Soluções Estatísticas para Equações de Evolução

Anne Bronzi
IMECC-UNICAMP

Trabalho em colaboração com Cecilia Mondaini (Drexel University) e Ricardo Rosa (UFRJ)

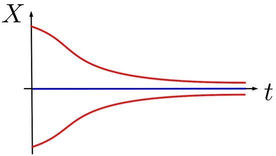
Introdução

Soluções Estatísticas

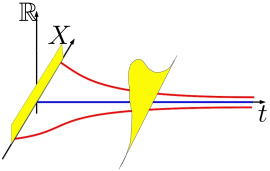
- descrevem a evolução da distribuição de probabilidade de condições iniciais
- estão relacionadas ao transporte de medidas via semigrupo
- são usadas na formalização da teoria de turbulência

Evolução da distribuição de probabilidade

Soluções individuais de $\dfrac{dx}{dt} = -x$:



Evolução da distribuição de probabilidade de condições iniciais



Créditos das figuras: Ricardo Rosa

Teoria de turbulência

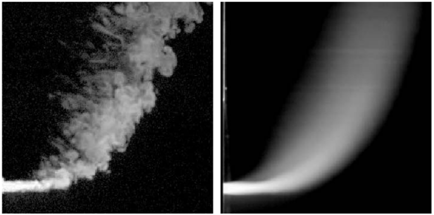


Figure 1.3 Instantaneous and time-averaged views of a jet in cross flow. The jet exits from the wall at left into a stream flowing from bottom to top (Su and Mungal 1999).

Quantidades médias

- médias temporáis e espaciais:
$$U(x,t) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} u(y,t)\,dy;$$
- médias amostrais: $V(x,t) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} u^{(i)}(x,t)$, onde cada $u^{(i)}$ é uma solução individual das equações de Navier-Stokes.

Teoria de turbulência

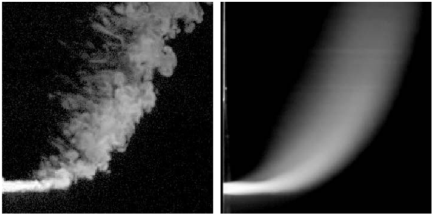


Figure 1.3 Instantaneous and time-averaged views of a jet in cross flow. The jet exits from the wall at left into a stream flowing from bottom to top (Su and Mungal 1999).

Quantidades médias

- médias temporáis e espaciais: Resultados rigorosos podem ser obtidos a partir das soluções individuais das equações de Navier-Stokes
- médias amostrais: Resultados rigorosos podem ser obtidos a partir da noção de solução estatística

Equações de Navier-Stokes

Considere as equações de Navier-Stokes em três dimensões

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

onde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ é o campo de velocidades, $\nu > 0$ é a viscosidade, p é a pressão e $\mathbf{f}$ é a força externa.
Espaços de funções:

- $H = \{\mathbf{u}$ campo vetorial periódico, $\mathbf{u} \in L^2, \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \int \mathbf{u} = 0\}$;
- $V = \{\mathbf{u}$ campo vetorial periódico, $\mathbf{u} \in H^1, \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \int \mathbf{u} = 0\}$;
- H_w = H munido da topologia fraca.

Formulação funcional das equações de Navier-Stokes

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} - \nu A\mathbf{u} - B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

onde A é o operador de Stokes e $B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbb{P}[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}], \mathbf{u} \in V$.

