verificar que $B=(A-Id_E)^{-1}$).

Temos: $$\|B\|\leqslant \max\Big(\sum_{i\geqslant 0}\|A|_{E^s}\|^i,\ \sum_{i\geqslant 1}\|(A|_{E^u})^{-1}\|^i\Big)=\max\left(\frac{1}{1-\|A|_{E^s}\|},\ \frac{\|(A|_{E^u})^{-1}\|}{1-\|(A|_{E^u})^{-1}\|}\right)\leqslant\frac{1}{1-ch(A)}.$$

$\square$

Aplicações hiperbólicas e espaços de funções:

Def. Seja X um espaço topológico e E um Banach com topologia definida pela norma $\|\cdot\|$

O espaço $C_b(X,E)$ é definido como o espaço vetorial das funções contínuas $\theta: X \to E$ limitadas, i.e $\|\theta\|_\infty := \sup\{\|\theta(x)\|;\ x \in X\} < +\infty$.

Exercício: mostre que $C_b(X,E)$ é um espaço de Banach pela norma $\|\cdot\|_\infty$.

Proposição: Seja $A: E \to E$ um endomorfismo hiperbólico do Banach E. Seja X espaço topológico, e $h: X \to X$ um homeomorfismo, então o operador linear $\Theta_{A,h}: \begin{cases} C_b(X,E) \longrightarrow C_b(X,E) \\ \eta \longmapsto A\eta h^{-1} \end{cases}$ é hiperbólico.

A decomposição associada é $C_b(X,E) = C_b(X,E^s) \oplus C_b(X,E^u)$ onde $E = E^s \oplus E^u$ é a decomposição associada a A. Uma norma adaptada a $\Theta_{A,h}$ é $\|\eta\|_\infty = \sup \|\eta(x)\|$ onde $\|\cdot\|$ é adaptada a A.

Para essa norma: $ch(\Theta_{A,h}) = ch(A)$.

Demonstração:

Sejam as projeções $\pi_s : E \to E^s$ e $\pi^u : E \to E^u$. Assim temos $\forall v \in E$, $v = \pi^s v + \pi^u v$, e $\|v\| = \max(\|\pi^s v\|, \|\pi^u v\|)$. Se $\eta : X \to E$ é contínua, $\pi^s \eta$ e $\pi^u \eta$ também, e $\eta = \pi^s \eta + \pi^u \eta$, e $\|\eta\|_\infty = \max\left(\|\pi^s \eta\|_\infty, \|\pi^u \eta\|_\infty\right)$. Assim temos a decomposição $C_b(X, E) = C_b(X, E^s) \oplus C_b(X, E^u)$.

É imediato verificar que esses espaços são invariantes por $\Theta_{A,h}$, e que $\left(\Theta_{A,h}|_{C_b(X,E^u)}\right)^{-1}$ é $\eta \mapsto A^{-1} \eta\, h$.

Consequência: $\|\Theta_{A,h}|_{C_b(X,E^s)}\|_\infty \leqslant \|A|_{E^s}\|$ e $\left\|\left(\Theta_{A,h}|_{C_b(X,E^u)}\right)^{-1}\right\|_\infty \leqslant \|(A|_{E^u})^{-1}\|$.

Utilizando funções constantes em X com valores em E^s, E^u podemos ver que essas desigualdades são igualdades.

$\square$

Objetivo agora: mostrar teoremas de estabilidade do tipo "$\underbrace{A}_{\text{hiperbólica}} + \underbrace{\varphi}_{\text{pequena perturbação Lipschitz}}$ é conjugada a A."

Mas antes, a gente vai precisar de alguns teoremas de ponto fixos...

Teoremas de ponto fixo

<u>Def</u>: $h: X \to Y$ entre espaços métricos é Lipschitz se existe $K \geq 0$ tal que

$$\forall x, x' \in X, \quad d(h(x), h(x')) \leq K\, d(x, x').$$

A constante de Lipschitz $Lip(h)$ é definida por: $Lip(h) := \sup \left\{ \frac{d(h(x), h(x'))}{d(x, x')} \; ; \; x, x' \in X, \; x \neq x' \right\}.$

Teorema do ponto fixo de Banach:

Seja (X, d) um espaço métrico completo e $h: X \to X$ uma contração (i.e $Lip(h) < 1$).

Então h tem um único ponto fixo x_0 e também: $\forall x \in X, \; d(x, x_0) \leq \frac{1}{1 - Lip(h)}\, d(x, h(x)).$

<u>Dem.</u>: unicidade: se x_0 e x_1 fixos, $d(x_1, x_2)$