

Soluções analíticas globais para equações de evolução não-lineares

Rafael Barostichi

Trabalho em colaboração com Alex Himonas, Gerson Petronilho e Renata Figueira

UFSCar - Campus de São Carlos

October 24, 2019

Introdução

Introdução

Boa postura em espaços de funções analíticas

Introdução

Boa postura em espaços de funções analíticas

Soluções analíticas globais

Introdução

Boa postura em espaços de funções analíticas

Soluções analíticas globais

KdV modificada com dispersão elevada

Introdução

1834: Scott Russel relatou a observação de sua "onda de translação", conhecida hoje como **soliton** ou **onda solitária**, que ele observou no canal de Edinburgh na Escócia enquanto seguia a cavalo uma onda produzida por uma barçaça.

Introdução

Abaixo, segue sua própria descrição do fenômeno que observou:

"Eu estava observando o movimento de um barco que era puxado ao longo de um canal por um par de cavalos, quando o barco parou subitamente - não que a massa de água no canal foi posta em movimento; ela se acumulou ao redor da proa da barcaça em um estado de agitação violenta, e então repentinamente a deixou para trás, e se moveu para a frente com grande velocidade, assumindo a forma de uma elevação solitária larga, um monte de água arredondado, suave e bem definido, que continuou seu curso ao longo do canal aparentemente sem mudança de forma ou diminuição de velocidade. Eu a segui a cavalo e a ultrapassei quando ela ainda se movia a uma taxa de aproximadamente oito ou nove milhas por hora, preservando sua figura original, de aproximadamente trinta pés de comprimento e um pé a um pé e meio de altura. Sua altura gradualmente diminuiu, e depois de segui-la por uma ou duas milhas, eu a perdi nos ventos do canal. Tal, no mês de Agosto de 1834, foi minha primeira oportunidade de observar aquele fenômeno belo e singular, que eu chamei de onda de translação."

Introdução

1872: Boussinesq, em sua tentativa de explicar o soliton, derivou aproximações para as equações de Navier-Stokes em diversas formas, entre elas a equação

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0 \quad (1)$$

que foi o primeiro modelo que descreveu matematicamente o fenômeno das ondas solitárias, e que é conhecida hoje em dia como a equação de Boussinesq "ruim".

Introdução

1872: Boussinesq, em sua tentativa de explicar o soliton, derivou aproximações para as equações de Navier-Stokes em diversas formas, entre elas a equação

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0 \quad (1)$$

que foi o primeiro modelo que descreveu matematicamente o fenômeno das ondas solitárias, e que é conhecida hoje em dia como a equação de Boussinesq "ruim". Aqui, consideraremos a versão "boa" dessa equação, dada por

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0. \quad (2)$$

Introdução

1872: Boussinesq, em sua tentativa de explicar o soliton, derivou aproximações para as equações de Navier-Stokes em diversas formas, entre elas a equação

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0 \quad (1)$$

que foi o primeiro modelo que descreveu matematicamente o fenômeno das ondas solitárias, e que é conhecida hoje em dia como a equação de Boussinesq "ruim". Aqui, consideraremos a versão "boa" dessa equação, dada por

$$u_{tt} - u_{xx} + u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0. \quad (2)$$

A razão para essa nomenclatura está no fato de que é possível estudar a boa postura local para a equação (2), o que não é o caso da versão "ruim".

Introdução

Além desta, Boussinesq apresentou também em seu trabalho a chamada **equação de KdV**

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0. \quad (3)$$

Introdução

Além desta, Boussinesq apresentou também em seu trabalho a chamada **equação de KdV**

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0. \quad (3)$$

1895: Korteweg e de Vries rederivaram a equação de KdV, apresentando neste trabalho a existência de soluções para a KdV que descrevem ondas viajantes (solitons).

Introdução

Além desta, Boussinesq apresentou também em seu trabalho a chamada **equação de KdV**

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0. \quad (3)$$

1895: Korteweg e de Vries rederivaram a equação de KdV, apresentando neste trabalho a existência de soluções para a KdV que descrevem ondas viajantes (solitons). Desde então, foi produzida uma extensa literatura abordando esta equação sob os mais diversos aspectos.

Introdução

Além desta, Boussinesq apresentou também em seu trabalho a chamada **equação de KdV**

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0. \quad (3)$$

1895: Korteweg e de Vries rederivaram a equação de KdV, apresentando neste trabalho a existência de soluções para a KdV que descrevem ondas viajantes (solitons). Desde então, foi produzida uma extensa literatura abordando esta equação sob os mais diversos aspectos.

No início dos anos 1960, vários trabalhos começaram a aparecer, abordando uma equação dada pela modificação mais simples possível na parte não-linear da equação de KdV:

$$u_t + u_{xxx} + u^2 u_x = 0, \quad (4)$$

a qual ficou conhecida como Equação de KdV modificada (mKdV).

Introdução

Além desta, Boussinesq apresentou também em seu trabalho a chamada **equação de KdV**

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0. \quad (3)$$

1895: Korteweg e de Vries rederivaram a equação de KdV, apresentando neste trabalho a existência de soluções para a KdV que descrevem ondas viajantes (solitons). Desde então, foi produzida uma extensa literatura abordando esta equação sob os mais diversos aspectos.

No início dos anos 1960, vários trabalhos começaram a aparecer, abordando uma equação dada pela modificação mais simples possível na parte não-linear da equação de KdV:

$$u_t + u_{xxx} + u^2u_x = 0, \quad (4)$$

a qual ficou conhecida como Equação de KdV modificada (mKdV).

A equação mKdV também possui soluções do tipo soliton, além de descrever uma série de fenômenos, tais como propagação de ondas em superfícies eletrohidrodinâmicas.

Introdução

Entretanto, as soluções do tipo "onda viajante" da equação de KdV são sempre suaves, fato que levou a uma investigação sobre a existência de modelos que descrevessem ondas solitárias que admitissem "picos".

Introdução

Entretanto, as soluções do tipo "onda viajante" da equação de KdV são sempre suaves, fato que levou a uma investigação sobre a existência de modelos que descrevessem ondas solitárias que admitissem "picos".

1981: Fokas e Fuchssteiner obtiveram a chamada **equação de Camassa-Holm (CH)**

$$(1 - \partial_x^2)u_t + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0, \quad (5)$$

baseada em simetrias hereditárias de sistemas bi-hamiltonianos (integrabilidade).

Introdução

Entretanto, as soluções do tipo "onda viajante" da equação de KdV são sempre suaves, fato que levou a uma investigação sobre a existência de modelos que descrevessem ondas solitárias que admitissem "picos".

1981: Fokas e Fuchssteiner obtiveram a chamada **equação de Camassa-Holm (CH)**

$$(1 - \partial_x^2)u_t + 3uu_x - 2u_x u_{xx} - uu_{xxx} = 0, \quad (5)$$

baseada em simetrias hereditárias de sistemas bi-hamiltonianos (integrabilidade).

1993: Camassa e Holm rederivaram a equação CH, partindo das equações de Euler, e mostraram que esta equação admite ondas viajantes com picos (**peakons**) que interagem exatamente como solitons.

