Lógica Proposicional

Prof. Dr. Silvio do Lago Pereira

slago@ime.usp.br

1 Introdução

A *lógica proposicional* é um formalismo matemático através do qual podemos abstrair a estrutura de um argumento, eliminado a ambigüidade existente na linguagem natural. Esse formalismo é composto por uma linguagem formal e por um conjunto de regras de inferência que nos permitem analisar um argumento de forma precisa e decidir a sua validade [1,2,3].

Informalmente, um *argumento* é uma seqüência de *premissas* seguida de uma *conclusão*. Dizemos que um argumento é *válido* quando sua conclusão é uma conseqüência necessária de suas premissas. Por exemplo, o argumento

Sempre que chove, o trânsito fica congestionado.
Está chovendo muito.
Logo, o trânsito deve estar congestionado.

é válido; pois sua conclusão é uma conseqüência necessária de suas premissas.

1.1 Proposições

Uma *proposição* é uma declaração afirmativa à qual se pode associar um valor verdadeiro ou falso, mas não ambos. Por exemplo, "*O Brasil fica na América*" é uma proposição verdadeira, enquanto "*A lua é de queijo*" é uma proposição falsa. A proposição é o elemento básico a partir do qual os argumentos são construídos, sendo também o principal objeto de estudo na lógica proposicional.

2 Sintaxe da lógica proposicional

Os símbolos usados na lógica proposicional são as constantes $\perp$ (*falso*) e $\top$ (*verdade*), os símbolos proposicionais (*i.e.*, letras minúsculas do alfabeto latino, possivelmente indexadas) e os conectivos lógicos $\neg$ (*não*), $\wedge$ (*e*), $\vee$ (*ou*) e $\rightarrow$ (*então*). São *fórmulas bem-formadas* na lógica proposicional:

- as constantes $\perp$ e $\top$ (*valores-verdade*);
- os símbolos proposicionais;
- e, se α e β forem fórmulas bem-formadas[1], $\neg\alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ e $\alpha \rightarrow \beta$.

[1] Usamos letras minúsculas do alfabeto grego para denotar fórmulas genéricas.

Uma fórmula da forma $\neg\alpha$ é denominada *negação* da fórmula α e dizemos que α e $\neg\alpha$ são fórmulas *complementares*. Fórmulas da forma $\alpha \wedge \beta$ e $\alpha \vee \beta$ são denominadas, respectivamente, *conjunção* e *disjunção*. Uma fórmula da forma $\alpha \rightarrow \beta$ é denominada *condicional*, sendo α o seu *antecedente* e β o seu *conseqüente*.

A ordem de precedência dos conectivos é (da maior para a menor): $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$. Caso uma ordem diferente seja desejada, podemos usar parênteses. Por exemplo, na fórmula $\neg p \wedge q$, a negação afeta apenas o símbolo proposicional p; para que ela afete a conjunção de p e q, devemos escrever $\neg(p \wedge q)$.

2.1 Formalização de argumentos

Podemos usar a lógica proposicional para formalizar um argumento. No processo de formalização, devemos reconhecer as proposições e conectivos que compõem o argumento, de modo que possamos expressá-lo usando fórmulas bem-formadas. Como exemplo, vamos formalizar o seguinte argumento:

(1) *Se o time joga bem, ganha o campeonato.*
(2) *Se o time não joga bem, o técnico é culpado.*
(3) *Se o time ganha o campeonato, os torcedores ficam contentes.*
(4) *Os torcedores não estão contentes.*
(5) *Logo, o técnico é culpado.*

Primeiro, associamos a cada proposição um símbolo proposicional distinto:

p : *"o time joga bem"*
q : *"o time ganha o campeonato"*
r : *"o técnico é culpado"*
s : *"os torcedores ficam contentes"*

Em seguida, usando esses símbolos proposicionais, escrevemos as fórmulas correspondentes às sentenças do argumento:

(1) $p \rightarrow q$
(2) $\neg p \rightarrow r$
(3) $q \rightarrow s$
(4) $\neg s$
(5) r

Finalmente, podemos representar o argumento como:

$$\{p \rightarrow q,\ \neg p \rightarrow r,\ q \rightarrow s,\ \neg s\} \models r,$$

sendo que a notação $\Delta \models \phi$ estabelece que a fórmula ϕ é uma conseqüência lógica do conjunto de fórmulas Δ.

