MAE 116 - Noções de Estatística
Grupo A - 1º semestre de 2014

Lista de exercício 8 - Aula 8 - Estimação para p - *CASA*

---

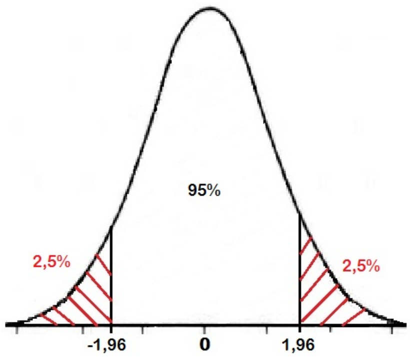
1. (2,5) Um provedor de acesso à internet está monitorando a duração do tempo das conexões de seus clientes, com o objetivo de dimensionar seus equipamentos. Mais especificamente, deseja estimar a proporção p de usuários que demoram 60 minutos ou mais para realizarem suas operações. Uma amostra aleatória de clientes que utilizam esse provedor será coletada, e o tempo de utilização de cada um será registrado.

   (a) (0,8) Qual deve ser o tamanho da amostra, para que o erro de sua estimativa seja no máximo 0,05, com um nível de confiança de 0,95?

   Solução

   Seja X: o nº de usuários que demoram 60 minutos ou mais para realizarem suas operações. Temos que, $\epsilon = 0,05$, $\gamma = 0,95$. Se $\gamma = 0,95 \Rightarrow z = 1,96$, como não temos informação a respeito de p, tomemos $p(1-p) = 0,25$, logo:

$$n = \left(\frac{z}{\epsilon}\right)^2 p(1-p) = \left(\frac{1,96}{0,05}\right)^2 \cdot 0,25 = 1536,64 \cdot 0,25 = 384,16 \cong 384 \text{ clientes}$$



   (b) (0,8) A direção da empresa sabe que essa proporção p não ultrapassa 25%. Com essa informação seria possível considerar em (a) uma amostra de tamanho menor? Se sim, de quanto? Se não, por quê?

   Solução

   Sabe-se que $p < 0,25$, então o valor máximo de $p(1-p)$ será $0,25 \cdot 0,75$=0,1875, logo por a) temos que

$$n = \left(\frac{1,96}{0,05}\right)^2 \cdot 0,1875 = 288,12 \cong 288 \text{ clientes}$$

   Note que, anteriormente tinhamos $p(1-p) = 0,25$ e agora temos $p(1-p) = 0,1875$, logo espera-se uma redução em n, ou seja, esta redução é de $384 - 288 = 96$ clientes.

   (c) (0,9) Uma amostra de 49 clientes forneceu as seguintes medidas desse tempo (em minutos): 25 28 40 52 15 120 34 65 78 42 16 27 22 36 50 80 15 45 23 34 14 58 32 90 44 133 48 19 17 28 39 15 40 33 68 27 37 42 59 62 73 24 28 40 70 19 46 43 31. Dê uma estimativa pontual para p e, com base nela, construa um intervalo de 95% de confiança para p. Qual é o erro amostral de sua estimativa?

Solução

Como definido X anteriormente, queremos p tal que $p = X/n$. Além disso, dada a amostra ($n = 49$), observa-se $X = 10$, logo uma estimativa pontual para p é dada por $p = 10/49 = 0,2041$ ou $20,41\%$. Ou seja, cerca de $20,41\%$ dos clientes demoram 60 minutos ou mais para realizarem suas operações. O intervalo de confiança para p é dado por:

$$\begin{aligned} IC(p;95\%) &= \left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] \\ &= \left[0,2041 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,2041 \cdot (1-0,2041)}{49}}\right] \\ &= [0,2041 - 1,96 \cdot 0,0576; 0,2041 + 1,96 \cdot 0,0576] \\ &= [0,0912; 0,3170], \end{aligned}$$

com um erro amostral de $\epsilon = 1,96 \cdot 0,0576 = 0,1129$.

