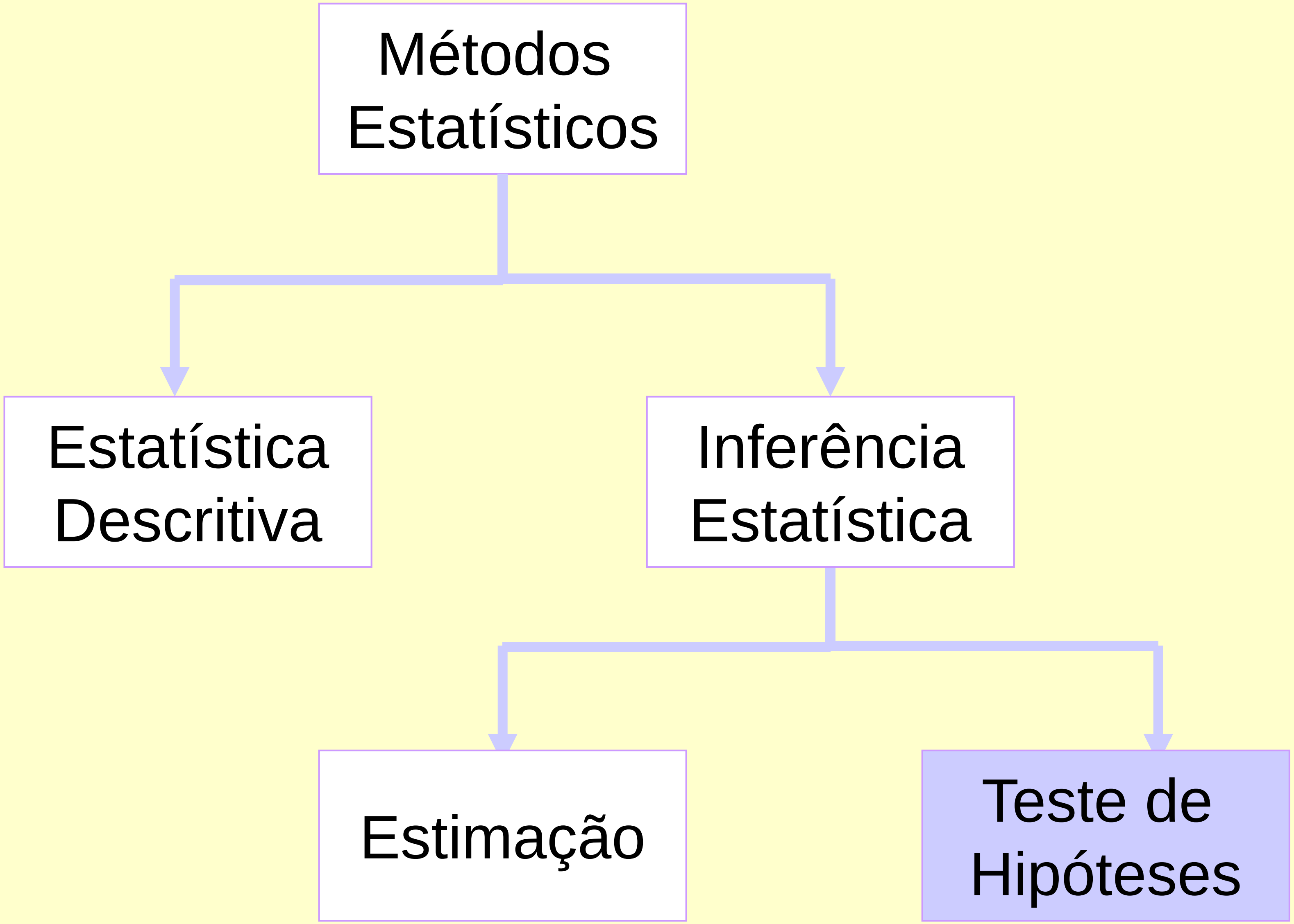
NOÇÕES DE TESTE DE HIPÓTESES (I)

