

MAT0222 - Álgebra Linear II - 2019, 1-a lista.

1 Corpos

1. Seja F um corpo. Mostre que em F valem:

a) $a \cdot 0 = 0, \forall a \in F,$

b) Se $a \cdot b = 0$ com $a, b \in F$, então $a = 0$ ou $b = 0$,

c) Se $a \in F$, $-a = (-1) \cdot a$.

2. Seja F um corpo. Definimos a *caraterística* $\text{car } F$ da seguinte maneira:

(i) se a soma $1 + 1 + \cdots + 1$ for sempre diferente de zero, então $\text{car } F = 0$,

(ii) se a soma $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_m = 0$ para algum $m \geq 2$, então $\text{car } F$ é o menor número m com esta propriedade.

a) Mostre que se $\text{car } F = m \neq 0$, então m é um número primo.

b) Exiba corpos infinitos com caraterísticas iguais a 0 e outros com caraterísticas distintas de 0.

3. Resolver em corpo $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ as equações

a) $x^2 - x - 3 = 0$,

b) $x^2 + (4 - 2\sqrt{2})x + 3 - 2\sqrt{2} = 0$.

4. Resolver o sistema
$$\begin{cases} x + \bar{2}z = \bar{1} \\ y + \bar{2}z = \bar{2} \\ \bar{2}x + z = \bar{1} \end{cases} \text{ em } \mathbf{Z}_5.$$

5. Resolver os sistemas abaixo:

a)
$$\begin{cases} \bar{3}x - \bar{5}y = \bar{1} \\ \bar{2}x - \bar{4}y = \bar{2} \end{cases} \text{ em } \mathbf{Z}_7.$$

b)
$$\begin{cases} (2 + 3\sqrt{2})x - 3y + z = 1 \\ (1 - \sqrt{2})x + \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \text{ em } \mathbf{Q}(\sqrt{2}).$$

b)
$$\begin{cases} ix + y = 2 \\ 2ix - y = 1 \end{cases} \text{ em } \mathbf{C}.$$

2 Funcionais lineares e espaços duais

Nos exercícios abaixo F denota um corpo, V um espaço vetorial sobre F , V^* um espaço dual do V .

1. a) Se $v \in V$ um vetor não nulo, mostre que existe $f \in V^*$ tal que $f(v) \neq 0$.
b) Mostre que se $f(v) = 0, \forall f \in V^*$, então $v = 0$.

2. Seja $V = \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ e sejam $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ definidos por

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x)dx, \quad f_3(p) = \int_0^{-1} p(x)dx.$$

- a) Mostre que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é uma base de V^* ,
b) Exiba uma base de V da qual $\{f_1, f_2, f_3\}$ seja a base dual.
3. Sejam $V = \mathbf{R}^3$, $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, -2)$, $u_3 = (-1, 1, 0) \in V$.
a) Seja $f \in V^*$ tal que $f(u_1) = 1$, $f(u_2) = -1$, $f(u_3) = 3$. Determine $f(u)$ para $u = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.
b) Se $f \in V^*$ é tal que $f(u_1) = f(u_2) = 0$ e $f(u_3) \neq 0$, mostre que $f(2, 3, -1) \neq 0$.
4. Considere no $\mathbf{C}$ -espaço $\mathbf{C}^3$ a base $\mathcal{B} = \{(1, 0, i), (1, i, 1), (1, 1, 0)\}$. Determine a base dual $\mathcal{B}^*$.
5. Seja $V = M_n(F)$, $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$. Definimos o *trazo* da matriz A , denotado por $\text{tr } A$, por $\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.
a) Prove que o traço tr é um funcional linear sobre $M_n(F)$.
b) Prove que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, $\forall A, B \in M_n(F)$.
6. Duas matrizes $A, B \in M_n(F)$ chamam-se *semelhantes* se existir uma matriz inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Prove que se A e B são semelhantes então $\det A = \det B$, $\text{tr } A = \text{tr } B$.
7. Sejam $A, B \in M_n(F)$, donde $\text{car } F = 0$. Mostre que a igualdade $AB - BA = E$ nunca é satisfeita, onde E é a matriz identidade.
8. Sejam $V = F^n$, $f_1, \dots, f_m \in V^*$. Para cada $v \in V$ definimos $T(v) = (f_1(v), \dots, f_m(v))$. Provar que T é uma transformação linear de F^n em F^m , e que toda transformação linear de F^n em F^m é da forma acima para certos funcionais $f_1, \dots, f_m$.
9. Sejam $F = \mathbf{R}$, $f, g \in V^*$ tais que a função h definida por $h(u) = f(u)g(u)$ também seja um funcional linear sobre V . Demonstre que $f = 0$ ou $g = 0$.

