NOÇÕES DE PROBABILIDADE

? CARA ? OU ? COROA ?

? Qual será o rendimento da Caderneta de Poupança até o final deste ano ?

?? E qual será a taxa de inflação acumulada em 2011??

?? Quem será o próximo prefeito de São Paulo ??

Experimento Aleatório: é aquele que, ainda que sendo realizado sob condições fixas, não possui necessariamente resultado determinado.

Exemplos:

1. Lançar uma moeda e observar o resultado; lançar um dado e observar o resultado.
2. Sortear um estudante da USP e perguntar se ele é fumante ou não.
3. Sortear um doador de sangue cadastrado e verificar o seu tipo sangüíneo.

Espaço Amostral (Ω): conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Doador de sangue (tipo sangüíneo) .
   $\Omega = \{A, B, AB, O\}$

3. Hábito de fumar.
   Ω = {Fumante, Não fumante}

4. Tempo de duração de uma lâmpada.
   $\Omega = \{t: t \geq 0\}$

Eventos: qualquer subconjunto de resultados possíveis do experimento.

Notação: $A, B, C \subseteq \Omega$

$\varnothing$ (conjunto vazio): *evento impossível*

Ω: *evento certo*

Exemplo: Lançamento de um dado.

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Alguns eventos:

A: sair face par $\Rightarrow$ $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$

B: sair face maior que 3 $\Rightarrow$ $B = \{4, 5, 6\} \subset \Omega$

C: sair face 1 $\Rightarrow$ $C = \{1\} \subset \Omega$

Necessário: saber trabalhar com conjuntos

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral.

$A \cup B$: *união dos eventos* A *e* B*.*

Representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos, A ou B.

$A \cap B$: *interseção dos eventos* A *e* B.

Representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

• A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, isto é,

$$A \cap B = \varnothing$$

• A e B são complementares se sua interseção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é,

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{e} \quad A \cup B = \Omega$$

O complementar de A é representado por A^c.

Exemplo: Lançamento de um dado

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Eventos: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $C = \{1\}$

- sair uma face par e maior que 3

$$A \cap B = \{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$$

- sair uma face par e face 1

$$A \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{1\} = \varnothing$$

- sair uma face par ou maior que 3

$$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$$

- sair uma face par ou face 1

$$A \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{1\} = \{1, 2, 4, 6\}$$

- não sair face par

$$A^c = \{1, 3, 5\}$$

Probabilidade

- Medida da incerteza associada aos resultados do experimento aleatório

Como atribuir probabilidade aos elementos do espaço amostral?

Várias abordagens possíveis:

1. Frequências relativas de ocorrências de cada resultado;
2. Suposições teóricas;

Atribuição da probabilidade:

1. Através das freqüências de ocorrências.

- O experimento aleatório é repetido n vezes
- Calcula-se a freqüência relativa com que cada resultado ocorre.

→ Para um número grande de realizações, a freqüência relativa aproxima-se da probabilidade.

2. Através de suposições teóricas

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \geq 0$, para todo $A \subseteq \Omega$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, para conjuntos A e B disjuntos.
- Vale também para $A_1, A_2, A_3 \ldots$ disjuntos 2 a 2.

Exemplo: Lançamento de um dado

Admite-se que o dado é perfeitamente equilibrado

$$P(\text{face } 1) = \cdots = P(\text{face } 6) = 1/6.$$

Regra da adição de probabilidades

Sejam A e B eventos de Ω. Então,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Casos particulares:

- Se A e B forem *eventos disjuntos*, então
  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- Para qualquer evento A de Ω,
  $$P(A) = 1 - P(A^c).$$

Exemplo: Na situação de equiprobabilidade, isto é, quando as probabilidades de todos os resultados são iguais , tem-se :

$$P(A) = \frac{n^o.\ de\ elementos\ de\ A}{n^o.\ de\ elementos\ de\ \Omega}$$

Exemplo: A tabela a seguir apresenta a distribuição de alunos diplomados em 2002, segundo nível de ensino e tipo de instituição, no município de São Paulo.

Nível	Instituição		Total
	Pública	Privada	
Fundamental	144.548	32.299	176.847
Médio	117.945	29.422	147.367
Superior	5.159	56.124	61.283
Total	267.652	117.845	385.497

Fonte: Min. Educação/INEP-Inst.Nacion. Estudos e Pesq. Educacionais; Fundação SEAD

Um aluno diplomado em 2002 do município de São Paulo é selecionado, ao acaso.