Teste de hipóteses para a proporção populacional

Métodos Estatísticos



TESTE DE HIPÓTESES

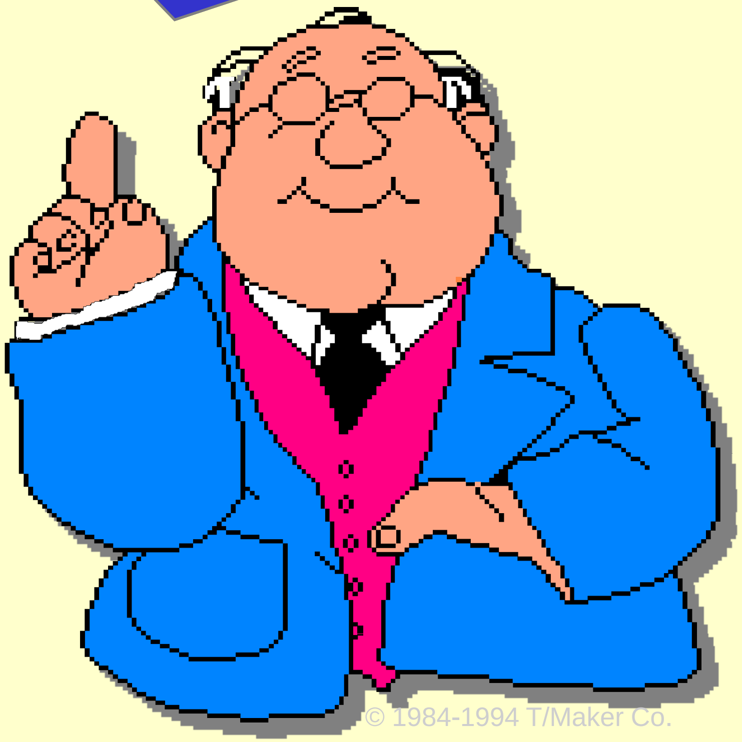
O que é uma hipótese?

- É uma conjectura sobre um parâmetro populacional.

  Por exemplo, a proporção p é um parâmetro populacional.

- A hipótese deve ser estabelecida antes da análise.

Eu acredito que a proporção de pessoas com dengue neste ano no Rio de Janeiro com idade entre 15 e 49 anos é de 45%.



Estimação	Teste de Hipóteses
Qual é a probabilidade de “cara” no lançamento de uma moeda?	A moeda é honesta ou é desequilibrada?
Qual é a proporção de votos que o candidato A terá na próxima eleição?	O candidato A vencerá a eleição?
Qual é a proporção de motoristas habilitados de SP que tiveram suas carteiras apreendidas após a vigência da nova lei de trânsito?	A proporção dos moto-ristas habilitados de SP que tiveram suas carteiras apreendidas após a nova lei é maior que 2% ou não?

Introdução

Em **estimação,** o objetivo é "estimar" o valor desconhecido de um parâmetro, por exemplo, a proporção p de "indivíduos" em uma população com determinada característica.

A estimativa é baseada no número x de "indivíduos" com a característica numa amostra aleatória de tamanho n.

Entretanto, se o objetivo for saber se o valor observado x nessa amostra dá ou não suporte a uma conjectura sobre o valor de p, trata-se de um **teste de hipóteses.**

Exemplo 1: Queremos avaliar se uma moeda é honesta.

Ou seja, queremos testar a

hipótese nula *H*: a moeda é honesta

contra a

hipótese alternativa *A*: a moeda não é honesta.

Em linguagem estatística, essas hipóteses podem ser reescritas como:

$$H\text{: } \boldsymbol{p} = 0{,}5$$

$$A\text{: } \boldsymbol{p} \neq 0{,}5$$

com $\boldsymbol{p}$ a probabilidade de "cara" da moeda.

Hipóteses

De maneira geral, uma **hipótese estatística** é uma afirmação ou conjectura sobre um parâmetro da distribuição de probabilidades de uma variável aleatória.