Exercício 1 *Usando lógica proposicional, formalize as sentenças a seguir:*

1. *Se Ana é alta e magra, então ela é elegante.*
2. *Se Beto é rico, então ele não precisa de empréstimos.*
3. *Se Caio ama a natureza, então ele ama as plantas e os animais.*
4. *Se Denis jogar na loteria, então ele ficará rico ou desiludido.*
5. *Se faz frio ou chove, então Eva fica em casa e vê tevê.* □

Exercício 2 *Usando a lógica proposicional, formalize os argumentos a seguir:*

– *Quando o filme é bom, o cinema fica lotado. Como a crítica diz que esse filme é muito bom, podemos imaginar que não encontraremos lugares livres.*
– *Sempre que chove à tarde, à noite, o trânsito na marginal do rio Tietê fica congestionado. Como agora à noite o trânsito na marginal está fluindo bem, concluímos que não choveu à tarde.*
– *Se existissem ET´s, eles já nos teriam enviado algum sinal. Se nos tivessem enviado um sinal, teríamos feito contato. Portanto, se existissem ET´s, já teríamos feito contato com eles.* □

3 Semântica da lógica proposicional

O significado de uma fórmula bem-formada é derivado da intepretação de seus símbolos proposicionais e da *tabela-verdade* dos conectivos lógicos (Tabela 1).

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$

Tabela 1. *Tabela-verdade dos conectivos*

Sejam ϕ uma fórmula bem-formada e P_ϕ o conjunto dos símbolos proposicionais que aparecem em ϕ. Uma *interpretação* I_ϕ é uma função $I_\phi : P_\phi \mapsto \{\bot, \top\}$, que associa a cada símbolo proposicional de ϕ um valor-verdade. Por exemplo, para $\phi \doteq p \wedge \neg q$, existem quatro interpretações distintas[2]:

– $I_\phi^1 = \{(p, \bot), (q, \bot)\}$
– $I_\phi^2 = \{(p, \bot), (q, \top)\}$
– $I_\phi^3 = \{(p, \top), (q, \bot)\}$
– $I_\phi^4 = \{(p, \top), (q, \top)\}$

[2] Em geral, o número de interpretações distintas para uma fórmula ϕ é $2^{|P_\phi|}$.

Dizemos que uma interpretação *satisfaz* uma fórmula se essa fórmula é verdadeira sob essa interpretação. Por exemplo, das quatro interpretações possíveis para a fórmula $\phi \doteq p \wedge \neg q$, apenas I_ϕ^3 satisfaz ϕ. Dizemos que uma fórmula ϕ é *satisfatível* se existe uma interpretação I_ϕ que satisfaz ϕ. Se toda interpretação I_ϕ satisfaz ϕ, dizemos que ϕ é *válida* (*tautologia*); e, por outro lado, se nenhuma interpretação I_ϕ satisfaz ϕ, dizemos que ϕ é *insatisfatível* (*contradição*) [1,3].

Exercício 3 *Usando tabela-verdade, mostre que a fórmula:*

- $p \vee \neg p$ *é uma tautologia.*
- $p \wedge \neg p$ *é uma contradição.* □

4 Validade de argumentos

Um argumento da forma $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta$ é *válido* se e somente se a fórmula $(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ é uma tautologia. Se um argumento $\Delta \models \phi$ é válido, dizemos que ϕ é uma *conseqüência lógica* de Δ. Como exemplo, vamos verificar a validade do argumento a seguir:

(1) *Se chove então a pista fica escorregadia.*
(2) *Está chovendo.*
(3) *Logo, a pista está escorregadia.*

Representando a proposição "*chove*" pelo símbolo proposicional p e a proposição "*pista escorregadia*" pelo símbolo q, podemos formalizar o argumento como:

$\{p \rightarrow q,\ p\} \models q$

Então, construindo a tabela-verdade para a fórmula $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ (Tabela 2), podemos ver que o argumento é realmente válido (pois a fórmula $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ é uma tautologia).