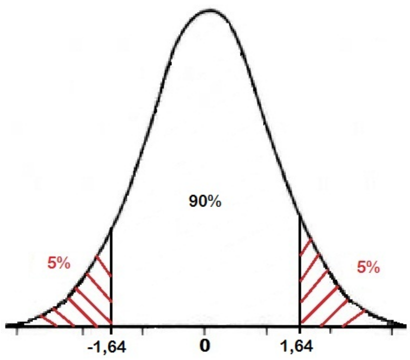
2. (2,5) A diretoria de uma escola de 2º grau quer estimar a proporção p de estudantes que conseguiram entender de forma satisfatória as mensagens transmitidas numa exposição de arte. Essa proporção deverá ser estimada com um erro de 5% para um coeficiente de confiança de 90%.

   (a) (0,8) Qual é o tamanho de amostra necessário para atender às exigências da diretoria?

   Solução

   Temos que $\epsilon = 0,05$, $\gamma = 0,90 \Rightarrow z = 1,64$. Como não temos informação a respeito de p, então tome $p(1-p) = 0,25$, logo:

$$n = \left(\frac{z}{\epsilon}\right)^2 p(1-p) = \left(\frac{1,64}{0,05}\right)^2 \cdot 0,25 = 1075,84 \cdot 0,25 = 268,96 \cong 269 \text{ estudantes.}$$



   (b) (0,8) Que tamanho deverá ter a amostra sabendo que p está entre 0,20 e 0,60? E sabendo que p < 0,20?

   Solução

   Note que, se $0,20 \leq p \leq 0,60$ o máximo valor de $p(1-p)$ é $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ e neste caso não há redução ou alteração no tamanho de n. Logo o tamanho da amostra continua $n = 269$ estudantes.

   Sendo $p < 0,20$, então $p(1-p) = 0,20 \cdot 0,80 = 0,16$, logo:

$$n = \left(\frac{1,64}{0,05}\right)^2 \cdot 0,16 = 1075,84 \cdot 0,16 = 172,13 \cong 172 \text{ estudantes,}$$

   ou seja, uma redução de $269 - 172 = 97$ estudantes.

(c) (0,9) Numa amostra de 150 estudantes, 60 apresentaram desempenho satisfatório num teste aplicado na saída da exposição. Qual seria a estimativa intervalar de p nesse caso, para γ = 0,95?

Solução

Seja X: o nº de estudantes que apresentaram desempenho satisfatório no teste aplicado na saída da exposição de arte, então temos que $\hat{p} = X/n = 60/150 = 0,4$ *ou* 40%, *se* $\gamma = 0,95 \Rightarrow z = 1,96$, *logo:*

$$\begin{aligned} IC(p; 95\%) &= \left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] \\ &= \left[0,4 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,4 \cdot (1-0,4)}{150}}\right] \\ &= [0,4 - 1,96 \cdot 0,04; 0,4 + 1,96 \cdot 0,04] \\ &= [0,3216; 0,4784]. \end{aligned}$$

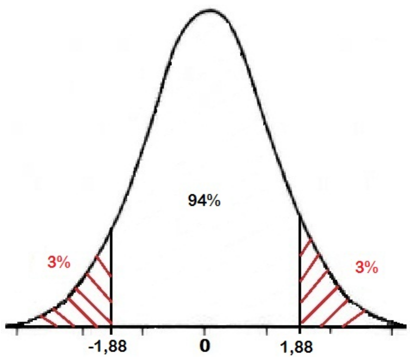
3. (2,5) Numa pesquisa de mercado deseja-se estimar a proporção de pessoas que compram o detergente Limpa-Bem.

(a) (1,0) Se desejássemos ter um intervalo de confiança com comprimento igual a 0,08, com coeficiente de confiança de 0,94, qual deveria ser o tamanho da amostra?

Solução

Seja X: o nº de pessoas que compram o detergente Limpa-Bem. Temos que o comprimento do IC é tal que $L_s - L_i = \hat{p} + \epsilon - (\hat{p} - \epsilon) = \hat{p} + \epsilon - \hat{p} + \epsilon = 2\epsilon$, *ou seja, o comprimento do intervalo é o dobro da margem de erro (erro amostral), onde* L_s: *limite superior do intervalo e* L_i: *limite inferior do intervalo. Então, se o comprimento do intervalo é igual a* $0,08 \Rightarrow 2\epsilon = 0,08 \Rightarrow \epsilon = 0,04$. *Se* $\gamma = 0,94 \Rightarrow z = 1,88$. *Como não temos informação sobre p, seja* $p(1-p) = 0,25$, *logo:*

$$n = \left(\frac{1,88}{0,04}\right)^2 \cdot 0,25 = 2204 \cdot 0,25 = 552,25 \cong 552 \text{ pessoas}.$$



Em um grupo de 400 pessoas consultadas, verificou-se que 78 delas compraram o detergente.