No caso especial de teste de hipóteses sobre a proporção populacional p, temos:

Hipótese nula: afirmação sobre p geralmente relacionada a um valor de referência, ou a uma especificação padrão ou histórica.

Hipótese alternativa: afirmação sobre p que suspeitamos ser verdadeira.

No nosso exemplo, o parâmetro é a probabilidade p de sair “cara”.

Se considerarmos 12 lançamentos independentes da moeda e denotamos por X o número de caras obtidas nesses lançamentos, então

$$X \sim \textbf{binomial}\ (12;\ p).$$

Note que o número de lançamentos está fixado (n=12), portanto fazer conjecturas sobre p é similar a fazer conjecturas sobre o número esperado de sucessos (esperança de X).

Se observarmos 5 caras em 12 lançamentos independentes da moeda, o que podemos concluir?

E se observarmos 4 caras? Ou 10 caras?

Podemos considerar uma **regra de decisão**, por exemplo,

"Se nos 12 lançamentos da moeda, observarmos 0,1, 2, 3, 9, 10, 11 ou 12 caras, então rejeitamos a hipótese nula H de que a moeda é honesta.

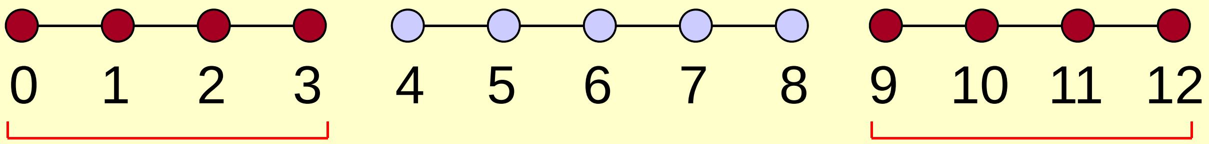
Caso contrário, não rejeitamos a hipótese H."

Testar uma hipótese estatística é estabelecer uma regra que nos permita, com base na informação de uma amostra, decidir pela rejeição ou não de H.

No exemplo, segundo a regra de decisão, o conjunto de valores de $\boldsymbol{X}$ que levam à rejeição da hipótese nula H é {0, 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12}.

Denominamos esse conjunto **região crítica (RC)** ou **região de rejeição de** H.

RC = {0, 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12} : **região de rejeição**

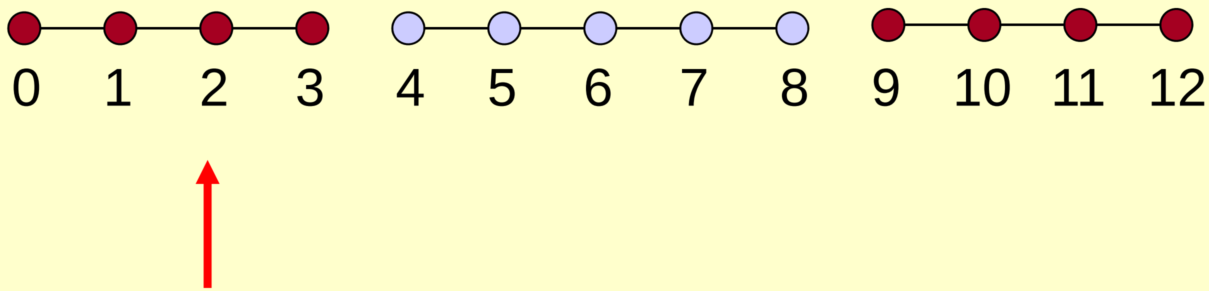


RC^c = {4, 5, 6, 7, 8} : **região de não rejeição de** $\boldsymbol{H}$

Regra de decisão (teste)

Seja $\boldsymbol{x}$ o <u>valor observado</u> da variável aleatória $\boldsymbol{X}$.

No exemplo, suponha que observamos 2 caras, isto é, $\boldsymbol{x} = 2$.