Soluções fracas de Leray-Hopf

Seja $\mathbf{f} \in L^2_{loc}(0, \infty, V')$. Um campo vetorial $\mathbf{u}$ é uma solução fraca de Leray-Hopf se,

(i) $\mathbf{u} \in L^\infty_{loc}(0, \infty; H) \cap L^2_{loc}(0, \infty; V) \cap C_{loc}([0, \infty), H_w)$, $\partial_t \mathbf{u} \in L^{4/3}_{loc}(0, \infty; , V')$;

(ii) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu(\!(\mathbf{u}, \mathbf{v})\!) - (B(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$, para todo $\mathbf{v} \in V$ no sentido das distribuições em I;

(iii) para todo $t' \in I$ e para todo $t \in I$ com $t > t'$,

$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}(t)|_H^2 + \nu \int_{t'}^{t} \|\mathbf{u}(s)\|_V^2 ds \leq \frac{1}{2}|\mathbf{u}(t')|_H^2 + \int_{t'}^{t} (\mathbf{f}(s), \mathbf{u}(s))ds;$$

(iv) $\mathbf{u}(t) \to \mathbf{u}(0)$ em H quando $t \to 0^+$.

Existência global de solução fraca de Leray-Hopf: 2D and 3D

Unicidade de solução fraca de Leray-Hopf: 2D

Motivação

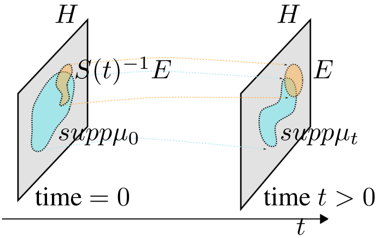
Seja $S(t)$, $t \geq 0$, o operador solução das equações 2D NS em H, i.e.,

$$\begin{aligned} S(t) : H &\to H \\ u_0 &\mapsto S(t)u_0 = u(t) \end{aligned}$$

onde u é a única solução das equações 2D NS tal que $u(0) = u_0$.
Seja μ_0 uma distribuição de probabilidadede dados iniciais em H,

$$\text{Probabilidade}\ \{u_0 \in E\} = \mu_0(E)$$

Evolução de μ_0: $\mu_t = S(t)\mu_0$, i.e. $\mu_t(E) = \mu_0(S(t)^{-1}E)), \forall E \subset H$



Créditos das figuras: Ricardo Rosa

Equação para os momentos generalizados

Momento generalizado: $\int \Phi(u) d\mu_t(u)$.

Note que: $\int \Phi(u) d\mu_t(u) = \int \Phi(S(t)u)) d\mu_0(u)$.

Formulação funcional das equações NS

$$u_t = F(t,u), \text{onde} F(t,u) = f(t) - \nu Au - B(u,u).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int \Phi(u) d\mu_t(u) &= \int \left(\Phi'(S(t)u), \frac{d}{dt} S(t)u \right) d\mu_0(u) \\
&= \int \left(\Phi'(S(t)u), F(t, S(t)u) \right) d\mu_0(u) \\
&= \int \left(F(t,u), \Phi'(u) \right) d\mu_t(u).
\end{aligned}$$

Equação para os momentos generalizados

Momento generalizado: $\int \Phi(u) d\mu_t(u)$.

Note que: $\int \Phi(u) d\mu_t(u) = \int \Phi(S(t)u) d\mu_0(u)$.

Formulação funcional das equações NS

$$u_t = F(t,u), \text{onde} F(t,u) = f(t) - \nu A u - B(u,u).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int \Phi(u) d\mu_t(u) &= \int \left(\Phi'(S(t)u), \frac{d}{dt} S(t)u \right) d\mu_0(u) \\
&= \int \left(\Phi'(S(t)u), F(t, S(t)u) \right) d\mu_0(u) \\
&= \int \left(\Phi'(u), F(t,u) \right) d\mu_t(u).
\end{aligned}$$

Equação para os momentos generalizados

Momento generalizado: $\int \Phi(u) d\mu_t(u)$.

Note que: $\int \Phi(u) d\mu_t(u) = \int \Phi(S(t)u)) d\mu_0(u)$.

Formulação funcional das equações NS

$$u_t = F(t, u), \text{onde} F(t, u) = f(t) - \nu A u - B(u, u).$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \int \Phi(u) d\mu_t(u) = \int \left(\Phi'(u), F(t, u) \right) d\mu_t(u)$$

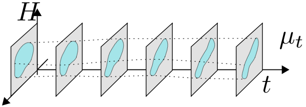
Essa fórmula não depende de $S(t)$!