Introdução

2009: Novikov derivou em torno de 20 novas equações integráveis, dentre elas a chamada equação de Novikov:

$$(1 - \partial_x^2)u_t = u^2 u_{xxx} + 3u u_x u_{xx} - 4u^2 u_x. \quad (6)$$

Introdução

2009: Novikov derivou em torno de 20 novas equações integráveis, dentre elas a chamada equação de Novikov:

$$(1 - \partial_x^2)u_t = u^2 u_{xxx} + 3u u_x u_{xx} - 4u^2 u_x. \quad (6)$$

Essas duas últimas equações podem ser englobadas em uma mesma família de equações, a qual nos referimos como equação de Camassa-Holm generalizada (gCH):

$$(1 - \partial_x^2)u_t = u^k u_{xxx} + (k+1)u^{k-1}u_x u_{xx} - (k+2)u^k u_x. \quad (7)$$

Introdução

2009: Novikov derivou em torno de 20 novas equações integráveis, dentre elas a chamada equação de Novikov:

$$(1 - \partial_x^2)u_t = u^2 u_{xxx} + 3u u_x u_{xx} - 4u^2 u_x. \quad (6)$$

Essas duas últimas equações podem ser englobadas em uma mesma família de equações, a qual nos referimos como equação de Camassa-Holm generalizada (gCH):

$$(1 - \partial_x^2)u_t = u^k u_{xxx} + (k+1)u^{k-1}u_x u_{xx} - (k+2)u^k u_x. \quad (7)$$

Além de possuir soluções do tipo peakon para todo $k = 1, 2, 3, \dots$, e de ser localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R})$, para $s > 5/2$, a norma H^1 das soluções de (7) é conservada, o que nos permite mostrar que as soluções locais em H^s se estendem globalmente no tempo.

Table of Contents

Introdução

Boa postura em espaços de funções analíticas

Soluções analíticas globais

KdV modificada com dispersão elevada

Para $\delta > 0$ e $s \in \mathbb{R}$, definimos

$$G^{\delta,s}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \|f\|_{G^{\delta,s}}^2 = \int e^{2\delta|\xi|} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\},$$

sendo $\langle \cdot \rangle \doteq 1 + |\cdot|$.

Para $\delta > 0$ e $s \in \mathbb{R}$, definimos

$$G^{\delta,s}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \|f\|_{G^{\delta,s}}^2 = \int e^{2\delta|\xi|} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\},$$

sendo $\langle \cdot \rangle \doteq 1 + |\cdot|$.

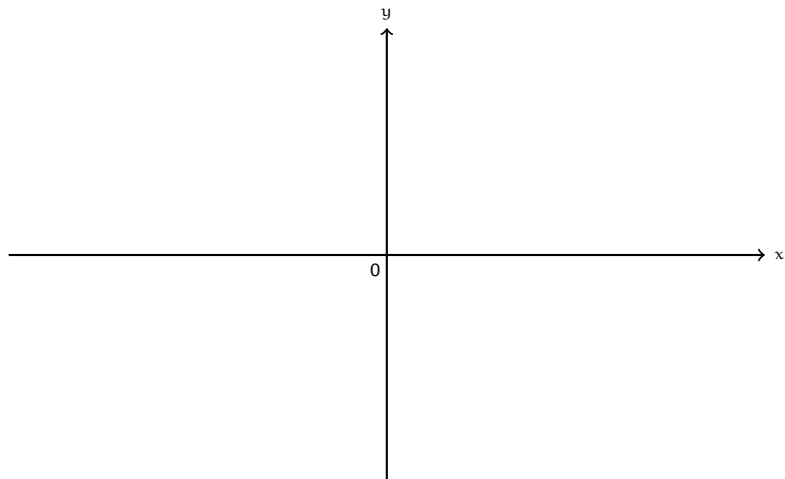
- ▶ Se $\varphi \in G^{\delta,s}(\mathbb{R})$ então φ é analítica em \mathbb{R} , para quaisquer $\delta > 0$ e $s \in \mathbb{R}$.

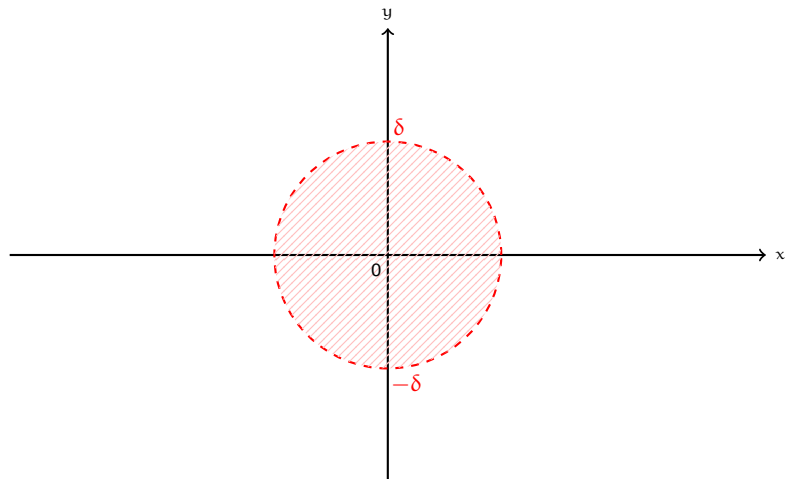
Para $\delta > 0$ e $s \in \mathbb{R}$, definimos

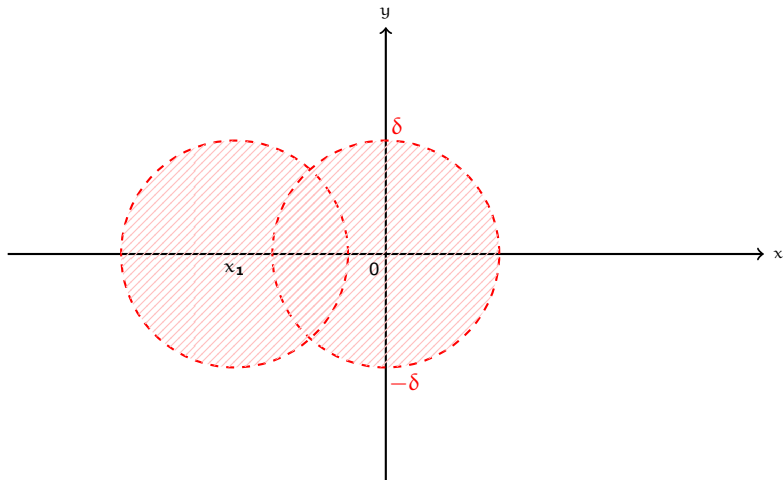
$$G^{\delta,s}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); \|f\|_{G^{\delta,s}}^2 = \int e^{2\delta|\xi|} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\},$$