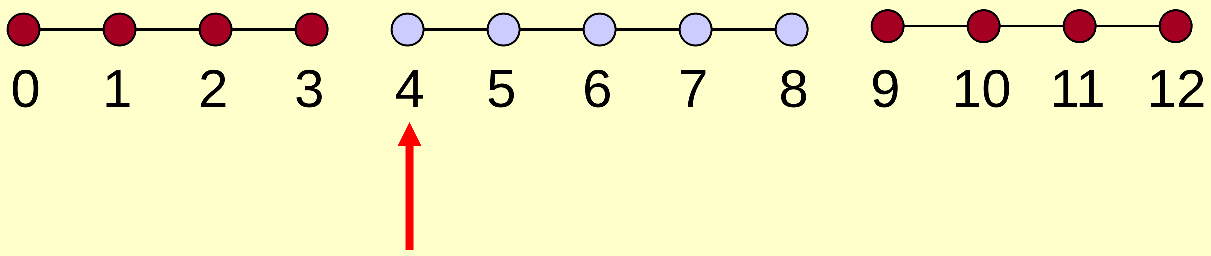
Valor observado na amostra

$x \in \text{RC} \Rightarrow$ rejeitamos H.

Será que a nossa conclusão está correta?

Regra de decisão (teste)

Agora suponha que observamos 4 caras, isto é, $\boldsymbol{x} = 4$.



Valor observado na amostra

Como $x \notin$ RC $\Rightarrow$ não rejeitamos H (não temos evidência suficiente de que a moeda seja desequilibrada).

Será que a nossa conclusão está correta?

Regra de decisão (teste)

$x \in$ **RC** $\Rightarrow$ **rejeitamos** H

$x \notin$ **RC** $\Rightarrow$ **não rejeitamos** H

Ao decidir pela rejeição ou não da hipótese nula H, podemos cometer *dois tipos de erro*.

Erros

Erro tipo I: Rejeitar H quando H é verdadeira.

(Afirmar que a moeda não é honesta quando
na verdade ela é).

Erro tipo II: Não rejeitar H quando H é falsa.

(Afirmar que a moeda é honesta quando
na verdade ela é desequilibrada).

Exemplo: Uma pessoa está sendo julgada.

Como pela lei uma pessoa é inocente até que se prove o contrário, as hipóteses são:

H: A pessoa é inocente.

A: A pessoa é culpada.

- Erro I: A pessoa é condenada apesar de ser inocente.
- Erro II: A pessoa é absolvida apesar de ser culpada.
- Naturalmente, a Justiça procura reduzir a possibilidade de ocorrer o Erro I, pois entende-se que é mais grave condenar inocentes do que absolver criminosos.

Probabilidades de erros

P(erro I**)** **= P(**rejeitar H **|** H é verdadeira**) =** α

α **: nível de significância do teste**

P(erro II**) = P(**não rejeitar H **|** H é falsa**) =** β

1 - β **: poder do teste**

Observações:

- α e β têm uma relação inversa.
- Em geral, só podemos controlar um dos erros (fixando sua probabilidade de ocorrência).

No exemplo da moeda:

H: $\boldsymbol{p} = 0{,}5$

A: $\boldsymbol{p} \neq 0{,}5$

$\boldsymbol{X}$ **~ binomial (**12; $\boldsymbol{p}$**)**

RC = {0,1,2,3,9,10,11,12}

α = P(erro I) = P(rejeitar *H* | *H* verdadeira)

= P($\boldsymbol{X} \in$ **RC** | $\boldsymbol{p}$ = 0,5)

= P($\boldsymbol{X}$=0 | $\boldsymbol{p}$=0,5) + ... + P($\boldsymbol{X}$=3 | $\boldsymbol{p}$=0,5) + P($\boldsymbol{X}$=9 | $\boldsymbol{p}$=0,5)+

... + P($\boldsymbol{X}$=12 | $\boldsymbol{p}$=0,5)