Noções de soluções estatísticas para as equações NS

- Foias-Prodi (1972): Uma solução estatística é uma família de medidas de probabilidade $\{\mu_t\}_{t\geq 0}$ que satisfazem

$$\frac{d}{dt}\int_H \Phi(\mathbf{v})d\mu_t(\mathbf{v}) = \int_H (\mathbf{f} - \nu A\mathbf{v} - B(\mathbf{v},\mathbf{v}), \Phi'(\mathbf{v}))d\mu_t(\mathbf{v}),$$

+ desigualde de energia + condições de regularidade



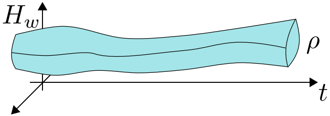
Em 2D, $\{\mu_t = S(t)\mu_0\}_{t\geq 0}$ é uma solução estatística.

- Vishik-Fursikov (1977): Uma solução estatística é uma medida de probabilidade no espaço de trajetórias $L^2_{loc}(0,\infty;H) \cap \mathcal{C}_{loc}([0,\infty);D(A^{-s/2}))$.

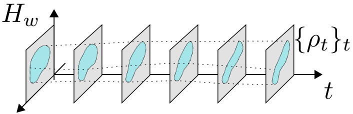
Créditos das figuras: Ricardo Rosa

Noções de solução estatística

- Foias-Rosa-Temam (2010):
  - Medida de Vishik-Fursikov:medida de probabilidade no espaço de trajetórias $\mathcal{C}_{loc}([0,\infty), H_w)$ carregada por $\mathcal{U} = \{$espaço das soluções fracas de Leray-Hopf$\}$, ou seja, $\rho(\mathcal{U}^c) = 0$.



  - Solução estatística de Vishik-Fursikov: família de medidas de probabilidade no espaço de fases que são projeções no tempo de uma medida de Vishik-Fursikov.



Toda solução estatística de Vishik-Fursikov é uma solução estatística de Foias-Prodi.

Créditos das figuras: Ricardo Rosa

Formulação abstrata da noção de solução estatística

Espaço de fase

$$X = \text{ espaço de Hasdorff.}$$

Espaço de trajetórias

$$\mathcal{X} = \mathcal{C}([0,\infty); X)$$

Um conjunto de soluções $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ satisfazendo

(H1) $\Pi_0\mathcal{U} = X$;

(H2) $\mathcal{U} \cap \Pi_0^{-1}K$ é relativamente compacto em $\mathcal{X}$ para todo conjunto compacto $K \subset X$;

Formulação abstrata da noção de solução estatística

Espaço de fase

$$X = \text{ espaço de Hasdorff.}$$

Espaço de trajetórias

$$\mathcal{X} = \mathcal{C}([0,\infty); X)$$

Um conjunto de soluções $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ satisfazendo

(H1) $\Pi_0\mathcal{U} = X$; Teorema de existência para soluções individuais

(H2) $\mathcal{U} \cap \Pi_0^{-1}K$ é relativamente compacto em $\mathcal{X}$ para todo conjunto compacto $K \subset X$;

Formulação abstrata da noção de solução estatística

Espaço de fase

$$X = \text{ espaço de Hasdorff.}$$

Espaço de trajetórias

$$\mathcal{X} = \mathcal{C}([0,\infty); X)$$

Um conjunto de soluções $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ satisfazendo

(H1) $\Pi_0 \mathcal{U} = X$;

(H2) $\mathcal{U} \cap \Pi_0^{-1} K$ é relativamente compacto em $\mathcal{X}$ para todo conjunto compacto $K \subset X$;Estimativas *a priori*

Teoria da Medida

Uma medida de Borel ρ em X é tight se para todo boreliano $A \subset X$,

$$\rho(A) = \sup\{\rho(K) : K \subset A,\ K \text{ compacto}\}.$$

Uma rede (ρ_α) de medidas de Borel em X é uniformemente tight se para todo $\varepsilon > 0$ existe um compacto $K \subset X$ tal que

$$\rho_\alpha(X \setminus K) < \varepsilon, \forall \alpha.$$

Seja $\mathcal{P}(X,t)$ o espaço das medidas de probabilidade, de Borel e tight.