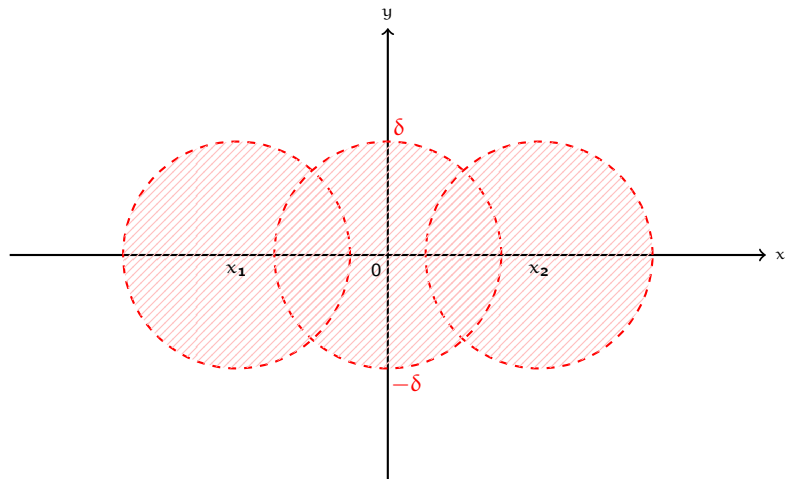
sendo $\langle \cdot \rangle \doteq 1 + |\cdot|$.

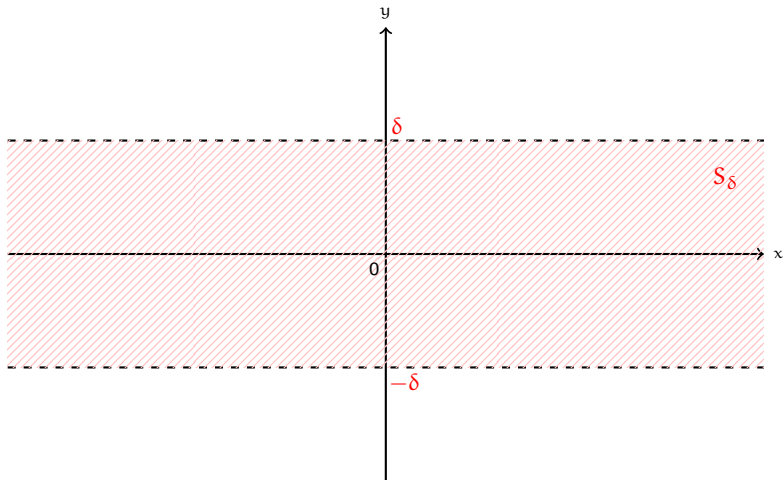
- ▶ Se $\varphi \in G^{\delta,s}(\mathbb{R})$ então φ é analítica em \mathbb{R} , para quaisquer $\delta > 0$ e $s \in \mathbb{R}$.
- ▶ Além disso, se $\varphi \in G^{\delta,s}(\mathbb{R})$ então φ pode ser estendida holomorficamente na faixa $S_\delta = \{x + iy : |y| < \delta\}$ do plano complexo.











Equação de Camassa-Holm generalizada

No caso da equação gCH, podemos aplicar o operador inverso de $(1 - \partial_x^2)$ e escrever o problema de Cauchy da seguinte forma não-local:

$$u_t = (1 - \partial_x^2)^{-1} \left[u^k u_{xxx} + (k+1)u^{k-1}u_x u_{xx} - (k+2)u^k u_x \right], \quad u(0) = u_0. \quad (8)$$

Equação de Camassa-Holm generalizada

No caso da equação gCH, podemos aplicar o operador inverso de $(1 - \partial_x^2)$ e escrever o problema de Cauchy da seguinte forma não-local:

$$u_t = (1 - \partial_x^2)^{-1} \left[u^k u_{xxx} + (k+1)u^{k-1}u_x u_{xx} - (k+2)u^k u_x \right], \quad u(0) = u_0. \quad (8)$$

Dessa forma, podemos utilizar uma versão abstrata do teorema de Cauchy-Kovalevski para provar o seguinte resultado:

Teorema 1 (B., Himonas and Petronilho, 2016)

Seja $s > 1/2$. Se $u_0 \in G^{1,s+2}$ então existe um tempo positivo T , que depende do dado inicial u_0 e de s , tal que, para todo $\delta \in (0, 1)$, o problema de Cauchy (8) tem uma única solução analítica em $(-T(1-\delta), T(1-\delta))$ com valores em $G^{\delta,s+2}$. Além disso, o lifespan analítico satisfaz a estimativa

$$T \approx \frac{1}{\|u_0\|_{1,s+2}^k}.$$

Ainda, a aplicação dado-para-solução é contínua.

A "boa" equação de Boussinesq

Para o problema de Cauchy associado à "boa" equação de Boussinesq

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \partial_x^4 u + \partial_x^2(u^2) = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \partial_t u(x, 0) = \partial_x u_1(x), \end{cases} \quad (9)$$

A "boa" equação de Boussinesq

Para o problema de Cauchy associado à "boa" equação de Boussinesq

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \partial_x^4 u + \partial_x^2(u^2) = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \partial_t u(x, 0) = \partial_x u_1(x), \end{cases} \quad (9)$$

o resultado de boa postura aqui obtido é o seguinte:

Teorema 2 (B., Figueira and Himonas, 2019)

Sejam $s > -1/4$, e $\delta > 0$. Para dados iniciais $(u_0, u_1) \in G^{\delta, s} \times G^{\delta, s-1}$, existem $T = T(u_0, u_1) > 0$, dado por

$$T = \frac{c}{(1 + \|u_0\|_{G^{\delta, s}} + \|u_1\|_{G^{\delta, s-1}})^{\alpha}}$$

e uma única solução

$$u \in C([0, T]; G^{\delta, s})$$

para o problema de Cauchy (9). Além disso, a aplicação dado-para-solução é localmente lipschitziana.

A "boa" equação de Boussinesq

Para provar este resultado, nos apoiamos no resultado de boa postura em H^s estabelecido por Farah (2009).

A "boa" equação de Boussinesq

Para provar este resultado, nos apoiamos no resultado de boa postura em H^s estabelecido por Farah (2009).

A estratégia consiste em aplicar a transformada parcial de Fourier na variável espacial no PVI (9), resolver a EDO assim obtida e tomar (formalmente) a transformada de Fourier inversa de modo a obter uma equação integral do tipo

$$u = \Phi(u).$$

A "boa" equação de Boussinesq

Para provar este resultado, nos apoiamos no resultado de boa postura em H^s estabelecido por Farah (2009).

A estratégia consiste em aplicar a transformada parcial de Fourier na variável espacial no PVI (9), resolver a EDO assim obtida e tomar (formalmente) a transformada de Fourier inversa de modo a obter uma equação integral do tipo

$$u = \Phi(u).$$

O trabalho consiste então em mostrar que a aplicação Φ assim obtida é uma contração em algum espaço métrico completo, e então aplicar o teorema do ponto fixo para contrações.

A "boa" equação de Boussinesq

Para provar este resultado, nos apoiamos no resultado de boa postura em H^s estabelecido por Farah (2009).

A estratégia consiste em aplicar a transformada parcial de Fourier na variável espacial no PVI (9), resolver a EDO assim obtida e tomar (formalmente) a transformada de Fourier inversa de modo a obter uma equação integral do tipo

$$u = \Phi(u).$$

O trabalho consiste então em mostrar que a aplicação Φ assim obtida é uma contração em algum espaço métrico completo, e então aplicar o teorema do ponto fixo para contrações.