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Tabela 2. *Tabela-verdade para o argumento* $\{p \rightarrow q,\ p\} \models q$

Exercício 4 *Usando tabela-verdade, verifique a validade dos argumentos a seguir:*

- *Se chove, a rua fica molhada. A rua não está molhada. Logo, não choveu.*
- *Se chove, a rua fica molhada. A rua está molhada. Logo, choveu.* □

Embora a tabela-verdade seja um mecanismo bastante simples para verificar a validade de um argumento, dependendo do tamanho da fórmula, sua construção pode ser inviável. De modo geral, se uma fórmula contém n símbolos proposicionais distintos, sua tabela-verdade terá 2^n linhas (uma linha para cada interpretação possível). Por exemplo, a tabela-verdade para o argumento $\{p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, q \rightarrow s, \neg s\} \models r$ tem $2^4 = 16$ linhas. Assim, quando o número de proposições num argumento é muito grande, um método mais eficiente para sua validação é necessário. A seguir, apresentamos dois métodos para validação de argumentos que são mais eficientes que tabelas-verdades: prova e refutação.

4.1 Prova

Uma *prova* de uma fórmula ϕ, a partir de um conjunto de fórmulas Δ, consiste numa seqüência finita de fórmulas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, onde $\gamma_n = \phi$ e cada γ_i é uma fórmula em Δ ou é derivada de fórmulas em $\Delta \cup \{\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}\}$, por meio de uma regra de inferência. Usamos a notação $\Delta \vdash \phi$ para indicar que a fórmula ϕ pode ser derivada a partir das fórmulas em Δ (ou seja, que é possível provar ϕ a partir de Δ).

Uma *regra de inferência* é um padrão que estabelece como uma nova fórmula pode ser gerada a partir de outras duas. As regras de inferência clássicas (*modus ponens, modus tollens e silogismo hipotético*) representam formas de raciocínio dedutivo estudadas, desde a antiguidade, por *Aristóteles* (384-322 a.C.).

- **Modus Ponens (MP):** de $\alpha \rightarrow \beta$ e α, conclui-se β.
- **Modus Tollens (MT):** de $\alpha \rightarrow \beta$ e $\neg\beta$, conclui-se $\neg\alpha$.
- **Silogismo Hipotético (SH):** de $\alpha \rightarrow \beta$ e $\beta \rightarrow \gamma$, conclui-se $\alpha \rightarrow \gamma$.

Dado um conjunto de fórmulas Δ, uma regra de inferência é *correta* se permite derivar apenas fórmulas que são conseqüências lógicas de Δ e é *completa* se permite derivar todas as fórmulas que são conseqüências lógicas de Δ. As regras de inferência clássicas são corretas e completas para todo conjunto consistente de fórmulas bem-formadas da lógica proposicional [1].

Temos a seguir uma prova da validade do argumento $\{p \rightarrow q, \neg p \rightarrow r, q \rightarrow s, \neg s\} \vdash r$, usando as regras de inferência clássicas. Nessa prova, em cada linha, há uma justificativa de como a fórmula foi derivada. Por exemplo, a justificativa Δ na linha (1) indica que a fórmula $p \rightarrow q$ é uma premissa do argumento e a justificativa $SH(1,3)$, na linha (5), indica que a fórmula $p \rightarrow s$ foi derivada das fórmulas nas linhas (1) e (3), pela aplicação de *silogismo hipotético*.

