

NOÇÕES DE TESTE DE HIPÓTESES (II)

Teste de Hipóteses sobre p

Nível Descritivo

Resumo

$X \sim \text{binomial}(n; p)$



(1) Estabelecer as **hipóteses sobre p** :

$H: p = p_0$ x $A: p \neq p_0$; (ou $A: p > p_0$, ou $A: p < p_0$)

(2) Escolher um **nível de significância α** .

(3) Determinar a **região crítica RC** da forma

$\{X \leq k_1, X \geq k_2\}$; (ou $\{X \geq k\}$ ou $\{X \leq k\}$)

- Fixar α e obter RC
ou
- Fixar RC e obter α

(4) Selecionar uma **amostra**: obter $X = x$

(5) Regra de **Decisão**:
 $x \in RC \Rightarrow$ rejeitamos H
 $x \notin RC \Rightarrow$ não rejeitamos H

Exemplo 1: Uma indústria de medicamentos afirma que o processo de fabricação de embalagens produz 90% de itens dentro das especificações. O *IPEM* deseja investigar se este processo de fabricação ainda está sob controle.

Sendo p a proporção de embalagens dentro das especificações, as hipóteses de interesse são:

$$H: p = 0,9$$

$$A: p < 0,9$$

Seleciona-se uma amostra aleatória de 15 itens e se observa o número de itens satisfatórios (X), então $X \sim b(15, p)$.

Região crítica: $RC = \{X \leq k\}$

Logo, para $\alpha = 6\%$ temos $k = 11$ e $RC = \{X \leq 11\}$.

Para $\alpha = 1\%$ temos $k = 9$ e $RC = \{X \leq 9\}$.



Se $x_{obs} = 10$ itens satisfatórios, então

a) $\alpha = 6\% \Rightarrow 10 \in RC$

Rejeitamos H ao nível de significância de 6%.

b) $\alpha = 1\% \Rightarrow 10 \notin RC$

Não rejeitamos H ao nível de significância de 1%.

Crítica: arbitrariedade na escolha da RC (nível de significância).

Sugestão: determinar um nível de significância associado à evidência experimental.

NÍVEL DESCRITIVO: P (ou " P -value")

Nesse exemplo, temos $RC = \{X \leq k\}$ e $x_{obs} = 10$.

Qual seria o nível de significância se fosse utilizada a $RC = \{X \leq 10\}$?

O nível de significância seria

$$P(X \leq 10 \mid p = 0,9) = 0,0127.$$

Esse valor é o nível descritivo do teste.

Indicando-o por P , então $P = 0,0127$.

Se o nível de significância α é maior ou igual ao nível descritivo P , então a região crítica de nível α contém o valor observado e, portanto, rejeitamos H .

Portanto, para um α fixado,

$P \leq \alpha \Rightarrow$ rejeitamos H

$P > \alpha \Rightarrow$ não rejeitamos H

No exemplo, **$P = 0,0127$** .

Adotando $\alpha = 0,05$, temos **$P < \alpha$** e, portanto, **rejeitamos H** .

Se tivermos $x_{obs} = 12$, qual será o nível descritivo?

$$P = P(X \leq 12 \mid p = 0,9) = 0,1840$$

Conclusão: não rejeitamos H .

Nível Descritivo é o menor nível de significância para o qual o resultado observado é significativo, ou seja, conduz à rejeição da hipótese nula H .

Exemplo 2: A diretoria de uma escola acredita que neste ano a proporção p de alunos usuários da Internet é maior que os 70% encontrados no ano anterior. Se uma pesquisa com 30 alunos, escolhidos ao acaso, mostrou que 26 são usuários da Internet, podemos concluir que a afirmação da diretoria é verdadeira?

Hipóteses estatísticas:

$$H: p = 0,7$$

$$A: p > 0,7$$

Seja

X : nº de usuários em 30 entrevistados. Então

$$X \sim b(30, p).$$

Se $x_{obs} = 26$ usuários da Internet, o **nível descritivo** do teste é dado por:

$$P = P(X \geq 26 \mid p = 0,7) = 0,0301$$



Conclusão:

Se $\alpha = 5\%$, $P < \alpha \Rightarrow$ **rejeitamos H_0** , ou seja, os dados indicam que a proporção de usuários aumentou (é maior que 70%).

Uso da Aproximação Normal

Exemplo 3: Proporção de analfabetos em uma cidade
Pelo Anuário IBGE/1988: 15% *de analfabetos*.

Vamos supor duas pesquisas:

Em 1998, entre 200 entrevistados, 27 eram analfabetos.

Em 2008, entre 200 entrevistados, 19 eram analfabetos.

Pergunta: Esses dados suportam a tese de diminuição do analfabetismo na cidade de 1988 para 1998? E de 1988 para 2008?

Em ambos os casos, o teste de interesse é das hipóteses:

$$\begin{array}{l} H : p = 0,15 \\ A : p < 0,15 \end{array}$$

sendo p a proporção populacional de analfabetos na cidade (no ano da pesquisa).