As normas utilizadas aqui são inspiradas nos chamados espaços de Bourgain, introduzidos por ele para estudar a boa postura da equação de KdV em H^s .

Regularidade no tempo

Uma diferença importante entre esses dois resultados de boa postura reside na regularidade no tempo da solução. Enquanto que o teorema de boa postura para a equação gCH garante que a solução é analítica em ambas as variáveis, tempo e espaço, o resultado para a equação gB garante apenas a analiticidade na variável espacial.

Regularidade no tempo

Uma diferença importante entre esses dois resultados de boa postura reside na regularidade no tempo da solução. Enquanto que o teorema de boa postura para a equação gCH garante que a solução é analítica em ambas as variáveis, tempo e espaço, o resultado para a equação gB garante apenas a analiticidade na variável espacial.

De fato, nós mostramos que, para dados iniciais analíticos, a solução terá regularidade Gevrey de ordem 2 na variável temporal. Mais geralmente, se os dados iniciais forem Gevrey de ordem σ , então a solução será Gevrey de ordem 2σ no tempo.

Regularidade no tempo

Uma diferença importante entre esses dois resultados de boa postura reside na regularidade no tempo da solução. Enquanto que o teorema de boa postura para a equação gCH garante que a solução é analítica em ambas as variáveis, tempo e espaço, o resultado para a equação gB garante apenas a analiticidade na variável espacial.

De fato, nós mostramos que, para dados iniciais analíticos, a solução terá regularidade Gevrey de ordem 2 na variável temporal. Mais geralmente, se os dados iniciais forem Gevrey de ordem σ , então a solução será Gevrey de ordem 2σ no tempo.

Um problema ainda em aberto aqui consiste em mostrar que essa regularidade no tempo é ótima.

Table of Contents

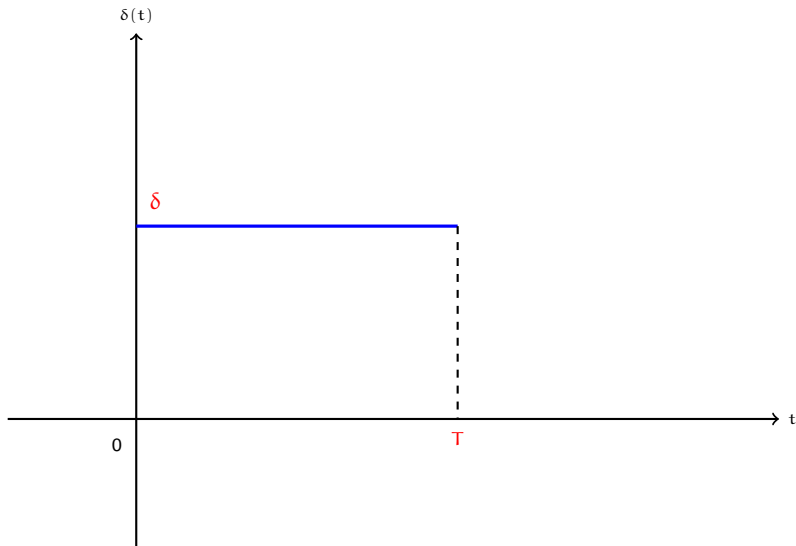
Introdução

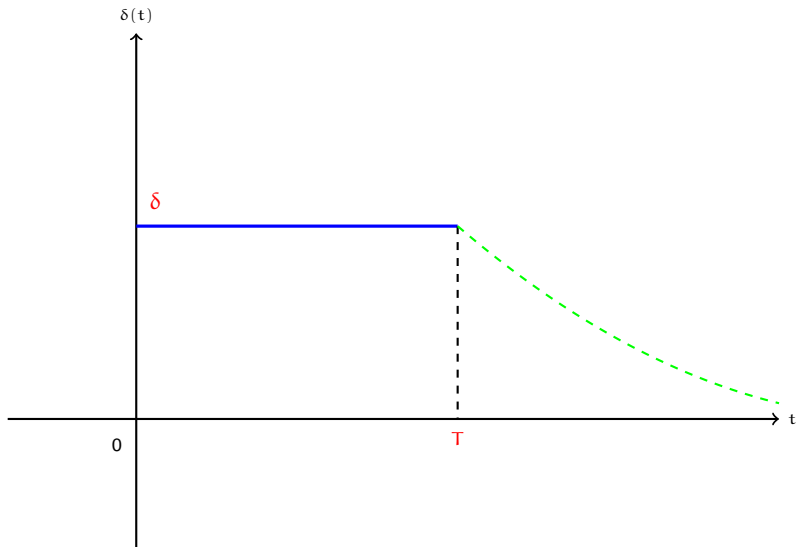
Boa postura em espaços de funções analíticas