(b) (0,6) Calcule a estimativa pontual da proporção de pessoas que compram o detergente.

Solução

Seja agora $X = 78$ *e* $n = 400$, *então* $\hat{p} = 78/400 = 0,195$.

(c) (0,9) Construa um intervalo de confiança para essa proporção com coeficiente de confiança igual a 0,94. Qual é o comprimento do intervalo?

Solução

Seja $\gamma = 0,94 \Rightarrow z = 1,88$, *então:*

$$\begin{aligned} IC(p; 94\%) &= \left[0,195 - 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,195 \cdot 0,805}{400}}; 0,195 + 1,88 \cdot \sqrt{\frac{0,195 \cdot 0,805}{400}}\right] \\ &= [0,195 - 0,0372; 0,195 + 0,0372] = [0,1578; 0,2322]. \end{aligned}$$

Com intervalo de comprimento igual a $0,2322 - 0,1578 = 0,0744 = 2 \cdot 0,0372 = 2\epsilon$.

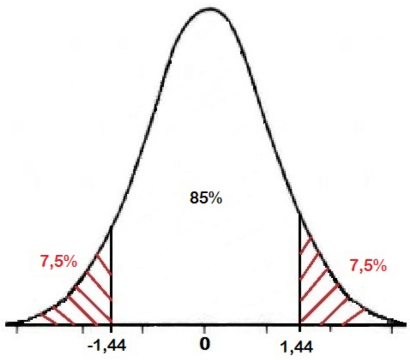
4. (2,5) Um administrador de empresas está interessado em estimar a proporção p de funcionários de uma grande indústria que são favoráveis à nova política de participação dos funcionários nos lucros da empresa.

(a) (0,8) Determine o tamanho da amostra necessário para que o erro cometido na estimação seja de no máximo 0,05, com probabilidade de 0,85.

Solução

Seja X*: o nº de funcionários que são favoráveis à nova política de participação nos lucros da empresa. Temos que,* $\epsilon = 0,05$, $\gamma = 0,85 \Rightarrow z = 1,44$ *e* $p(1-p) = 0,25$, *logo:*

$$n = \left(\frac{1,44}{0,05}\right)^2 \cdot 0,25 = 829,44 \cdot 0,25 = 207,36 \cong 207 \text{ funcionários.}$$



(b) (0,8) Suponha que ele acredite que essa proporção esteja entre 70% e 80%. Com essa informação qual deve ser o tamanho da amostra?

Solução

Dado $0,7 \leq p \leq 0,8$, *temos que* $p(1-p) = 0,7 \cdot 0,3 = 0,21$, *e* $\gamma = 0,85 \Rightarrow z = 1,44$, *logo:*

$$n = \left(\frac{1,44}{0,05}\right)^2 \cdot 0,21 = 829,44 \cdot 0,21 = 174,18 \cong 174 \text{ funcionários.}$$

(c) (0,9) Em uma pesquisa realizada com 180 funcionários sorteados desta indústria, 130 foram favoráveis à nova política proposta. Qual é uma estimativa para a proporção de funcionários que são favoráveis à nova política de participação dos funcionários nos lucros da empresa. Construa um intervalo de 90% de confiança para p.

Solução

Temos que $\hat{p} = X/n = 130/180 = 0,722$ *ou* $72,22\%$. *Dado* $\gamma = 0,90 \Rightarrow z = 1,64$, *logo:*

$$\begin{aligned}
IC(p; 90\%) &= \left[0,7222 - 1,64\sqrt{\frac{0,7222 \cdot 0,2778}{180}}; 0,7222 + 1,64\sqrt{\frac{0,7222 \cdot 0,2778}{180}}\right] \\
&= [0,7222 - 1,64 \cdot 0,0334; 0,7222 + 1,64 \cdot 0,0334] = [0,6674; 0,7770].
\end{aligned}$$

Ou seja, de cada 100 amostras de tamanho 180, espera-se que cerca de 90% *delas tenha um IC que contenha o verdadeiro valor da proporção populacional.*