10. Seja $V = \mathcal{P}_2(\mathbf{R})$ e sejam $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ definidos por

$$f_1(p) = \int_0^1 p(t)dt, \quad f_2(p) = p'(1), \quad f_3(p) = p(0).$$

Encontre a base $\{p_1, p_2, p_3\}$ de V cuja base dual seja $\{f_1, f_2, f_3\}$.

11. Seja $W \subseteq (\mathbf{R}^4)^*$ um subespaço formado pelos funcionais $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$ tais que $\ker f$ contém os vetores $(1, 0, 3, -2)$ e $(0, 1, 3, 0)$. Ache uma base de W .
12. Sejam $u, v \in V$ tais que $f(u) = 0 \Rightarrow f(v) = 0, \forall f \in V^*$. Mostre que $v = \alpha u$ para algum $\alpha \in F$.
13. Seja $H \subset \mathbf{R}^n$ um subespaço vetorial de dimensão $n-1$. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbf{R}^n$ uma base de $\mathbf{R}^n$ cujos primeiros $n-1$ vetores formam uma base de H , e considere a base dual $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ da base $\mathcal{B}$. Prove que $f_n(v) = 0$ para cada $v \in H$.
14. Seja $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i \in I}$ uma base de V . Para cada $i \in I$, defina um funcional linear $f_i : V \rightarrow F$ tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$.
- a) Mostre que o sistema $\{f_i\}_{i \in I}$ é L.I.
- b) Mostre que $\{f_i\}_{i \in I}$ é uma base de V^* se e somente se I for finito.
15. Seja $V = \mathcal{P}(\mathbf{R})$. Para cada $\alpha \in \mathbf{R}$, defina $f_\alpha \in V^*$ dado por $f_\alpha(p(t)) = p(\alpha)$. Mostre que $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{R}}$ é um conjunto L.I. em V^* . Conclua que uma base de V^* é não enumerável.
16. Encontre as bases duais e biduais de cada uma das seguintes bases do $\mathbf{R}^3$.
- a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
- b) $\{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$.
17. Seja $0 \neq f \in V^*$, mostre que existe $v \in V$ tal que $V = \ker f \oplus Fv$.
18. Seja $W \subsetneq V$ e considere $f \in W^*$. Mostre que existe $g \in V^*$ tal que $g(w) = f(w)$ para cada $w \in W$.
19. Seja $\dim V \geq 2$ e $0 \neq f_1, f_2 \in V^*$ tais que $\ker f_1 \neq \ker f_2$. Determine as dimensões de cada um dos subespaços $\ker f_1, \ker f_2, \ker f_1 \cap \ker f_2, \ker f_1 + \ker f_2$.
20. Se $0 \neq f \in V^*$ e $\alpha \in F$, prove que $\{v \in V \mid f(v) = \alpha\}$ é um hiperplano afim.
21. Seja V de dimensão finita. Mostre que todo subespaço próprio de V é uma intersecção finita de hiperplanos de V .
22. Sejam $f, g \in V^*$. Prove que se $\ker f = \ker g$ então existe $0 \neq \alpha \in F$ tal que $f(v) = \alpha g(v), \forall v \in V$.