- "topologia fraca": menor topologia para a qual $\mu \mapsto \int_X f d\mu$ é s.c.s., para toda f limitada e s.c.s. em X.
- topologia fraca-estrela: menor topologia para a qual $\mu \mapsto \int_X f d\mu$ é contínuo, para toda f limitada e contínua em X.

Topsoe (70's):

- Se X é completamente regular as duas topologias coincidem.
- Toda rede em $\mathcal{P}(X,t)$ que é uniformemente tight é compacta com respeito à topologia fraca.

Existência de solução estatística de $\mathcal{U}$-trajetórias

Uma medida $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ é uma solução estatísticas de $\mathcal{U}$-trajetórias se

- ρ é tight em $\mathcal{X}$;
- ρ é carregada por um borelinao de $\mathcal{U}$, i.e. $\rho(\mathcal{X} \setminus \mathcal{V}) = 0$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ Boreliano.

Obs: Seja $u \in \mathcal{U}$, então a medida de Dirac δ_u é uma solução estatística de $\mathcal{U}$-trajetórias.

Problema de valor inicial: Dada uma medida de Borel, probabilidade e tight μ_0 em X, queremos encontrar uma solução estatística de $\mathcal{U}$-trajetórias ρ tal que

$$\Pi_0 \rho = \mu_0.$$

Theorem (B., Mondaini, Rosa' 16)

Seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ um conjunto satisfazendo as hipóteses (H1) e (H2). Então, para toda medida $\mu_0 \in \mathcal{P}_t(X)$ existe uma solução estatística de $\mathcal{U}$-trajetórias ρ em X such that $\Pi_0 \rho = \mu_0$.

Ideia da prova

- Suponha que μ_0 é carregada por um compacto $K \subset X$;
- Aplique o Teorema Krein-Milman para obter a existência de $\{\mu_0^\alpha\}_\alpha \subset \mathcal{P}_t(X)$ convergindo para μ_0, e tais que

$$\mu_0^\alpha = \sum_{j=1}^{J_\alpha} a_j \delta_{x^{j,\alpha}}, \qquad \text{onde } x^{j,\alpha} \in K.$$

- Como $\Pi_0 \mathcal{U} = X$ então para cada $x^{j,\alpha} \in K$ existe $\mathbf{u}^{j,\alpha} \in \Pi_0^{-1} K \cap \mathcal{U}$ tal que $\mathbf{u}^{j,\alpha}(0) = x^{j,\alpha}$. Construa

$$\rho^\alpha = \sum_{j=1}^{J_\alpha} a_j \delta_{\mathbf{u}^{j,\alpha}}.$$

  - ρ^α é tigh e é carregada por $\Pi_0^{-1} K \cap \mathcal{U}$;
  - $(\rho^\alpha)_\alpha$ é uniformemente tight.

Continuação

- Pelo Teorema de Topsoe, (ρ^α) possui uma subrede que converge a uma medida $\rho \in \mathcal{P}_t(\mathcal{X})$ que é carregada por $\Pi_{t_0}^{-1} K \cap \mathcal{U}$;
- Temos que
  - $\Pi_0 \rho^\alpha = \mu_0^\alpha$;
  - $\Pi_0 \rho^\alpha \xrightarrow{w} \Pi_0 \rho$ e $\mu_0^\alpha \xrightarrow{w} \mu_0$.
- Por unicidade, $\Pi_0 \rho = \mu_0$.