= 0,0002 + 0,0029 + 0,0161 + 0,0537 + 0,0537 +

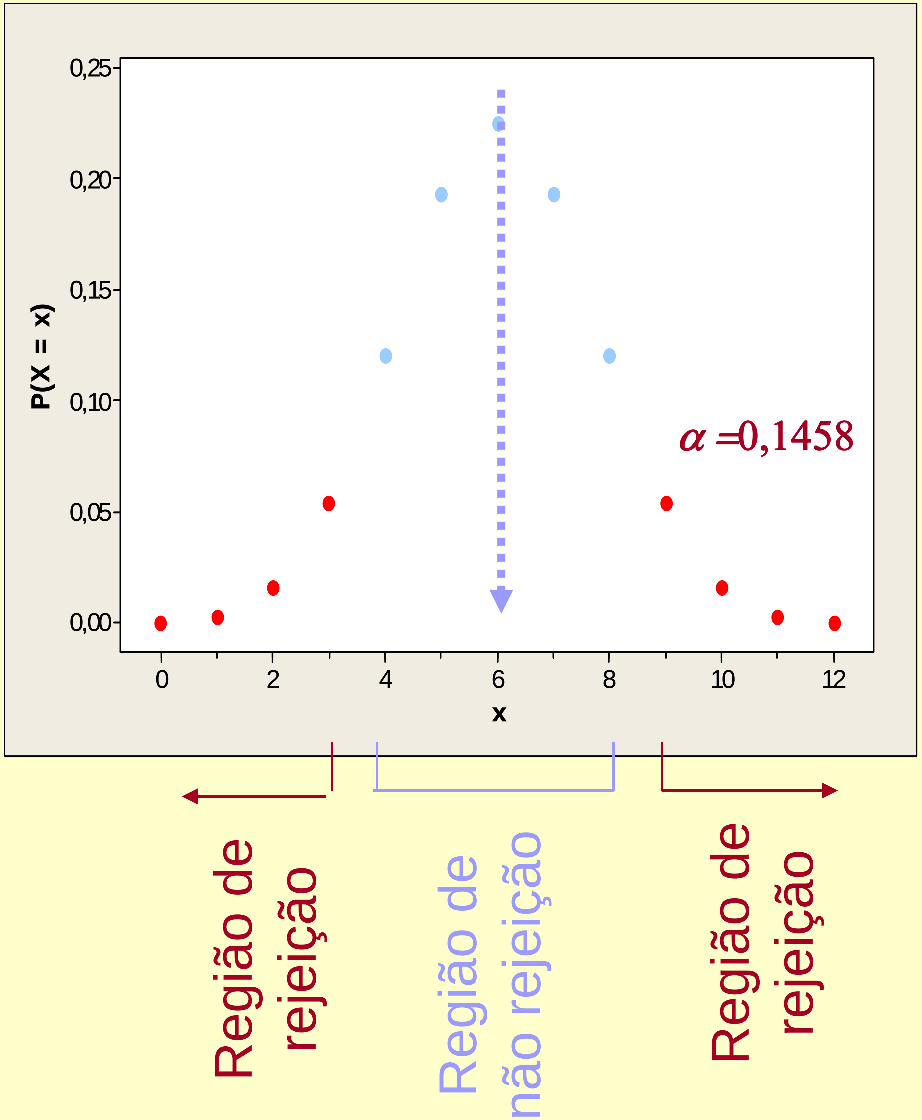
0,0161 + 0,0029 + 0,0002

= **0,1458**

Binomial com *n* = 12 e *p* = 0,5

x	Pr
0	0,0002441406
1	0,0029296875
2	0,0161132812
3	0,0537109375
4	0,1208496094
5	0,1933593750
6	0,2255859375
7	0,1933593750
8	0,1208496094
9	0,0537109375
10	0,0161132812
11	0,0029296875
12	0,0002441406

Valor de $E(X)$ sob H



Decisão	**Verdadeiro valor de *p***	
	p **= 0,5** (H é verd.)	$p \neq$ **0,5** (A é verd.)
Não rejeitar *H*	Decisão correta **1 -** α = 0,8542	**Erro II** β
Rejeitar *H*	**Erro I** α = 0,1458	Decisão correta **1 -** β

Se alterarmos a regra de decisão para **RC** = {0, 1, 2, 10, 11, 12}, isto é, concluiremos que a moeda é desonesta se o número de caras for 0, 1, 2, 10, 11 ou 12, o que acontece com o nível de significância α do teste (probabilidade de erro tipo I)?

