

MAE328 - Análise de Regressão

1ª Lista de Exercícios

1. Suponhamos que, por alguma razão, deseja-se adotar o modelo

$$Y_i = \beta x_i + \epsilon_i,$$

onde

$$E(\epsilon_i) = 0, \quad E(\epsilon_i^2) = \sigma^2, \quad \epsilon_i \sim \text{Normal}, \quad \epsilon_i \perp \epsilon_j, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Este modelo é chamado modelo sem intercepto.

a) Determine $\hat{\beta}$, o estimador de mínimos quadrados de β .

b) Prove que $\hat{\beta}$ é não viciado.

c) Prove que

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

d) Mostre que

$$\text{SSE} = \sum y_i^2 - \frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2} = \sum y_i^2 - \hat{\beta} \sum x_i y_i$$

e) Demonstre que $E(\text{SSE}) = (n - 1)\sigma^2$ e determine um estimador não viciado de σ^2 .

Para este modelo, a ANOVA é a seguinte:

FV	GL	SS	MS	F
regressão	1	$\text{SSR} = \hat{\beta} \sum x_i y_i$	$\frac{\text{SSR}}{1} = \text{MSR}$	$\frac{\text{MSR}}{\text{MSE}}$
resíduo	n-1	$\text{SSE} = \sum y_i^2 - \hat{\beta} \sum x_i y_i$	$\frac{\text{SSE}}{n-1} = \text{MSE}$	
total	n	$\text{SST} = \sum y_i^2$		

Sob $H_0 : \beta = 0$,

$$\frac{\text{MSR}}{\text{MSE}} \sim F[1, n - 1]$$

f) Admitindo que Y é a receita de uma empresa em certo intervalo de tempo e que X é a quantidade vendida, ajuste aos pares de valores dados a seguir o modelo sem intercepto. Teste ao nível de 5% a hipótese $H_0 : \beta = 0$.

X	0	1	1	2	2
Y	1	2	4	2	5

2. Seja X a quantidade de um certo produto em milhares de unidades e Y o respectivo custo total de produção em milhares de reais. E dada a seguinte amostra de 10 pares de valores:

X (1000 unidades)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y (R\$1.000,00)	7	11	15	14	18	21	23	30	32	34

$$\sum x_i = 55 \quad \sum y_i = 205 \quad \sum x_i^2 = 385 \quad \sum y_i^2 = 4965 \quad \sum x_i y_i = 1375$$

- Estime a função de custo total.
 - Teste ao nível de 0,01 a hipótese de que o custo marginal é nulo.
 - Determine o intervalo de confiança com coeficiente 0,95 para o custo fixo.
 - Determine o coeficiente de explicação.
 - Determine o intervalo de confiança com $\gamma = 0,95$ para o custo total médio quando a quantidade é 10.
 - Determine o intervalo de previsão com $\gamma = 0,95$ para o custo total quando a quantidade é 5,5.
3. Sejam Y = despesa com viagem e X = duração da viagem (em dias). Para uma amostra com $n = 102$, obteve-se

$$\sum x_i = 510, \quad \sum y_i = 7140, \quad \sum x_i^2 = 4150, \quad \sum x_i y_i = 54.900, \quad \sum y_i^2 = 740.200, \quad \bar{x} = 5, \quad \bar{y} = 70$$

- Obter a reta $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$.
 - Qual o significado prático de $\hat{\beta}_0$ e $\hat{\beta}_1$?
 - Uma viagem irá durar 7 dias. Quanto o vendedor deve levar para que exista apenas uma chance em 10 de lhe faltar dinheiro?
4. Considere o modelo de regressão linear simples,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i,$$

com as suposições usuais.

- Quais são os estimadores de máxima verossimilhança para β_0 e β_1 ? Estes estimadores são viciados?
- Prove que o estimador de máxima verossimilhança de σ^2 é viciado e determine o seu vício.
- Em que outra situação (vista anteriormente), o estimador de máxima verossimilhança era também um estimador viciado?