Convergência de soluções estatísticas

Equações de evolução (e.g., 3D Navier-Stokes, 3D MHD, 3D Bérnard, 2D Euler):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = F(t, \mathbf{u}) \tag{1}$$

Equação regularizada (problema bem posto, e.g. Galerkin approximation, α-models, 2D Navier-Stokes):

$$\frac{d\mathbf{u}_\varepsilon}{dt} = F_\varepsilon(t, \mathbf{u}_\varepsilon) \tag{2}$$

onde $F_\varepsilon = F$ para $\varepsilon = 0$.
Seja $\mu_0 \in \mathcal{P}_t(X)$. Defina $\rho_\varepsilon = S_\varepsilon \mu_0$ em $\mathcal{X}$, onde $S_\varepsilon : X \to \mathcal{X}$ é o operador solução.
É claro que ρ_ε é uma solução estatística de $\mathcal{U}_\varepsilon$-trajetórias onde $\mathcal{U}_\varepsilon$ é o espaço de trajetórias das soluções de (2).
Pergunta natural: ρ_ε converge para alguma solução estatística de $\mathcal{U}$-trajetórias de (1)? Em qual sentido e sob quais hipóteses?

Teorema de Convergência

Seja $(S_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$ uma rede tal que, para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $S_\varepsilon : X \to \mathcal{X}$ é contínuo. Seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ e suponha que $((S_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}, \mathcal{U})$ satisfaz as seguintes hipóteses

(H1) $\Pi_0 S_\varepsilon(\mathbf{u}_0) \to \mathbf{u}_0$ uniformemente nos compactos de X; Em geral, $\Pi_0 S_\varepsilon(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_0$

(H2) para todo compacto $K \subset X$ temos que

$$\limsup_{\varepsilon\in\mathcal{E}} S_\varepsilon(K) \subset \mathcal{U}$$

(H3) $\forall K \subset X$ existe um compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ tal que

$$S_\varepsilon(K) \subset \mathcal{K}, \qquad \text{para todo } \varepsilon \in \mathcal{E};$$

Teorema de Convergência

Seja $(S_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$ uma rede tal que, para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $S_\varepsilon : X \to \mathcal{X}$ é contínuo. Seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ e suponha que $((S_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}, \mathcal{U})$ satisfaz as seguintes hipóteses

(H1) $\Pi_0 S_\varepsilon(\mathbf{u}_0) \to \mathbf{u}_0$ uniformemente nos compactos de X;

(H2) para todo compacto $K \subset X$ temos que

$$\limsup_{\varepsilon\in\mathcal{E}} S_\varepsilon(K) \subset \mathcal{U}$$

Convergência das soluções individuais do problema aproximado

(H3) $\forall K \subset X$ existe um compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ tal que

$$S_\varepsilon(K) \subset \mathcal{K}, \qquad \text{para todo } \varepsilon \in \mathcal{E};$$

Teorema de Convergência

Seja $(S_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$ uma rede tal que, para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $S_\varepsilon : X \to \mathcal{X}$ é contínuo. Seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ e suponha que $((S_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}, \mathcal{U})$ satisfaz as seguintes hipóteses

(H1) $\Pi_0 S_\varepsilon(\mathbf{u}_0) \to \mathbf{u}_0$ uniformemente nos compactos de X;

(H2) para todo compacto $K \subset X$ temos que

$$\limsup_{\varepsilon\in\mathcal{E}} S_\varepsilon(K) \subset \mathcal{U}$$

(H3) $\forall K \subset X$ existe um compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ tal que

$$S_\varepsilon(K) \subset \mathcal{K}, \qquad \text{para todo } \varepsilon \in \mathcal{E};$$

estimativas *a priori* uniformes em ε

Teorema de Convergência

Theorem (B., Mondaini, Rosa)

Seja X um espaço de hausdorff, $((S_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}, \mathcal{U})$ como antes e $\mu_0 \in \mathcal{P}_t(X)$. Então, a rede $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$, definida por $\rho_\varepsilon = S_\varepsilon \mu_0$, possui subrede que converge a uma solução estatística de $\mathcal{U}$- trajetórias.

