### b) Application aux surfaces de Riemann.

On suppose maintenant que $X$ est une surface de Riemann, $\pi : \tilde{X} \to X$ son revêtement universel. Comme c'est un homéomorphisme local, il induit de manière évidente sur $\tilde{X}$ une structure analytique : c'est l'unique structure analytique pour laquelle $\pi$ soit un morphisme de surfaces de Riemann (et c'est un isomorphisme analytique local). Si $f : X \to Y$ est un morphisme de surfaces de Riemann, ses relèvements sont aussi analytiques (localement c'est $\pi_Y^{-1} \circ f \circ \pi_X$). En particulier, tout $\sigma \in \mathrm{Aut}_X \tilde{X}$ est analytique (il relève l'identité). On notera $G = \mathrm{Aut}_X \tilde{X}$ le groupe de Galois du revêtement.

**Prop 4.1** - *$G$ agit sur $\tilde{X}$ de façon discrète ( $\Longleftrightarrow$ orbites discrètes) et sans point fixe :* $\forall x, \{\sigma \quad ; \quad \sigma(x) = x\} = id.$

> **Preuve** – **Action dicrète** - Car $G \cdot x \subset \pi^{-1}(\pi(x))$ et les fibres sont discrètes par définition.
> **Action sans point fixe** - Si $\sigma x = x$ et $y \in \tilde{X}$, soit $\gamma$ un chemin de $x$ à $y$, donc $\sigma \circ \gamma$ est un chemin de $\sigma(x) = x$ à $\sigma(y)$, ayant même projection sur $X$ (car $\sigma$ conserve les fibres) donc $\sigma(y) = y$ par unicité du relèvement, d'où $\sigma = id$.
> ∎

Les résultats du §1 montrent donc que toute surface de Riemann $X$ peut être vue comme un quotient $\tilde{X}/G$ où $\tilde{X} \simeq \mathbf{P}^1, \mathbf{C}$ ou $D$, et $G$ est un groupe d'automorphismes de $\tilde{X}$ agissant discrètement et sans point fixe. En particulier, $X$ a une base dénombrable.

### Etude de quelques exemples

Rappelons quels sont les automorphismes de $\mathbf{P}^1, \mathbf{C}, D$.

**Prop 4.2** - $\boxed{1}$ Aut $\mathbf{C} = \{z \longmapsto az + b \quad ; \quad a \neq 0\}$.

$\boxed{2}$ Aut $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = PSL_2(\mathbf{C}) = SL_2(\mathbf{C})/\{\pm 1\}$.

$\boxed{3}$ Aut $D = \{z \longmapsto e^{i\phi}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \quad ; \quad \alpha \in D\}$ et Aut $\mathcal{H} = PSL_2(\mathbf{R})$.

> **Preuve** – $\boxed{1}$ Un automorphisme $f$ de $\mathbf{C}$ s'écrit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ (avec rayon de convergence $\infty$). Si une infinité de $a_n \neq 0$, alors $\infty$ est une singularité essentielle donc (Casorati-Weierstrass) $f$ n'est pas injective. Donc $f$ est un polynôme, de degré 1 car injectif ; réciproque évidente.
>
> $\boxed{2}$ Si $f \in$ Aut $\mathbf{P}^1$, quitte à le composer par une homographie, il conserve $\infty$ donc induit un automorphisme de $\mathbf{C}$ et par suite est affine.
>
> $\boxed{3}$ On déduit Aut $\mathcal{H}$ de Aut $D$ par l'isomorphisme $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$. Il reste à calculer Aut $D$. Si $f \in$ Aut $D$ et $\alpha = f^{-1}(0)$, alors $h(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \circ f^{-1}$ et $h^{-1}$ sont des automorphismes de $D$ qui conservent 0. Le principe du maximum appliqué à $h(z)/z$ montre que $|h(z)| \leq |z|$ et de même pour $h^{-1}$ d'où l'égalité, donc $h(z) = e^{i\phi}z$.
> ∎

On étudie maintenant quelques surfaces de Riemann ainsi que leurs automorphismes et leur groupe fondamental, en les classent d'après le revêtement universel.

**Premier cas -** $\boxed{\boxed{\tilde{X} = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})}}$ : dans ce cas, $\boxed{X \simeq \mathbf{P}^1(\mathbf{C})}$.