(1)	$p \rightarrow q$	Δ
(2)	$\neg p \rightarrow r$	Δ
(3)	$q \rightarrow s$	Δ
(4)	$\neg s$	Δ
(5)	$p \rightarrow s$	$SH(1,3)$
(6)	$\neg p$	$MT(4,5)$
(7)	r	$MP(2,6)$

Exercício 5 *Prove usando regras de inferência clássicas:*

- $\{p \to q, \neg q, \neg p \to r\} \vdash r$
- $\{\neg p \to \neg q, q, p \to \neg r\} \vdash \neg r$
- $\{p \to q, q \to r, \neg r, \neg p \to s\} \vdash s$ □

4.2 Refutação

Embora a prova seja um mecanismo mais eficiente que a tabela-verdade, ainda é muito difícil obter algoritmos de prova baseados em derivação que possam ser implementados eficientemente em computadores. Nesse caso, podemos usar um terceiro mecanismo para validação de argumentos, denominado refutação.

A *refutação* é um processo em que se demonstra que uma determinada hipótese contradiz um conjunto de premissas consistente [1]. Dizemos que um conjunto de fórmulas é *consistente* se e só se existe uma interpretação para seus símbolos proposicionais que torna todas as suas fórmulas verdadeiras. Caso não exista uma tal interpretação, dizemos que o conjunto de fórmulas é *inconsistente*. Formalmente, dado um conjunto de fórmulas consistente Δ, provar $\Delta \vdash \gamma$ corresponde a demonstrar que $\Delta \cup \{\neg\gamma\}$ é inconsistente. Nesse contexto, a fórmula γ é denominada *tese* e a fórmula $\neg\gamma$ é denominada *hipótese*.

Para ter uma idéia intuitiva de refutação, considere o argumento a seguir:

Se o time joga bem, ganha o campeonato. (P1)
Se o time não joga bem, o técnico é culpado. (P2)
Se o time ganha o campeonato, os torcedores ficam contentes. (P3)
Os torcedores não estão contentes. (P4)
Logo, o técnico é culpado.

Nesse argumento, a tese é que "*o técnico é culpado*". Assim, vamos admitir como hipótese que "*o técnico* **não** *seja culpado*". O nosso objetivo é demonstrar que essa hipótese leva a uma contradição. Se tal contradição for encontrada, como o conjunto de premissas é consistente, podemos concluir que ela foi derivada da hipótese e que, portanto, a tese é uma conseqüência lógica das premissas.

(a)	*O técnico não é culpado.*	*hipótese*
(b)	*O time joga bem.*	$MT(a, P2)$
(c)	*O time ganha o campeonato.*	$MP(b, P1)$
(d)	*O torcedores ficam contentes.*	$MP(c, P3)$
(e)	*contradição!*	*confrontando (d) e* $P4$

Exercício 6 *Usando refutação, mostre que o argumento a seguir é válido:*

Se Ana sente dor estômago, ela fica irritada.
Se Ana toma remédio para dor de cabeça, ela sente dor de estômago.
Ana não está irritada.
Logo, ela não tomou remédio para dor de cabeça. □

Exercício 7 *Prove usando refutação:*

- $\{p \to q, \neg q, \neg p \to r\} \vdash r$
- $\{\neg p \to \neg q, q, p \to \neg r\} \vdash \neg r$
- $\{p \to q, q \to r, \neg r, \neg p \to s\} \vdash s$ $\square$

4.3 Inferência por resolução

Podemos automatizar o processo de refutação, descrevendo-o como um algoritmo computacional. Para que esse algoritmo seja mais simples e eficiente, é necessário que as fórmulas manipuladas por ele sejam convertidas em uma forma conhecida como *forma normal conjuntiva* (FNC).

Qualquer fórmula bem-formada pode ser convertida para a forma normal conjuntiva (ou seja, normalizada), através dos seguintes passos:

1º *elimine todas as implicações:* $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$
2º *reduza o escopo das negações:* $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$ e $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
3º *reduza o escopo das disjunções:* $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Como exemplo, vamos normalizar a fórmula $p \vee q \to r \wedge s$. Eliminando a implicação, obtemos $\neg(p \vee q) \vee (r \wedge s)$. Reduzindo o escopo da negação, obtemos $(\neg p \wedge \neg q) \vee (r \wedge s)$. Finalmente, reduzindo o escopo da disjunção, obtemos $((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee s)$. Como o terceiro passo ainda não foi concluído (veja que ainda há duas disjunções cujos escopos podem ser reduzidos), continuamos a conversão e obtemos $(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee s) \wedge (\neg q \vee s)$, que é a forma normal conjuntiva. Eliminando as conjunções na forma normal conjuntiva, obtemos o seguinte conjunto de *fórmulas normais* ou *cláusulas*: $\{\neg p \vee r, \neg q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s\}$.