23. Sejam U, V espaços vetoriais sobre F e W um hiperplano de U . Mostre que se $T : U \rightarrow V$ for um isomorfismo, então $T(W) = \{T(w) \mid w \in W\}$ é um hiperplano de V .
24. Sejam W_1, W_2 dois subespaços de V . Prove que $W_1 = W_2 \Leftrightarrow W_1^0 = W_2^0$.
25. Determine o anulador W^0 de subespaço W gerado pelos vetores
- $u_1 = (1, 0, -1, 2), u_2 = (2, 3, 1, 1) \in \mathbf{R}^4$,
 - $u_1 = (1, 2, 1, 0, 0), u_2 = (1, 0, 3, 3, 1), u_3 = (1, 4, 6, 4, 1) \in \mathbf{R}^5$.
26. Sejam $W_1, W_2 \subseteq V$, onde $\dim V < \infty$.
- Demonstre que $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.
 - Demonstre que $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.
27. Mostre que se $S_1 \subseteq S_2 \subseteq V$ então $S_2^0 \subseteq S_1^0$.
28. Seja $f \in (\mathbf{R}^2)^*$ definido por $f(x, y) = 3x - 2y$. Determine $T^t(f)$ quando a transformação $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ é dada por
- $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$,
 - $T(x, y, z) = (x + y, 2x - y)$.
29. Seja $f \in (\mathbf{C}^3)^*$ dado por $f(x, y, z) = 5x - iz$ e $T \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^2, \mathbf{C}^3)$ dada por $T(x, y) = (2x + y, y - x, iy)$. Calcule $T^t(f)$.
30. Sejam $V = \mathcal{P}(\mathbf{R})$, $a, b \in \mathbf{R}$ e $f \in V^*$ definido por

$$f(p) = \int_a^b p(x) dx.$$

31. Se $D \in \mathcal{L}(V)$ é o operador derivação, determine $D^t(f)$.
32. Seja $v \in V$ é um autovetor de um operador linear $T \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n < \infty$ com autovalor $\alpha \in F$. Provar que existe $0 \neq f \in V^*$ tal que $T^t(f) = \alpha f$.
33. Sejam $V = \mathcal{P}_n(\mathbf{R})$ e $D \in \mathcal{L}(V)$ o operador derivação em V . Determine $\ker D^t$.
34. Seja $V = U \oplus W$. Considere a projeção $\pi : V \rightarrow U$ definida por $\pi(v) = u$, se $v = u + w$. Obtenha a transposta π^t .
35. Uma sequência de espaços vetoriais e aplicações lineares $V_0 \xrightarrow{f_1} V_1 \xrightarrow{f_2} V_2 \xrightarrow{f_3} \dots$ chama-se *exata* se a imagem de cada aplicação é igual ao núcleo da aplicação seguinte: $\text{Im } f_k = \ker f_{k+1}$. Prove que:
- A sequência $0 \rightarrow U \xrightarrow{f} V$ é exata se e somente se f é injetora.

- b) A sequência $U \xrightarrow{f} V \rightarrow 0$ é exata se e somente se f é sobrejetora.
- c) A sequência de espaços de dimensão finita $0 \rightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \rightarrow 0$ é exata se e somente se assim o é a sequência dual $0 \rightarrow W^* \xrightarrow{g^t} V^* \xrightarrow{f^t} U^* \rightarrow 0$.

3 Formas Canônicas

- Em cada um dos casos abaixo, decida se o operador linear $T : F^n \rightarrow F^n$, ($\text{car } F = 0$) dado pela sua matriz $[T]$ na base canônica do F^n , é diagonalizável. Em caso positivo, calcule uma base de autovetores e a sua forma diagonal.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -3 & -7 & -3 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.
- Seja $T \in \mathcal{L}(V)$. Mostre que se todo vetor de V for autovetor de T , então existe $\lambda \in F$ tal que $T(v) = \lambda v$, $\forall v \in V$.
- Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\dim(\text{Im } T) = m$. Mostre que T tem no máximo $m + 1$ autovalores.
- Seja $T \in \mathcal{L}(F^2)$ tal que $T^2 = 0$. Mostre que
 - $\text{Im } T \subseteq \ker T$,
 - Se $T \neq 0$, então existe base $\mathcal{B}$ de F^2 tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Seja $A \in M_2(\mathbf{R})$, $A^t = A$. Mostre que A é diagonalizável.
- Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ tal que $T^2 = T$. Prove que $T = 0$ ou $T = \mathcal{E}$ ou existe uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^2$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Mostre que se $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$, então seu polinômio característico é dado por $p_T(x) = x^2 - a_1x + a_0$, onde $a_0 = \det T$ e $a_1 = \text{tr } T$.
- Mostre que se $A \in M_n(\mathbf{R})$ é diagonalizável, então a matriz A^m é diagonalizável qualquer que seja o número natural $m \geq 1$.
- Exiba uma matriz A não diagonalizável tal que a matriz A^2 seja diagonalizável.
- Mostre que se $B, M \in M_n(F)$ com M invertível, então
 - $(M^{-1}BM)^n = M^{-1}B^nM$,
 - $p(M^{-1}BM) = M^{-1}p(B)M$ para um polinômio $p(x) \in F[x]$.
 - Calcule A^{100} onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

11. Achar uma matriz $X \in M_2(\mathbf{R})$ tal que $X^2 = A$ quando

$$a) A = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

12. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}))$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{B} = \{\frac{1}{2}x^2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}x\}$ e $\mathcal{C} = \{x^2, x, 1\}$; Mostre que T é diagonalizável.