Ideia da prova

- μ_0 tight$\Rightarrow$ ρ_ε tight para todo ε;
- μ_0 tight + (H3) $\Rightarrow$ (ρ_ε) uniformemente tight;
- Teorema de Topsoe $\Rightarrow$ ρ_ε converge para alguma $\rho \in \mathcal{P}_t(\mathcal{X})$;
- (H3) $\Rightarrow$ ρ é carregada por $\mathcal{K}$;
- (H1) + convergência $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \Rightarrow \Pi_0\rho|_{K\cup\Pi_0\mathcal{K}} = \mu_0|_{K\cup\Pi_0\mathcal{K}} \Rightarrow \Pi_0\rho = \mu_0$.

Teorema de Convergência

Theorem (B., Mondaini, Rosa)

Seja X um espaço de hausdorff, $((S_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}},\mathcal{U})$ como antes e $\mu_0 \in \mathcal{P}_t(X)$. Então, a rede $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$, definida por $\rho_\varepsilon = S_\varepsilon\mu_0$, possui subrede que converge a uma solução estatística de $\mathcal{U}$- trajetórias.

Ideia da prova

- μ_0 tight$\Rightarrow$ ρ_ε tight para todo ε;
- μ_0 tight + (H3) $\Rightarrow$ (ρ_ε) uniformemente tight;
- Teorema de Topsoe $\Rightarrow$ ρ_ε converge para alguma $\rho \in \mathcal{P}_t(\mathcal{X})$;
- (H3) $\Rightarrow$ ρ é carregada por $\mathcal{K}$;
- (H1) + convergência $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \Rightarrow \Pi_0\rho|_{\mathcal{K}\cup\Pi_0\mathcal{K}} = \mu_0|_{\mathcal{K}\cup\Pi_0\mathcal{K}} \Rightarrow \Pi_0\rho = \mu_0$.

Teorema de Convergência

Theorem (B., Mondaini, Rosa)

Seja X um espaço de hausdorff, $((S_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}, \mathcal{U})$ como antes e $\mu_0 \in \mathcal{P}_t(X)$. Então, a rede $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$, definida por $\rho_\varepsilon = S_\varepsilon\mu_0$, possui subrede que converge a uma solução estatística de $\mathcal{U}$- trajetórias.

Ideia da prova

- μ_0 tight$\Rightarrow$ ρ_ε tight para todo ε;
- μ_0 tight + (H3) $\Rightarrow$ (ρ_ε) uniformemente tight;
- Teorema de Topsoe $\Rightarrow$ ρ_ε converge para alguma $\rho \in \mathcal{P}_t(\mathcal{X})$;
- (H3) $\Rightarrow$ ρ é carregada por $\mathcal{K}$;
- (H1) + convergência $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \Rightarrow \Pi_0\rho|_{K\cup\Pi_0\mathcal{K}} = \mu_0|_{K\cup\Pi_0\mathcal{K}} \Rightarrow \Pi_0\rho = \mu_0$.

Teorema de Convergência

Theorem (B., Mondaini, Rosa)

Seja X um espaço de hausdorff, $((S_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}},\mathcal{U})$ como antes e $\mu_0 \in \mathcal{P}_t(X)$. Então, a rede $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$, definida por $\rho_\varepsilon = S_\varepsilon\mu_0$, possui subrede que converge a uma solução estatística de $\mathcal{U}$- trajetórias.

Ideia da prova

- μ_0 tight$\Rightarrow$ ρ_ε tight para todo ε;
- μ_0 tight + (H3) $\Rightarrow$ (ρ_ε) uniformemente tight;
- Teorema de Topsoe $\Rightarrow$ ρ_ε converge para alguma $\rho \in \mathcal{P}_t(\mathcal{X})$;
- (H3) $\Rightarrow$ ρ é carregada por $\mathcal{K}$;
- (H1) + convergência $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \Rightarrow \Pi_0\rho|_{\mathcal{K}\cup\Pi_0\mathcal{K}} = \mu_0|_{\mathcal{K}\cup\Pi_0\mathcal{K}} \Rightarrow \Pi_0\rho = \mu_0$.