α = P(erro I) = P(rejeitar *H* | *H* verdadeira) = P($\boldsymbol{X} \in$ **RC** | $\boldsymbol{p}$ = 0,5)

= P($\boldsymbol{X}$=0 | $\boldsymbol{p}$=0,5) + ... + P($\boldsymbol{X}$=2 | $\boldsymbol{p}$=0,5) + P($\boldsymbol{X}$=10 | $\boldsymbol{p}$=0,5)+

... + P($\boldsymbol{X}$=12 | $\boldsymbol{p}$=0,5) $\Rightarrow$

= 0,0002 + 0,0029 + 0,0161 + 0,0161 + 0,0029 + 0,0002

= **0,0384**

Binomial com *n* = 12 e *p* = 0,5

x	Pr
0	0,0002441406
1	0,0029296875
2	0,0161132812
3	0,0537109375
4	0,1208496094
5	0,1933593750
6	0,2255859375
7	0,1933593750
8	0,1208496094
9	0,0537109375
10	0,0161132812
11	0,0029296875
12	0,0002441406

Regiões críticas e níveis de significância α (Exemplo 1: Moeda)

RC	α
{0, 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12}	0,1458
{0, 1, 2, 10, 11, 12}	0,0384
{0, 1, 11, 12}	0,0063

RC $\downarrow$ $\quad$ α $\downarrow$ $\quad$ β $\uparrow$

Até agora, o procedimento foi

escolher RC $\Rightarrow$ determinar α.

Alternativamente, podemos

fixar α $\Rightarrow$ determinar RC.

Os valores de nível de significância α usualmente adotados estão entre 1% e 10%.

Determinação da região crítica

Exemplo 2: Suponha que um medicamento existente no mercado produza o efeito desejado em 60% dos casos nos quais é aplicado.

Um laboratório produz um novo medicamento e afirma que ele é melhor do que o existente.

Objetivo: Verificar estatisticamente se é verdadeira a afirmação do laboratório.

Aplicou-se o medicamento em n = 10 pacientes.

Seja X o número de pacientes, dentre os 10, para os quais o novo medicamento produz o efeito desejado.

Temos que:

$$X \sim b\,(10;\, p),$$

onde p é a proporção de pacientes para os quais o novo medicamento é eficaz.

(1) Hipóteses estatísticas:

$$H\text{: } p = 0{,}6$$
$$A\text{: } p > 0{,}6$$

que correspondem a

H: O novo medicamento é similar ao existente.

A: O novo medicamento é melhor (mais efetivo).

(2) Fixemos o nível de significância em 5% (α = 0,05).

(3) A região crítica deve ter a forma:

$$\mathbf{RC} = \{ X \geq k \}$$

O valor de k deve ser tal que

P(erro I) = P($X \in$ **RC** | p = 0,6) = P($X \geq k$ | p = **0,6**) = α

Pela tabela da **binomial** (10; 0,6), $\Rightarrow$

para k = 9: P($X \geq$ 9) = 0,0463

para k = 8: P($X \geq$ 8) = 0,1672

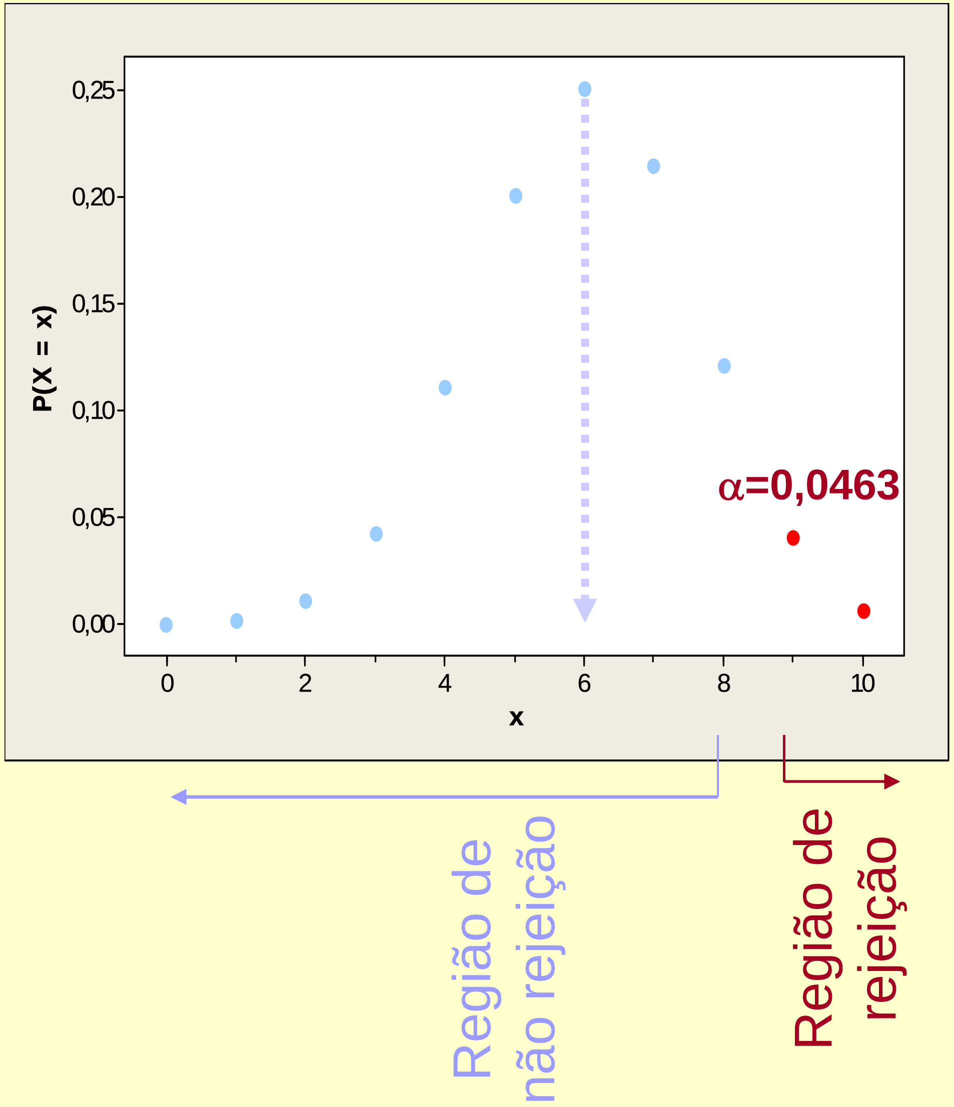
Portanto, **RC = {$X \geq$ 9},** que garante um nível de significância menor que 5% (na realidade, α **= 4,63%**).

Binomial com n = 10 e p = 0,6

⇐

x	Pr
0	0,0001048576
1	0,0015728640
2	0,0106168320
3	0,0424673280
4	0,1114767360
5	0,2006581248
6	0,2508226560
7	0,2149908480
8	0,1209323520
9	0,0403107840
10	0,0060466176

Valor de $E(X)$ sob H



Hipóteses alternativas bilaterais e unilaterais

No Exemplo 1 (da moeda), as hipóteses são

$$H\text{: } p = 0{,}5 \quad \text{e} \quad A\text{: } p \neq 0{,}5.$$

Dizemos que a hipótese alternativa é **bilateral** (queremos detectar desvios em torno de p = 0,5 em qualquer direção).

Hipóteses alternativas bilaterais e unilaterais

No Exemplo 2, as hipóteses são

$$H\text{: } p = 0{,}6 \quad \text{e} \quad A\text{: } p > 0{,}6$$

isto é, desejamos detectar desvios em p em apenas uma direção (desvios à direita de 0,6).

Nesse caso, a hipótese alternativa é **unilateral**.

Exemplo 3: A proporção de analfabetos em um município era de 15% na gestão anterior.