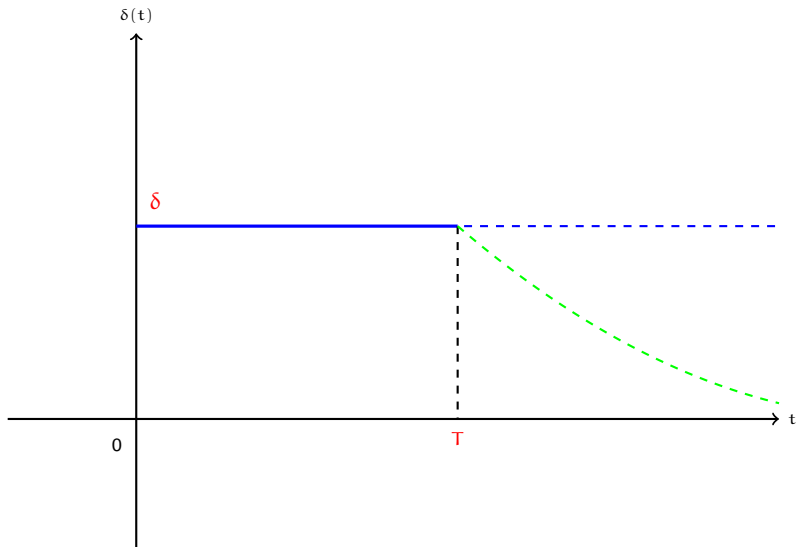
Soluções analíticas globais

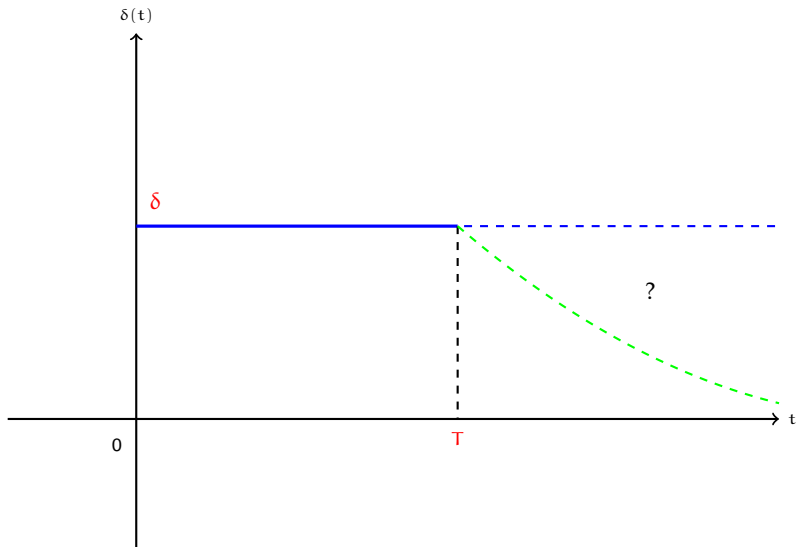
KdV modificada com dispersão elevada

O problema relacionado à existência de soluções analíticas globais no tempo tem sido estudado por vários autores nos últimos 30 anos. Quando é possível garantir a existência de solução analítica global, uma pergunta muito interessante a ser feita é o que acontece com o raio de analiticidade uniforme da solução na variável espacial, à medida que o tempo avança.









Analiticidade global para soluções da equação de KdV

No que se refere a soluções analíticas globais para a equação de KdV:

- ▶ Kato e Masuda (1986) provaram uma taxa de decaimento super-exponencial para o raio de analiticidade uniforme da forma $r(t) \geq Ae^{-Be^{Ct}}$;

Analiticidade global para soluções da equação de KdV

No que se refere a soluções analíticas globais para a equação de KdV:

- ▶ Kato e Masuda (1986) provaram uma taxa de decaimento super-exponencial para o raio de analiticidade uniforme da forma $r(t) \geq Ae^{-Be^{Ct}}$;
- ▶ Bona, Grujic e Kalisch (2005) melhoraram esse decaimento para outro não mais rápido que t^{-12} ;

Analiticidade global para soluções da equação de KdV

No que se refere a soluções analíticas globais para a equação de KdV:

- ▶ Kato e Masuda (1986) provaram uma taxa de decaimento super-exponencial para o raio de analiticidade uniforme da forma $r(t) \geq Ae^{-Be^{Ct}}$;
- ▶ Bona, Grujic e Kalisch (2005) melhoraram esse decaimento para outro não mais rápido que t^{-12} ;
- ▶ Selberg e da Silva (2017) melhoraram ainda mais para $t^{-4/3}$;

Analicidade global para soluções da equação de KdV

No que se refere a soluções analíticas globais para a equação de KdV:

- ▶ Kato e Masuda (1986) provaram uma taxa de decaimento super-exponencial para o raio de analiticidade uniforme da forma $r(t) \geq Ae^{-Be^{Ct}}$;
- ▶ Bona, Grujic e Kalisch (2005) melhoraram esse decaimento para outro não mais rápido que t^{-12} ;
- ▶ Selberg e da Silva (2017) melhoraram ainda mais para $t^{-4/3}$;
- ▶ O método utilizado por Selberg e da Silva consiste em estabelecer a existência de certas quantidades "quase" conservadas para garantir que a norma da solução cresce devagar o suficiente de modo que podemos aplicar repetidamente o resultado local de modo a estender a solução em intervalos arbitrariamente grandes $[0, T]$, tomando para isso o raio de analiticidade uniforme $\delta = \delta(T)$ suficientemente pequeno.

A equação de Camassa-Holm generalizada

Para a equação gCH

$$\begin{cases} (1 - \partial_x^2)u_t = u^k u_{xxx} + (k+1)u^{k-1}u_x u_{xx} - (k+2)u^k u_x \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (10)$$

o resultado global obtido foi o seguinte:

Teorema 3 (B., Himonas e Petronilho, 2017)

Se $u_0 \in G^{1,s+2}(\mathbb{R})$, $s > 1/2$, e $m(0) \doteq (1 - \partial_x^2)u_0$ não muda de sinal, então o problema de Cauchy (10) tem uma única solução analítica global $u \in C^\omega(\mathbb{R}_x \times [0, \infty)_t)$. Além disso, para qualquer tempo $T > 0$, o raio de analiticidade da solução $r(t)$ satisfaz a seguinte estimativa

$$r(t) \geq Ae^{-Be^{Ct}}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (11)$$

- ▶ A técnica utilizada aqui baseia-se na existência de solução global em H^∞ , a qual foi provada por Himonas e Thompson (2017), aliada a um método de energia devido a Kato e Masuda (1986).

- ▶ A técnica utilizada aqui baseia-se na existência de solução global em H^∞ , a qual foi provada por Himonas e Thompson (2017), aliada a um método de energia devido a Kato e Masuda (1986).
- ▶ A existência de uma lei de conservação (no caso, em H^1) para gCH é crucial aqui.

- ▶ A técnica utilizada aqui baseia-se na existência de solução global em H^∞ , a qual foi provada por Himonas e Thompson (2017), aliada a um método de energia devido a Kato e Masuda (1986).
- ▶ A existência de uma lei de conservação (no caso, em H^1) para gCH é crucial aqui.
- ▶ Himonas e Petronilho (2018) melhoraram a estimativa acima para a equação de Camassa-Holm, obtendo um decaimento não mais rápido que exponencial.

- ▶ A técnica utilizada aqui baseia-se na existência de solução global em H^∞ , a qual foi provada por Himonas e Thompson (2017), aliada a um método de energia devido a Kato e Masuda (1986).
- ▶ A existência de uma lei de conservação (no caso, em H^1) para gCH é crucial aqui.
- ▶ Himonas e Petronilho (2018) melhoraram a estimativa acima para a equação de Camassa-Holm, obtendo um decaimento não mais rápido que exponencial.
- ▶ Obter um decaimento polinomial para o raio de analiticidade uniforme da solução é ainda um problema em aberto.

- ▶ A técnica utilizada aqui baseia-se na existência de solução global em H^∞ , a qual foi provada por Himonas e Thompson (2017), aliada a um método de energia devido a Kato e Masuda (1986).
- ▶ A existência de uma lei de conservação (no caso, em H^1) para gCH é crucial aqui.
- ▶ Himonas e Petronilho (2018) melhoraram a estimativa acima para a equação de Camassa-Holm, obtendo um decaimento não mais rápido que exponencial.
- ▶ Obter um decaimento polinomial para o raio de analiticidade uniforme da solução é ainda um problema em aberto.
- ▶ Um de nossos objetivos é utilizar o resultado local obtido para a "boa" equação de Boussinesq para estudar a existência de soluções analíticas globais bem como a evolução do raio de analiticidade uniforme.

Table of Contents

Introdução

Boa postura em espaços de funções analíticas

Soluções analíticas globais

KdV modificada com dispersão elevada

Consideremos inicialmente o PVI para a equação de KdV modificada (mKdV):

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + u^2 u_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (12)$$

Consideremos inicialmente o PVI para a equação de KdV modificada (mKdV):

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + u^2 u_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (12)$$

1983: T. Kato provou a boa postura local de (12) em vários espaços, incluindo $H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq 2$ e o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Consideremos inicialmente o PVI para a equação de KdV modificada (mKdV):

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + u^2 u_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (12)$$

1983: T. Kato provou a boa postura local de (12) em vários espaços, incluindo $H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq 2$ e o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1993: Kenig, Ponce e Vega provaram o mesmo para $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq 1/4$.