Ω: conjunto de 385.497 alunos diplomados em 2002 no município de São Paulo.

Definimos os eventos

M: aluno se formou no ensino médio;
F: aluno se formou no ensino fundamental;
S: aluno se formou no ensino superior;
G: aluno se formou em instituição pública.

ir para a tabela

Temos

$$P(M) = \frac{147.367}{385.497} = 0{,}382 \qquad P(F) = \frac{176.847}{385.497} = 0{,}459$$

$$P(S) = \frac{61.283}{385.497} = 0{,}159 \qquad P(G) = \frac{267.652}{385.497} = 0{,}694$$

Nível	Instituição		Total
	Pública	Privada	
Fundamental	144.548	32.299	176.847
Médio	117.945	29.422	147.367
Superior	5.159	56.124	61.283
Total	267.652	117.845	385.497

- *Qual é a probabilidade do aluno escolhido ter se formado no ensino médio <u>e</u> numa instituição pública?*

- $M \cap G$: aluno formado no ensino médio e em inst.pública

$$P(M \cap G) = \frac{117.945}{385.497} = 0,306$$

- *Qual é a probabilidade do aluno ter se formado no ensino médio <u>ou</u> numa instituição pública?*

ir para a tabela

$M \cup G$: aluno formado no ensino médio ou em inst. pública

$$P(M \cup G) = (147.367 + 267.652 - 117.945\ ) \,/\, 385.497$$

$$= \frac{297.074}{385.497} = 0,771$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

Probabilidade condicional: Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é denotada por P(A | B) e definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 .$$

Da definição de probabilidade condicional, obtemos a regra do produto de probabilidades

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B).}$$

e

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) .}$$

Não *é* válido *em geral que* $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B).}$

• *Qual é a probabilidade do aluno escolhido ser formado no ensino médio <u>sabendo-se</u> que é de instituição pública?*

Olhando diretamente a tabela,

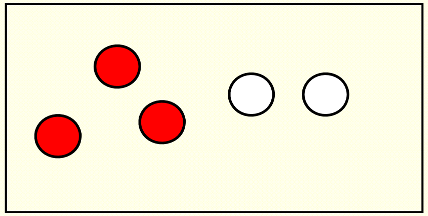
temos $P(M|G) = \dfrac{117.945}{267.652} = 0,441$

ir para a tabela

Pela definição,

$$P(M \mid G) = \frac{P(M \cap G)}{P(G)} = \frac{\dfrac{117.945}{385.497}}{\dfrac{267.652}{385.497}} = 0,441$$

Exemplo: Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas e 3 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, *sem reposição*.



A: 2ª. bola sorteada é branca

C: 1ª. bola sorteada é branca

$\mathrm{P}(A)$ = ???

Resultados	Prob. da 1ª	Prob. da 2ª |1ª	Probilidades
BB	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{20}$
BV	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{20}$
VB	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{6}{20}$
VV	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{6}{20}$
		Total	1

Temos $P(A \mid C) = \frac{1}{4}$ **e** $P(A) = \frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{2}{5}$

Considere agora que as extrações são feitas *com reposição*, ou seja, a 1ª. bola sorteada é reposta na urna antes da 2ª. extração. Nesta situação, temos

Resultados	**Prob. da 1ª**	**Prob. da 2ª |1ª**	**Probilidades**
BB	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$
BV	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{25}$
VB	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{25}$
VV	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{25}$
		Total	1

Neste caso,

$P(A)$ = P(branca na 2ª.)

= P(branca na 1ª ,branca na 2ª) +

P(vermelha na 1ª, branca na 2ª)

$= \dfrac{4}{25} + \dfrac{6}{25} = \dfrac{2}{5}$ e

$P(A \mid C)$ = P(branca na 2ª.| branca na 1ª.) = $\dfrac{2}{5} = P(A)$

$P(A \mid C^c)$ = P(branca na 2ª.| vermelha na 1ª.) = $\dfrac{2}{5} = P(A)$

ou seja, o resultado na 2ª. extração *independe* do que ocorre na 1ª. extração.

Independência de eventos:

Dois eventos A e B são <u>independentes</u> se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$\boxed{P(A \mid B) = P(A), \quad P(B) > 0.}$$

A formula: $$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)\,.}$$

é válida se e somente se os eventos são independentes.

Exemplo: A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é 1/3 e a de Madalena é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

A: Jonas é aprovado

B: Madalena é aprovada

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 1/3 \times 2/3 = 2/9$$

$\rightarrow$ Qual foi a suposição feita?