No início da sua gestão, o prefeito atual implantou um programa de alfabetização e após 2 anos afirma que reduziu a proporção de analfabetos.

Para verificar a afirmação do prefeito, $n = 60$ cidadãos foram entrevistados.

Seja X o número de analfabetos entre os 60 cidadãos entrevistados.

Então: $X \sim \mathbf{b}(60; p)$,

sendo p a proporção atual de analfabetos no município (após o programa de alfabetização).

(1) As **hipóteses de interesse** são:

$\boldsymbol{H}$: A proporção de analfabetos no município não se alterou (a afirmação do prefeito está incorreta).

$\boldsymbol{A}$: A proporção de analfabetos no município diminuiu (a afirmação do prefeito está correta).

Equivalentemente,

$$\boldsymbol{H}: \boldsymbol{p} = 0{,}15$$
$$\boldsymbol{A}: \boldsymbol{p} < 0{,}15$$

(2) Vamos fixar α **= 5%.**

(3) A **região crítica** deve ter a forma:

$$\mathbf{RC} = \{ X \leq k \}$$

O valor de k deve ser tal que P(erro I) = α, ou seja,

$$P(X \leq k \mid p = 0{,}15) = 0{,}05.$$

Pela tabela da **binomial**(60; 0,15), $\Rightarrow$

$$\boxed{\text{RC} = \{X \leq 4\}.}$$

Na realidade, temos $\alpha = 0{,}0424$.

Binomial com n = 60 e p = 0,15

	Pr
0	5.822849e-05
1	6.165370e-04
2	3.209619e-03
3	1.095046e-02
4	2.753720e-02
5	5.442646e-02
6	8.804281e-02
7	1.198566e-01
8	1.401265e-01
9	1.428740e-01
10	1.285866e-01
11	1.031444e-01
12	7.432461e-02
13	4.842871e-02
14	2.869096e-02
15	1.552687e-02
16	7.706351e-03
17	3.519856e-03
18	1.483861e-03
19	5.788435e-04
20	2.094052e-04
21	7.038829e-05
22	2.201987e-05

x	Pr
0	0,00005822849
1	0,0006165370
2	0,003209619
3	0,01095046
4	0,02753720
5	0,05442646
6	0,08804281
7	0,1198566
8	0,1401265
9	0,1428740
10	0,1285866
11	0,1031444
12	0,07432461
13	0,04842871
14	0,02869096
15	0,01552687
16	0,007706351
17	0,003519856
18	0,001483861
19	0,0005788435
20	0,0002094052
21	0,00007038829
22	0,00002201987

(4) Buscar a **evidência na amostra** para concluir.

Se observamos 6 analfabetos entre os 60 entrevistados, qual a conclusão?

(5) **Decisão e conclusão:**

6 $\notin$ **RC** $\Rightarrow$ Decidimos por não rejeitar $\boldsymbol{H}$ ao nível de significância 4,24%.

Concluímos que não temos evidência suficiente para afirmar que a proporção de analfabetos (após o programa de alfabetização) é inferior a 15%, isto é, não há evidência suficiente de que a afirmação do prefeito seja correta.

Resumo

(1) Estabelecer as **hipóteses**:

H: $p = p_0$ contra uma das alternativas

A: $p \neq p_0$, A: $p > p_0$ ou A: $p < p_0$.

(2) Escolher um **nível de significância** α.

(3) Determinar a **região crítica RC** da forma

$\{ X \leq k_1 \} \cup \{ X \geq k_2 \}$, $\{ X \geq k \}$ ou $\{ X \leq k \}$,

respectivamente às hipóteses alternativas.

(4) Selecionar uma **amostra aleatória** e determinar o número $\boldsymbol{x}$ de elementos na amostra com o atributo desejado.

(5) **Decidir**, usando a evidência $\boldsymbol{x}$, ao nível de significância α, e **concluir**.

$x \in$ RC $\Rightarrow$ rejeitamos H.

$x \notin$ RC $\Rightarrow$ não rejeitamos H.