Exercício 8 *Formalize as sentenças a seguir e normalize as fórmulas obtidas:*

- *Se não é noite e nem há lua cheia, então não há lobisomem.*
- *Se eu fosse rico ou famoso, não precisaria trabalhar tanto.*
- *Se o programa está correto, então o compilador não exibe mensagens de erro e gera um arquivo executável.*
- *Se o motorista é multado, então ele passou um sinal vermelho ou excedeu o limite de velocidade.* $\square$

A vantagem da FNC é que ela torna a forma das fórmulas mais simples e uniforme, permitindo o uso de resolução. *Resolução* é uma regra de inferência que generaliza as regras de inferência clássicas. A idéia da resolução é a seguinte: $RES(\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma) \equiv \alpha \vee \gamma$. Além disso, definimos $RES(\alpha, \neg\alpha) \equiv \square$. Note que a resolução é equivalente às três regras de inferência clássicas:

$MP(\alpha \to \beta, \alpha) \equiv \beta$ é equivalente a $RES(\neg\alpha \vee \beta, \alpha) \equiv \beta$
$MT(\alpha \to \beta, \neg\beta) \equiv \neg\alpha$ é equivalente a $RES(\neg\alpha \vee \beta, \neg\beta) \equiv \neg\alpha$
$SH(\alpha \to \beta, \beta \to \gamma) \equiv \alpha \to \gamma$ é equivalente a $RES(\neg\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma) \equiv \neg\alpha \vee \gamma$

Como exemplo, vamos usar a forma normal conjuntiva, resolução e refutação para provar a validade do argumento $\{p \to q, \neg p \to r, q \to s, \neg s\} \vdash r$:

(1)	$\neg p \vee q$	Δ
(2)	$p \vee r$	Δ
(3)	$\neg q \vee s$	Δ
(4)	$\neg s$	Δ
(5)	$\neg r$	*hipótese*
(6)	p	$RES(2,5)$
(7)	q	$RES(1,6)$
(8)	s	$RES(3,7)$
(9)	$\square$	$RES(4,8)$

Observe que, no processo de refutação, começamos resolvendo a hipótese com alguma cláusula em Δ. A partir daí, sempre usamos o resultado da última resolução efetuada, combinado com alguma cláusula em Δ. Se num desses passos não houver em Δ uma cláusula que possa ser utilizada pela resolução, então significa que a hipótese não produz contradição e que, portanto, a tese não é uma conseqüência lógica da base Δ.

Exercício 9 *Usando refutação e resolução, prove os argumento a seguir:*

– *O participante vai ao paredão se o lider o indica ou os colegas o escolhem. Se o participante vai ao paredão e chora, então ele conquista o público. Se o participante conquista o público, ele não é eliminado. O lider indicou um participante e ele foi eliminado. Logo, o participante não chorou.*
– *Se o programa é bom ou passa no horário nobre, o público assiste. Se o público assite e gosta, então a audiência é alta. Se a audiência é alta, a propaganda é cara. O programa, passa no horário nobre, mas a propaganda é barata. Logo, o público não gosta do programa.* $\square$

Referências

1. Genesereth, M. R. and Nilsson, N. J. *Logical Fundations of Artificial Intelligence*, Morgan Kaufmann Publishers, 1988.
2. Rich, E. and Knight, K. *Inteligência Artificial*, 2^a ed., Makron Books, 1995.
3. Russell, S. and Norvig, P. *Artificial Intelligence - A modern approach*, Prentice-Hall, 1995.