Consideremos inicialmente o PVI para a equação de KdV modificada (mKdV):

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + u^2 u_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (12)$$

1983: T. Kato provou a boa postura local de (12) em vários espaços, incluindo $H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq 2$ e o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1993: Kenig, Ponce e Vega provaram o mesmo para $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq 1/4$.

2000: Kenig, Ponce e Vega provaram que o problema é mal posto quando $s < 1/4$, mostrando assim que a hipótese $s \geq 1/4$ é ótima.

Consideremos inicialmente o PVI para a equação de KdV modificada (mKdV):

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + u^2 u_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (12)$$

1983: T. Kato provou a boa postura local de (12) em vários espaços, incluindo $H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq 2$ e o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1993: Kenig, Ponce e Vega provaram o mesmo para $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq 1/4$.

2000: Kenig, Ponce e Vega provaram que o problema é mal posto quando $s < 1/4$, mostrando assim que a hipótese $s \geq 1/4$ é ótima.

2003: Usando a boa postura global para KdV com $s > -3/4$, J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka e T. Tao provaram a boa postura global para mKdV com $s > 1/4$.

Consideremos inicialmente o PVI para a equação de KdV modificada (mKdV):

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + u^2 u_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (12)$$

1983: T. Kato provou a boa postura local de (12) em vários espaços, incluindo $H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq 2$ e o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1993: Kenig, Ponce e Vega provaram o mesmo para $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq 1/4$.

2000: Kenig, Ponce e Vega provaram que o problema é mal posto quando $s < 1/4$, mostrando assim que a hipótese $s \geq 1/4$ é ótima.

2003: Usando a boa postura global para KdV com $s > -3/4$, J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka e T. Tao provaram a boa postura global para mKdV com $s > 1/4$.

2009: Kishimoto provou a boa postura global para $s \geq 1/4$.

Considere o PVI para a seguinte equação de KdV modificada com dispersão elevada (mKdVm):

$$\begin{cases} u_t + (-1)^{j+1} \partial_x^m u + u^2 u_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \quad (13)$$

sendo $m = 2j + 1 \geq 5$.

Considere o PVI para a seguinte equação de KdV modificada com dispersão elevada (mKdVm):

$$\begin{cases} u_t + (-1)^{j+1} \partial_x^m u + u^2 u_x = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \quad (13)$$

sendo $m = 2j + 1 \geq 5$.

Definimos aqui o seguinte índice:

$$s_m \doteq \max \left\{ -\frac{m-2}{6}, -\frac{14m-55}{60} \right\} = -\min \left\{ \frac{m-2}{6}, \frac{14m-55}{60} \right\}. \quad (14)$$

Boa postura da mKdVm em H^s

Teorema 4 (B., Figueira and Himonas, 2019)

Suponha que $m \geq 5$ e $s \geq s_m$. Então, o PVI (13) é bem posto em $H^s(\mathbb{R})$.
Mais precisamente, dado $\varphi \in H^s$, existem $T_0 > 0$ given by

$$T_0 = \frac{c_0}{(1 + \|\varphi\|_{H^s})^\beta}, \quad (15)$$

sendo $c_0 > 0$ e $\beta = 10^+$, e uma única solução $u \in C([0, T]; H^s)$ para o problema de Cauchy (13). Além disso, a solução depende continuamente do dado inicial.

Boa postura da mKdVm em H^s

Teorema 4 (B., Figueira and Himonas, 2019)

Suponha que $m \geq 5$ e $s \geq s_m$. Então, o PVI (13) é bem posto em $H^s(\mathbb{R})$.
Mais precisamente, dado $\varphi \in H^s$, existem $T_0 > 0$ given by

$$T_0 = \frac{c_0}{(1 + \|\varphi\|_{H^s})^\beta}, \quad (15)$$

sendo $c_0 > 0$ e $\beta = 10^+$, e uma única solução $u \in C([0, T]; H^s)$ para o problema de Cauchy (13). Além disso, a solução depende continuamente do dado inicial.

- Note que $s_m < 0$, para todo $m \geq 5$.

Boa postura da mKdVm em H^s

Teorema 4 (B., Figueira and Himonas, 2019)

Suponha que $m \geq 5$ e $s \geq s_m$. Então, o PVI (13) é bem posto em $H^s(\mathbb{R})$.
Mais precisamente, dado $\varphi \in H^s$, existem $T_0 > 0$ given by

$$T_0 = \frac{c_0}{(1 + \|\varphi\|_{H^s})^\beta}, \quad (15)$$

sendo $c_0 > 0$ e $\beta = 10^+$, e uma única solução $u \in C([0, T]; H^s)$ para o problema de Cauchy (13). Além disso, a solução depende continuamente do dado inicial.

- Note que $s_m < 0$, para todo $m \geq 5$.
- Ainda, $s_m \rightarrow -\infty$ quando $m \rightarrow \infty$.

Boa postura da mKdVm em espaços analíticos

Teorema 5 (B., Figueira and Himonas, 2019)

Suponha que $m \geq 5$, $s \geq s_m$ e $\delta > 0$. Então, o PVI (13) é bem posto em $G^{\delta,s}(\mathbb{R})$. Mais precisamente, dado $\varphi \in G^{\delta,s}$, existem $T_0 > 0$ given by

$$T_0 = \frac{c_0}{(1 + \|\varphi\|_{H^s})^\beta}, \quad (16)$$

sendo $c_0 > 0$ e $\beta = 10^+$, e uma única solução $u \in C([0, T]; G^{\delta,s})$ para o problema de Cauchy (13). Além disso, a solução depende continuamente do dado inicial.

Soluções analíticas globais para mKdVm

O método que utilizamos para provar a existência de soluções analíticas globais no tempo, bem como obter uma estimativa para o decaimento do raio de analiticidade uniforme, é o mesmo utilizado por Selberg e da Silva (2017), e consiste em estabelecer a existência de certas quantidades "quase" conservadas para garantir que a norma da solução cresce devagar o suficiente de modo que podemos aplicar repetidamente o resultado local de modo a estender a solução em intervalos arbitrariamente grandes $[0, T]$, tomando para isso o raio de analiticidade uniforme $\delta = \delta(T)$ suficientemente pequeno.

Soluções analíticas globais para mKdVm

O método que utilizamos para provar a existência de soluções analíticas globais no tempo, bem como obter uma estimativa para o decaimento do raio de analiticidade uniforme, é o mesmo utilizado por Selberg e da Silva (2017), e consiste em estabelecer a existência de certas quantidades "quase" conservadas para garantir que a norma da solução cresce devagar o suficiente de modo que podemos aplicar repetidamente o resultado local de modo a estender a solução em intervalos arbitrariamente grandes $[0, T]$, tomando para isso o raio de analiticidade uniforme $\delta = \delta(T)$ suficientemente pequeno.

A seguir, enunciaremos a lei de conservação aproximada obtida para mKdVm.

