Complemento: soluções da revisão P1.

① 1) Feito durante a aula: é só mostrar que intersecções de familias σ-aditivas são σ-aditivas.

2) Observação: uma familia σ-aditiva é uma σ-álgebra se e somente se ela é estável por intersecções finitas.

Agora é facil ver que: $\{A \in \mathcal{C}_\sigma \,/\, A\cap B \in \mathcal{C}_\sigma \ \forall B \in \mathcal{C}\}$ é σ-aditiva (feito em aula), mas essa coleção contem $\mathcal{C}$

então contem $\mathcal{C}_\sigma$ (mas é contida em $\mathcal{C}_\sigma$): então ela é exatamente $\mathcal{C}_\sigma$.

Isso implica: $\mathcal{B} := \{A \in \mathcal{C}_\sigma \,/\, A\cap B \in \mathcal{C}_\sigma \ \forall B \in \mathcal{C}_\sigma\} = \mathcal{C}_\sigma$. Porque? claramente $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}_\sigma$.

Mas $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$ (ver acima) e (lema facil), é σ-aditiva.

Concl: $\mathcal{C}_\sigma$ é estavel por intersecção finita $(\Rightarrow \mathcal{C}_\sigma = \sigma(\mathcal{C}))$.

② A μ-mensurável $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\forall P \subset A \\ \forall Q \subset A^c\end{array}\right\}$ temos $\mu(P) = \mu(P\cap A)$ e $\mu(Q) = \mu(Q\cap A^c)$.

Agora $\mu(P\cup Q) = \mu((P\cup Q)\cap A) + \mu((P\cup Q)\cap A^c) = \mu(P) + \mu(Q)$.

Reciproca: $\mu(R) = \mu((R\cap A)\cup(R\cap A^c)) = \mu(R\cap A) + \mu(R\cap A^c)$.

③ φ é aditiva, mas não σ-aditiva : $\underset{\underset{\infty}{\shortparallel}}{\varphi(\mathbb{N})} > \sum_p \varphi(p)$ que é finita.

Agora $\varphi^*(A) := \inf\limits_{\text{coberturas } U_n} \sum_n \varphi(U_n) = \sum_{p\in A} \frac{1}{p^2}$ (mesmo se $\mathrm{Card}(A) = \infty$).

Concl: φ e φ^* são 2 extensões diferentes da medida φ restrita na familia das partes finitas de $\mathbb{N}$.

④ Seja $\alpha_n > 0$, α_n decrescente, $\alpha_n \to 0$.

Então $f'(x) = \lim \frac{f(x+\alpha_n) - f(x)}{\alpha_n}$ é mensurável (lim de funções mensuráveis).

⑤ ⓐ f contínua em x significa: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ |x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Mas $\forall \delta > 0$ dado, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que: $|f(x) - r| < \delta$ e então $|f(x) - f(y)| < 2\delta$.

Assim a continuidade de f é equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \exists r \in \mathbb{Q},\ \ (x-\alpha, x+\alpha) \subset f^{-1}\big((r-\varepsilon, r+\varepsilon)\big).$$

No lugar de "$\forall \varepsilon > 0$" podemos escrever "$\forall \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*$", e isso mostra a proposição. (a recíproca é clara).

ⓑ Reuniões enumeráveis de abertas são em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, e intersecções enumeráveis de borelianos são em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

6 i) $\Rightarrow$ ii) feito em aula.

ii) $\Rightarrow$ i): Sejam A_n disjuntos: $\bigcup_{1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{1}^{k} A_n$ onde $\left(\bigcup_{1}^{n} A_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente. Mas μ aditiva $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{1}^{n} A_k\right) = \sum_{1}^{n} \mu(A_i)$.

Conseq:

$\mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_i\right) = \lim \mu\left(\bigcup_{1}^{n} A_k\right) = \sum_{1}^{\infty} \mu(A_k)$, i.e. μ é σ-aditiva.