Teorema de Convergência

Theorem (B., Mondaini, Rosa)

Seja X um espaço de hausdorff, $((S_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}, \mathcal{U})$ como antes e $\mu_0 \in \mathcal{P}_t(X)$. Então, a rede $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}}$, definida por $\rho_\varepsilon = S_\varepsilon\mu_0$, possui subrede que converge a uma solução estatística de $\mathcal{U}$- trajetórias.

Ideia da prova

- μ_0 tight$\Rightarrow$ ρ_ε tight para todo ε;
- μ_0 tight + (H3) $\Rightarrow$ (ρ_ε) uniformemente tight;
- Teorema de Topsoe $\Rightarrow$ ρ_ε converge para alguma $\rho \in \mathcal{P}_t(\mathcal{X})$;
- (H3) $\Rightarrow$ ρ é carregada por $\mathcal{K}$;
- (H1) + convergência $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in\mathcal{E}} \Rightarrow \Pi_0\rho|_{K\cup\Pi_0\mathcal{K}} = \mu_0|_{K\cup\Pi_0\mathcal{K}} \Rightarrow$ $\Pi_0\rho = \mu_0$.

Aplicações

- Existência de soluções estatísticas
  - Equações de Navier-Stokes em 3D
  - Equações de Navier-Stokes em 3D, Equações Magnetohidrodinâmicas em 3D (MHD), Problema de Bérnard
  - Equação da onda não-linear
  - Equação de reação-difusão
- Convergência das soluções estatísticasde $\mathcal{U}_\varepsilon$-trajetórias para as soluções estatísticas de $\mathcal{U}$-trajetórias
  - Aproximação de Galerkin
  - α-Navier-Stokes
  - α-MHD
  - Navier-Stokes em 2D (limite invíscido)

Aplicações

- Existência de soluções estatísticas
  - Equações de Navier-Stokes em 3D
    - $X = H_w$, $\mathcal{X} = C_{loc}([0,\infty), H_w)$,
    - $\mathcal{U} = \{$solução fraca de Leray-Hopf $[0,\infty)\}$,
  - Equações de Navier-Stokes em 3D, Equações Magnetohidrodinâmicas em 3D (MHD), Problema de Bérnard
  - Equação da onda não-linear
  - Equação de reação-difusão
- Convergência das soluções estatísticasde $\mathcal{U}_\varepsilon$-trajetórias para as soluções estatísticas de $\mathcal{U}$-trajetórias
  - Aproximação de Galerkin
  - α-Navier-Stokes
  - α-MHD
  - Navier-Stokes em 2D (limite invíscido)

Aplicações

- Existência de soluções estatísticas
  - Equações de Navier-Stokes em 3D, Equações Magnetohidrodinâmicas em 3D (MHD), Problema de Bérnard
  - Equação da onda não-linear
  - Equação de reação-difusão
- Convergência das soluções estatísticasde $\mathcal{U}_\varepsilon$-trajetórias para as soluções estatísticas de $\mathcal{U}$-trajetórias
  - Aproximação de Galerkin
  - α-Navier-Stokes
  - α-MHD
  - Navier-Stokes em 2D (limite invíscido)

Aplicações

- Existência de soluções estatísticas
  - Equações de Navier-Stokes em 3D, Equações Magnetohidrodinâmicas em 3D (MHD), Problema de Bérnard
  - Equação da onda não-linear
  - Equação de reação-difusão
- Convergência das soluções estatísticasde $\mathcal{U}_\varepsilon$-trajetórias para as soluções estatísticas de $\mathcal{U}$-trajetórias
  - Aproximação de Galerkin
  - α-Navier-Stokes
  - α-MHD
  - Navier-Stokes em 2D (limite invíscido)