Bourgain type spaces

Definição 1 (Os espaços de Bourgain $X_{\delta,s,b}$.)

Sejam $\delta > 0$ e $s, b \in \mathbb{R}$. Definimos a norma no espaço $X_{\delta,s,b}$ por

$$\|u\|_{X_{\delta,s,b}} = \left(\iint_{\mathbb{R}^2} e^{2\delta|\xi|} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^m \rangle^{2b} |\hat{u}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{1/2}, \quad (17)$$

sendo $\langle \cdot \rangle = 1 + |\cdot|$. Ainda, dado $T > 0$, $X_{\delta,s,b}^T$ denota o espaço localizado, munido com a norma

$$\|u\|_{X_{\delta,s,b}^T} = \inf_{\tilde{u} \in X_{\delta,s,b}} \left\{ \|\tilde{u}\|_{X_{\delta,s,b}} ; \tilde{u}(\cdot, t) = u(\cdot, t) \text{ for all } t \in (0, T) \right\}. \quad (18)$$

Lei de conservação aproximada

Teorema 6 (B., Figueira and Himonas, 2019)

Seja $m = 2j + 1 \geq 5$. Dado μ tal que

$$0 \leq \mu \leq \min \left\{ 1, \frac{m-2}{6}, \frac{14m-55}{60} \right\} = \min\{1, -s_m\}, \quad (19)$$

existem $b \in (1/2, 1)$ e $C > 0$, tais que, para quaisquer $\delta, T > 0$ e qualquer solução $u \in X_{\delta,0,b}^T$ de (13) no intervalo $[0, T]$, temos

$$\sup_{|t| \leq T} \|u(t)\|_{G^{\delta,0}}^2 \leq \|u(0)\|_{G^{\delta,0}}^2 + C\delta^\mu \|u\|_{X_{\delta,0,b}^T}^4. \quad (20)$$

Soluções analíticas globais

Teorema 7 (B., Figueira and Himonas, 2019)

Sejam $\delta_0 > 0$, $s \geq s_m$ e $\varphi \in G^{\delta_0, s}(\mathbb{R})$. A solução u obtida no Teorema 5 se estende globalmente no tempo, e para qualquer $T > 0$, temos

$$u \in C([0, T], G^{\delta(T), s}(\mathbb{R})),$$

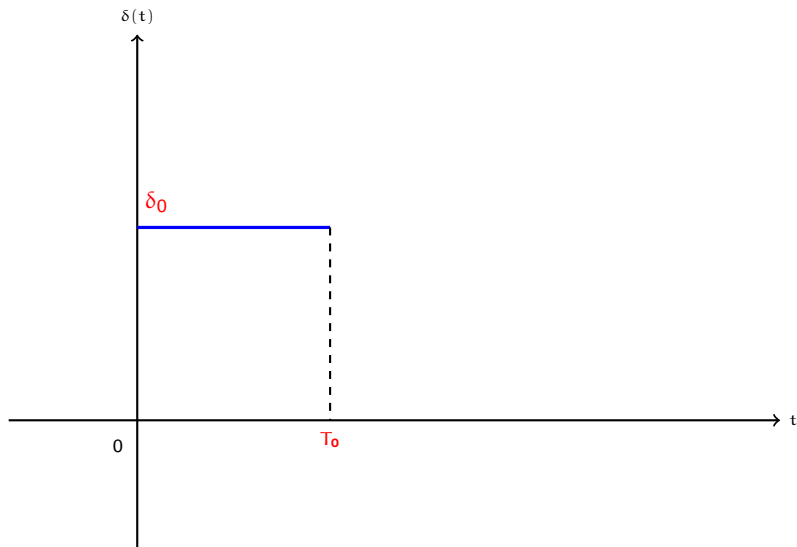
sendo

$$\delta(T) = \min \left\{ \delta_0, \frac{c}{T^\alpha} \right\}, \quad (21)$$

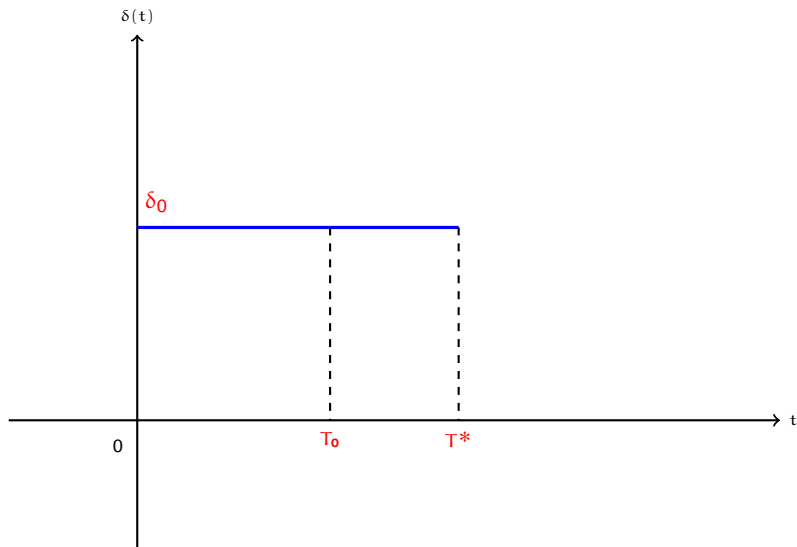
e $\alpha = 1/\mu = \max \left\{ -\frac{1}{s_m}, 1 \right\}$, ou seja,