**Preuve** – Toute homographie a un point fixe, et $X = \tilde{X}/G$ où $G$ est le groupe d'homographies agissant sans point fixe. ■

**Deuxième cas -** $\boxed{\boxed{\tilde{X} = \mathbf{C}}}$ : dans ce cas, $X = \mathbf{C}/G$ où $G$ est un groupe d'applications affines $z \longmapsto az + b$ agissant discrètement sans point fixe. Si $a \neq 1$, il y a un point fixe, donc $G$ est un groupe de translations $z \longmapsto z + b$ et $b$ parcourt l'orbite $\Gamma$ de 0. $\Gamma$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{C}$, d'où 3 cas possibles :

(i) $\Gamma = \{0\}$, donc $G = \{id\}$ et $\boxed{X \simeq \mathbf{C}}$.

(ii)$\Gamma = \omega\mathbf{Z}$, donc $X$ est la bande $\mathbf{C}/\omega\mathbf{Z}$, isomorphe à $\mathbf{C}^*$ par $z \longmapsto e^{2i\pi z/\omega}$. Ainsi $\boxed{X \simeq \mathbf{C}^*}$. Son groupe fondamental est $\pi_1(\mathbf{C}^*) \simeq \mathbf{Z}$ (c'est bien isomorphe à $G = \mathrm{Aut}_X \tilde{X}$, c'est-à-dire à $\Gamma$).
Son groupe d'automorphismes est

$$\mathrm{Aut}\ \mathbf{C}^* = \{z \longmapsto \alpha z \quad \text{et} \quad z \longmapsto \frac{\alpha}{z} \quad ; \quad \alpha \in \mathbf{C}^*\}.$$

**Preuve** – Si $f \in \mathrm{Aut}\,\mathbf{C}^*$, il s'écrit $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Comme c'est injectif, la somme est finie (Casorati-Weierstrass) donc $f$ est une fraction rationnelle, sans zéro ni pôle hors de 0, donc $f = \alpha z^k$ $(k \in \mathbf{Z})$, et $k = \pm 1$ par injectivité. ■

(iii) $\Gamma = \omega_1\mathbf{Z} \oplus \omega_2\mathbf{Z}$ et $X$ est un tore $\boxed{X \simeq \mathbf{C}/\omega_1\mathbf{Z} \oplus \omega_2\mathbf{Z}}$. C'est une surface de Riemann compacte de genre 1, donc de $\pi_1 \simeq \mathbf{Z}^2$ (c'est bien $\simeq \Gamma$).

On a vu au (ii) que toutes les bandes $\mathbf{C}/\omega\mathbf{Z}$ sont isomorphes à $\mathbf{C}^*$. Que se passe-t-il pour les tores ?
Par homothétie, on voit que tout tore est, à isomorphisme près, de la forme $X_\tau = \mathbf{C}/\mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z}$ où $\tau \in \mathcal{H}$. Peut-on avoir un isomophisme $f : X_\tau \xrightarrow{\sim} X_{\tau'}$ ? Si oui, il se relève aux revêtements universels en un isomorphisme $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, donc $F(z) = \alpha z + \beta$ ; de plus $F$ doit passer au quotient, donc $F(z+1) - F(z)$ et $F(z+\tau) - F(z)$ sont dans $\mathbf{Z} \oplus \tau'\mathbf{Z}$, c'est-à-dire $\begin{cases} \alpha\tau = a\tau' + b \\ \alpha = c\tau' + d \end{cases}$ donc $\tau = \frac{a\tau'+b}{c\tau'+d}$ où $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$. Par symétrie entre $\tau$ et $\tau'$ la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est inversible, et donc $ad - bc = 1$ (c'est bien $+1$ car $\tau, \tau' \in \mathcal{H}$).
Réciproquement, si $\tau = \frac{a\tau'+b}{c\tau'+d}$ où $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$, alors la multiplication par $c\tau' + d$) définit un isomorphisme $X\tau \to X\tau'$.
Il y a ainsi une bijection naturelle $\tau \to X_\tau$ entre $SL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathcal{H}$ et les classes d'isomorphisme de tores : "l'espace des modules" des tores est $SL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathcal{H}$. On verra (chap. XI) que c'est une surface de Riemann isomorphe à $\mathbf{C}$.
On peut déterminer les automorphismes du tore :