Aplicações

- Existência de soluções estatísticas
  - Equações de Navier-Stokes em 3D, Equações Magnetohidrodinâmicas em 3D (MHD), Problema de Bérnard
  - Equação da onda não-linear
  - Equação de reação-difusão
- Convergência das soluções estatísticasde $\mathcal{U}_\varepsilon$-trajetórias para as soluções estatísticas de $\mathcal{U}$-trajetórias
  - Aproximação de Galerkin
  - α-Navier-Stokes
  - α-MHD
  - Navier-Stokes em 2D (limite inviscido)

Aplicações

- Existência de soluções estatísticas
    - Equações de Navier-Stokes em 3D, Equações Magnetohidrodinâmicas em 3D (MHD), Problema de Bérnard
    - Equação da onda não-linear
    - Equação de reação-difusão
- Convergência das soluções estatísticasde $\mathcal{U}_\varepsilon$-trajetórias para as soluções estatísticas de $\mathcal{U}$-trajetórias
    - Aproximação de Galerkin
    - α-Navier-Stokes
    - α-MHD
    - Navier-Stokes em 2D (limite inviscido)

Equação de reação-difusão

Considere o seguinte sistemas de equações de reação-difusão

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\Delta u(x,t) - f(t,u(x,t)) + g(x,t), \\ u(x,t)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad \forall t \in I, \end{cases} \tag{3}$$

onde u é a incógnita, a é uma constante positiva, f é a função de reação e g é a força externa. Além disso, $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo arbitrário e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e suave.

Chepyzhov&Vishik'00: Existência global de solução fraca em $L^\infty_{loc}(I,H) \cap L^p_{loc}(I,L^p) \cap L^2_{loc}(I,V)$ para o sistema de reação-difusão com dado inicial em H.

- $X = H$, $\mathcal{X} = C_{loc}([0,\infty),H)$,
- $\mathcal{U} = \{u \text{ solução fraca da equação}\}$.

Equação da onda não-linear

Considere a seguinte equação da onda não-linear

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^r u = f, \tag{4}$$

onde u é a incógnita, r é uma constante positiva e f é uma função dada.

Lions, J. L., Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non-Linéaires Existência global de solução fraca e estimativas *a priori*

3D α-Navier-Stokes

Considere as equações α-Navier-Stokes em 3D

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \nabla p = \mathbf{f} \\ \mathbf{v} = \mathbf{u} - \alpha^2\Delta\mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

onde $\mathbf{u}$ é o campo de velocidades (filtrado), $\mathbf{v}$ é uma variável auxiliar, p é a pressão, $\mathbf{f}$ é a força externa, e $\alpha > 0$ é uma constante

Foias, Holm and Titi '02: Boa colocação para $f \in H$ e $\mathbf{u}_0 \in V$.

Vishik, Titi and Chepyzhov '07: Convergência das soluções individuais do modelo-α para as soluções fracas de Leray-Hopf das equações de Navier-Stokes em 3D.

B. and Rosa '12: Convergência das soluções estatísticas do modelo-α para as soluções estatísticas para as equações de Navier-Stokes em 3D.

ν-Navier-Stokes 2D

Considere as equações de ν-Navier-Stokes em 2D

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, , \end{cases} \tag{6}$$

onde $\mathbf{u}$ é o campo de velocidades, p é a pressão, $\mathbf{f}$ é a força externa e $\nu > 0$ é a viscosidade.
Lions: Mathematical Topics in Fluid Mechanics Boa colocação global para $\mathbf{u}_0 \in H$, rot $\mathbf{u}_0 \in L^r$, $1 < r < \infty$. Convergência das soluções fracas de ν-Navier-Stokes em 2D para as soluções fracas da equação de Euler em 2D.

Projetos futuros

- Estudo das projeções das soluções estatísticas de trajetórias
  - soluções estatísticas estacionárias
  - aplicação à teoria de turbulência
- Relação com outras noções de solução estatística (aplicação para as equações de Euler em 3D)

Muito obrigada pela atenção!