13. Determine todos os valores de $a, b, c \in \mathbf{C}$ para os quais a matriz abaixo seja diagonalizável:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbf{R}))$, $T(ax^2 + bx + c) = (2a - b + c)x^2 + (a + c)x + 2c$. Escreva T como soma direta de dois operadores.

15. Prove que qualquer operador linear no espaço vetorial complexo de dimensão n possui um subespaço invariante de dimensão $n - 1$.

16. Achar todos os subespaços invariantes para o operador D de derivação no espaço $\mathcal{P}_n(\mathbf{R})$.

17. Mostre que as duas matrizes semelhantes tem os mesmos polinômios característico e minimal.

18. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostre que A e B têm polinômios característicos diferentes mas têm o mesmo polinômio minimal.

19. Seja $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in F[x]$. A seguinte matriz quadrada $n \times n$ é chamada *matriz companheira* de $f(x)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Mostre que $f(x)$ é o polinômio minimal e característico de A .

20. Encontre uma matriz A cujo polinômio minimal é
- $x^3 - 5x^2 + 6x + 8$,
 - $x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 7x + 4$.
21. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4)$ uma transformação linear com polinômio característico $p_T(x)$. Verifique se T é diagonalizável em cada um dos seguintes casos:
- $p_T(x) = x^4 - 1$,
 - $p_T(x) = x^3(x + 1)$ e $\dim \ker T = 2$,
 - $p_T(x) = x^2(x^2 - 4)$ e $\dim \ker T = 2$,
 - $p_T(x) = x^2(x - 2)^2$ e $\dim \ker T = 2$.
22. Seja $T \in \mathcal{L}(M_n(\mathbf{R}))$ o operador linear tal que $T(A) = A^t$, para todo $A \in M_n(\mathbf{R})$, onde A^t denota a transposta de A . Prove que T é diagonalizável.
23. Determine o polinômio minimal de matriz:
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.
24. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_n(\mathbf{R}))$ definido por $T : f(x) \rightarrow f(x + 1)$ para todo $f(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbf{R})$. É T diagonalizável? Por quê?
25. Determine o número matrizes não semelhantes A em $M_5(\mathbf{R})$ que verificam $(A + E)^3 = 0$.
26. Seja $A \in M_6(\mathbf{R})$ tal que $A^4 - 8A^2 + 16E = 0$. Quais são as possíveis formas de Jordan não semelhantes para A ?
27. Verifique se as seguintes matrizes são semelhantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

28. Ache a forma de Jordan J da matriz $A \in M_4(\mathbf{R})$, onde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

e ache uma matriz invertível $M \in M_4(\mathbf{R})$ de tal maneira que $M^{-1}AM = J$.

29.

30. Ache a forma de Jordan das seguintes matrizes

$$a) \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

31. Ache a forma de Jordan da matriz de um operador linear $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ e uma base onde T tem esta matriz, se a matriz de T na base canônica de $\mathbf{R}^n$ é dada como:

$$a) \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

32. Seja $A \in M_9(\mathbf{R})$ cujo polinômio característico é $(x - 3)^5(x - 2)^4$ e cujo polinômio minimal é $(x - 3)^3(x - 2)^2$. Dê as possíveis formas de Jordan de A .

33. Determine todas as possíveis formas de Jordan de uma matriz em $M_n(\mathbf{C})$, $n \geq 3$ de posto 2.

34. Ache a forma de Jordan da matriz $A \in M_n(\mathbf{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

35. Usando forma de Jordan, calcule

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}, \quad b) \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}^{64}.$$

A LISTA DEVERÁ SER ENTREGUE AO MONITOR
até o dia **23.04.19**.

Parte 1: 5a, 5b.

Parte 2: 2, 3a, 10, 11, 16b, 25a, 28b, 29.

Parte 3: 1c, 5, 7, 10c, 12, 13, 18, 20a, 21iii, 23a, 25, 27, 30a, 35a