Seja

X : nº de analfabetos em 200 cidadãos entrevistados (no ano da pesquisa).

Então,

$$X \sim b(200, p).$$

1) Se adotarmos $RC = \{X \leq 23\}$

Conclusão:

Em 1998, $x_{obs} = 27 \notin RC \Rightarrow$ Não rejeitamos H

Em 2008, $x_{obs} = 19 \in RC \Rightarrow$ Rejeitamos H

Cálculo do nível de significância:

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\text{rejeitar } H \mid H \text{ verdadeira}) \\ &= P(X \leq 23 \mid p = 0,15) \\ &= 0,0958\end{aligned}$$



Cálculo do tamanho do erro tipo II:

$$\begin{aligned}\beta(0,10) &= P(\text{não rejeitar } H \mid p = 0,10) \\ &= P(X > 23 \mid p = 0,10) \\ &= 0,2016\end{aligned}$$

Usando aproximação normal:

$$\alpha = P(X \leq 23 \mid p = 0,15)$$

$$E(X) = np = 200 \times 0,15 = 30$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p) = 200 \times 0,15 \times 0,85 = 25,5$$

$$\text{DP}(X) = \sqrt{25,5} = 5,05$$

$$\alpha \cong P\left(Z \leq \frac{23-30}{5,05}\right) = P(Z \leq -1,39) = 0,0823$$

$$\beta(0,10) = P(X \geq 24 \mid p = 0,10)$$

$$E(X) = np = 200 \times 0,10 = 20$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p) = 200 \times 0,10 \times 0,90 = 18$$

$$\text{DP}(X) = \sqrt{18} = 4,24$$

$$\beta(0,10) \cong P\left(Z \geq \frac{24-20}{4,24}\right) = P(Z \geq 0,94) = 0,1746$$

2) Adotando o nível descritivo:

Em 1998, $x_{obs} = 27 \Rightarrow \mathbf{P} = P(X \leq 27 \mid p = 0,15) = 0,3164$

Em 2008, $x_{obs} = 19 \Rightarrow \mathbf{P} = P(X \leq 19 \mid p = 0,15) = 0,0148$

Conclusão: fixando $\alpha = 5\%$,
em 1998, $P > \alpha \Rightarrow$ não rejeitamos H
em 2008, $P < \alpha \Rightarrow$ rejeitamos H

Usando aproximação:

Em 1998, $\mathbf{P} = P(X \leq 27 \mid p = 0,15)$

$$\cong P\left(Z \leq \frac{27 - 30}{5,05}\right) = P(Z \leq -0,59) = 0,2776$$

Em 2008, $\mathbf{P} = P(X \leq 19 \mid p = 0,15)$

$$\cong P\left(Z \leq \frac{19 - 30}{5,05}\right) = P(Z \leq -2,18) = 0,0146$$

Exemplo 3: Uma pesquisa considerou 92 voluntários para fazerem parte do estudo sendo que cada um deles jogava uma moeda. O voluntário seria submetido ou não a um *teste*, conforme o resultado fosse cara ou coroa. Os seguintes resultados foram obtidos:

	Voluntários
nº caras	35
nº coroas	57
Total	92

Com base nos resultados dos 92 lançamentos você diria que a moeda usada era honesta? Tome a decisão com base no nível descritivo.

Hipóteses estatísticas:

$$H: p = 0,5$$

$$A: p \neq 0,5$$

sendo p a probabilidade de *coroa* da moeda.

Seja

X : nº de *coroas* em 92 lançamentos da moeda.

Então, $X \sim b(92, p)$.

Sob H , $p=0,5$ e $E(X)=92 \times 0,5 = 46$, $\text{Var}(X)=92 \times 0,5 \times 0,5 = 23$

Como a hipótese alternativa é bilateral, no cálculo do valor P , devemos considerar que a região crítica envolve os valores de X que se distanciam muito (para mais ou para menos) do valor previsto pela hipótese nula H .

Sob H , o valor esperado de X é 46.

Como $x_{obs} = 57$, que é maior que 46, calcula-se

$$P(X \geq 57 \mid p = 0,50)$$

Usando a aproximação normal :

$$\cong P\left(Z \geq \frac{57 - 46}{\sqrt{23}}\right) = P(Z \geq 2,29) = 0,011$$

e o nível descritivo será $P = 2 \times 0,011 = 0,022$

Para $\alpha = 5\%$, $P < \alpha \Rightarrow$ Rejeitamos H

Para $\alpha = 1\%$, $P > \alpha \Rightarrow$ Não rejeitamos H

Se o valor de x_{obs} fosse menor que 46, por exemplo, $x_{obs} = 34$, então

$$P = 2P\left(Z \leq \frac{34 - 46}{\sqrt{23}}\right)$$

$$P = 2P(Z \leq -2,5) = 2 \times [1 - A(2,5)]$$

$$= 2 \times [1 - 0,9938] = 0,0124 .$$