$\alpha = 4$	$m = 5$
$\alpha = 60/43$	$m = 7$
$\alpha = 1$	$m = 2j + 1 \geq 9$

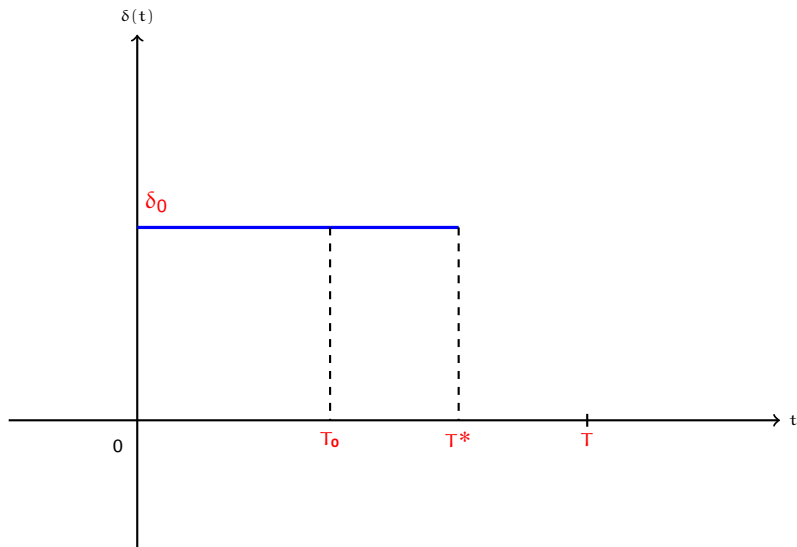
Prova do Teorema 7



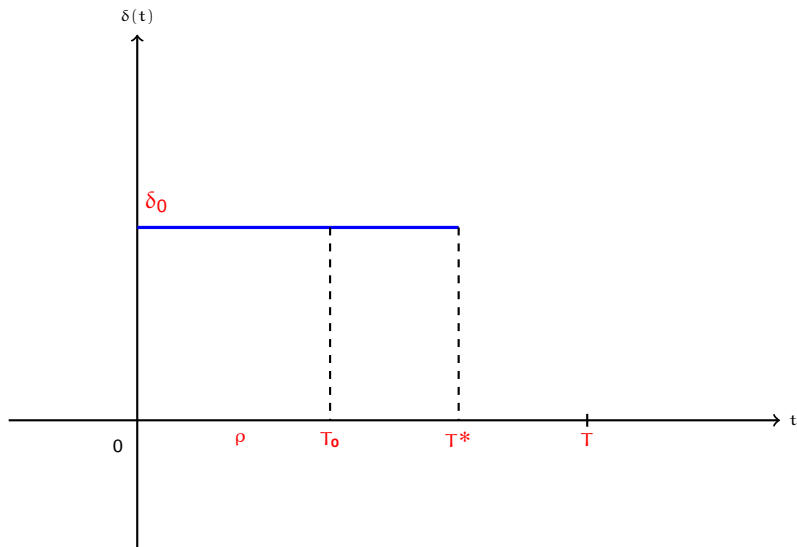
Prova do Teorema 7



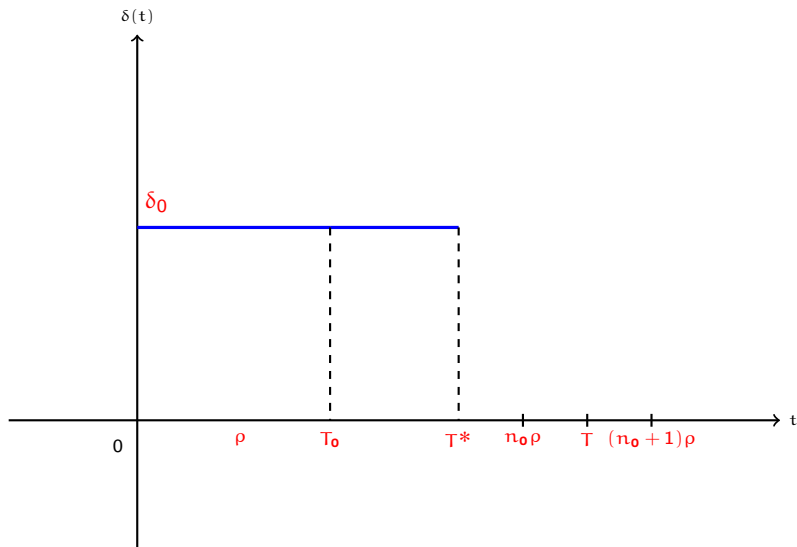
Prova do Teorema 7



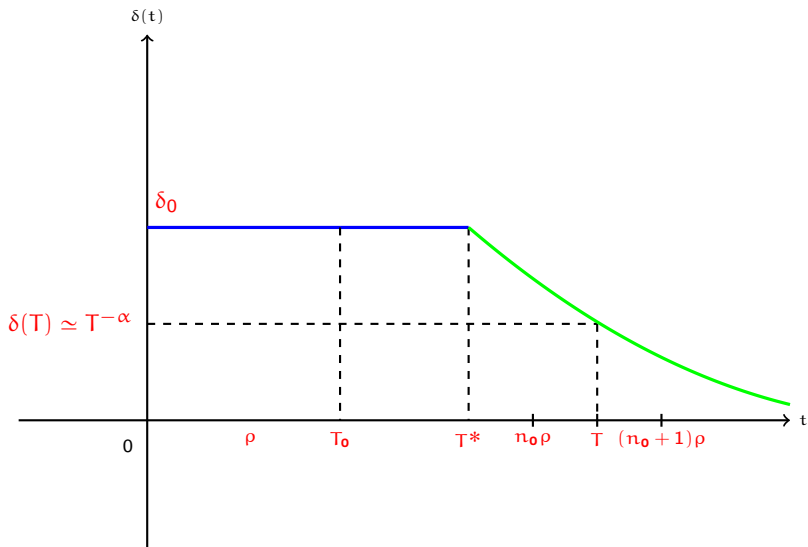
Prova do Teorema 7



Prova do Teorema 7



Prova do Teorema 7



Referências

- [BG] M. S. Baouendi e C. Goulaouic, *Remarks on the abstract form of nonlinear Cauchy-Kovalevsky theorems*. Comm. in Partial Differential Equations, **2**(11), (1977), 1151–1162.
- [BHP1] R. F. Barostichi, A. Himonas and G. Petronilho, *The power series method for nonlocal and nonlinear evolution equations*, J. Math. Anal. Appl., **443**, (2016), 834–847.
- [BHP2] R. F. Barostichi, A. Himonas and G. Petronilho, *Global analyticity for a generalized Camassa-Holm equation and decay of the radius of spatial analyticity*, J. Diff. Equations, **263** (2017), 732–764.
- [BFH] R. F. Barostichi, R. O. Figueira and A. Himonas, *Well-posedness of the good Boussinesq equation in analytic Gevrey spaces and time regularity*, J. Diff. Equations, **267**, (2019), 3181–3198.
- [BGK] J. Bona, Z. Grujić and H. Kalisch, *Algebraic lower bounds for the uniform radius of spatial analyticity for the generalized KdV equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinéaire **22**, n. 6, (2005), 783–797.

Referências

- [CH] R. Camassa e D. Holm, *An integrable shallow water equation with peaked solitons*, Phys. Rev. Lett., 71, (1993).
- [CKSTT] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, *Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on \mathbb{R} and \mathbb{T}* , J. of the American Mathematical Society **16**, n. 3 (2003), 705–749.
- [F] L.G. Farah, *Local solutions in Sobolev spaces with negative indices for the “good” Boussinesq equation*, CPDE **34** (2009), 52–73.
- [HKS] A. Himonas, H. Kalisch and S. Selberg, *On persistence of spatial analyticity for the dispersion-generalized periodic KdV equation*, Nonlinear Analysis: Real World Applications **38** (2017), 35–48.
- [HP] A. Himonas and G. Petronilho, *Radius of analyticity for the Camassa-Holm equation on the line*, Nonlinear Analysis-Theory, Methods & Applications, v. 174, (2018), p. 1–16.

Referências

- [KM] T. Kato and K. Masuda, *Nonlinear evolution equations and analyticity I*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinéaire **3**, n. 6, (1986), 455–467.
- [KPV1] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. on Pure and Applied Mathematics **46** (1993), 527–620.
- [KPV2] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *On the ill-posedness of some canonical dispersive equations*, Duke Mathematical Journal **106** (2001), 617–633.
- [SS] S. Selberg and D. O. da Silva, *Lower bounds on the radius of spatial analyticity for the KdV equation*, Ann. H. Poincaré **18**, n. 3 (2017), 1009–1023.