

## **PROBABILIDADE**

Dizemos que a probabilidade é uma “medida” da quantidade de incerteza que existe em um determinado experimento. Assim, **só falaremos de probabilidade quando estivermos diante de um experimento aleatório** (experimento no qual existe um componente devido ao acaso).

Nas experiências feitas no laboratório de Física, por exemplo, não existe, ou não deveria existir esse componente. Neste caso, chamaremos de experiências determinísticas: podemos conhecer o resultado final antes mesmo da realização do experimento. As experiências realizadas no laboratório de Química também são determinísticas. Em uma experiência aleatória não podemos saber o resultado com antecedência, mas podemos enumerar todas as possibilidades de resultados. Por exemplo, quando uma criança é concebida, não podemos conhecer seu sexo, mas sabemos que será menino ou menina. Assim, conhecemos as possibilidades, mas não o resultado final.

No ano de 1825 o matemático francês Pierre-Simon LAPLACE publicou um livro no qual fazia um estudo aprofundado sobre a Teoria das Probabilidades. Neste livro ele colocou axiomas para tentar generalizar o que estava sendo feito até aquela época. O segundo axioma fornece a definição de probabilidades que conhecemos hoje quando trabalhamos com casos igualmente possíveis (por exemplo, cada região da roleta, independentemente do número que a representa). Para Laplace, a probabilidade é a relação entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis. Note que a probabilidade é, assim, um valor expresso por uma razão. Se consideremos o exemplo de termos a face par em um dado. Intuitivamente se repetirmos o experimento um grande número de vezes obteremos um número par em aproximadamente a metade dos casos. O que está por trás dessa intuição é o seguinte:

- a) os eventos elementares são todos igualmente “prováveis”;
- b) o número de eventos favoráveis é justamente a metade de todos os eventos;

Em resumo, a primeira tarefa no estudo de probabilidades será *explicitar qual é o conjunto de possíveis resultados do experimento e calcular o número de elementos contidos nele*. A segunda tarefa consiste em calcular o número de casos favoráveis. Traduzindo em linguagem matemática, se  $A$  é o evento do qual estamos procurando a probabilidade, então

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ de resultados favoráveis}}{n^{\circ} \text{ total de resultados possíveis}}$$

O número de casos favoráveis de um evento pode ser no máximo igual ao número total de resultados possíveis. Portanto o valor de  $P(A)$  é no máximo igual a 1. No caso de não existir casos favoráveis  $P(A)$  será, evidentemente, igual a 0 pois o numerador da fração será zero. um evento  $A$

## **Terminologia**

### **1) Experimento aleatório**

É o fenômeno estudado. Ex.: jogue um dado e observe o número mostrado na face de cima.

### **2) Espaço amostral**

O conjunto de todos os possíveis resultados do experimento e denotamos por  $\Omega$ . Lembremos que o número de elementos deste conjunto é denotado por  $|\Omega|$ . No exemplo do dado:  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

### **3) Eventos**

Os elementos do espaço amostral são chamados eventos elementares. Os subconjuntos do espaço amostral serão chamados eventos e podemos aplicar aos mesmos as operações usuais dos conjuntos. Isto é:

**O evento união  $A \cup B$  ocorrerá se pelo menos um dos eventos  $A$  ou  $B$  ocorrer.**

**O evento intersecção  $A \cap B$  ocorrerá se ambos os eventos  $A$  e  $B$  ocorrerem.**

**O evento complementar  $\bar{A}$  ocorrerá se  $A$  não ocorrer.**

**O evento diferença  $A - B$  ocorrerá se  $A$  ocorrer e  $B$  não ocorrer.**

### Classificação dos eventos:

1º) **Evento Simples:** formado por um único elemento do espaço amostral.

Ex.: ocorrência da face 3 no lançamento de um dado.

2º) **Evento Composto:** formado por mais de um elemento do espaço amostral.

Ex.: ocorrência de face par no lançamento de um dado, i.e.,  $A=\{2,4,6\}$ .

3º) **Evento Impossível:** evento que não ocorre no experimento.

Ex.: No lançamento de um dado sair a face 7.

4º) **Evento Mutuamente Exclusivo:** dois eventos A e B são mutuamente exclusivos quando não tem elementos em comum, i.e.,

$$A \cap B = \emptyset$$

Os eventos não podem ocorrer simultaneamente, a ocorrência de um exclui a possibilidade de ocorrência do outro e vice-versa.

Ex.: Ocorrência de face menor que 2 ou maior que 5 no lançamento de um dado.

5º) **Evento Complementar:** dados eventos A e B são complementares se forem mutuamente exclusivos e a união destes for o espaço amostral, i.e.,

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cup B = \Omega$$

Ex.: No exemplo da ocorrência de face par no lançamento de um dado, teremos que  $\bar{A} = \{1,5,7\}$ .

6º) **Evento Condicionado:** quando a ocorrência de um evento A qualquer dependa da ocorrência de outro evento B.

Ex.: Uma caixa contém 8 bolas numeradas de 1 a 8. A ocorrência de uma bola ímpar num segundo sorteio se no primeiro retirei a bola 3.

### Axioma das Probabilidades

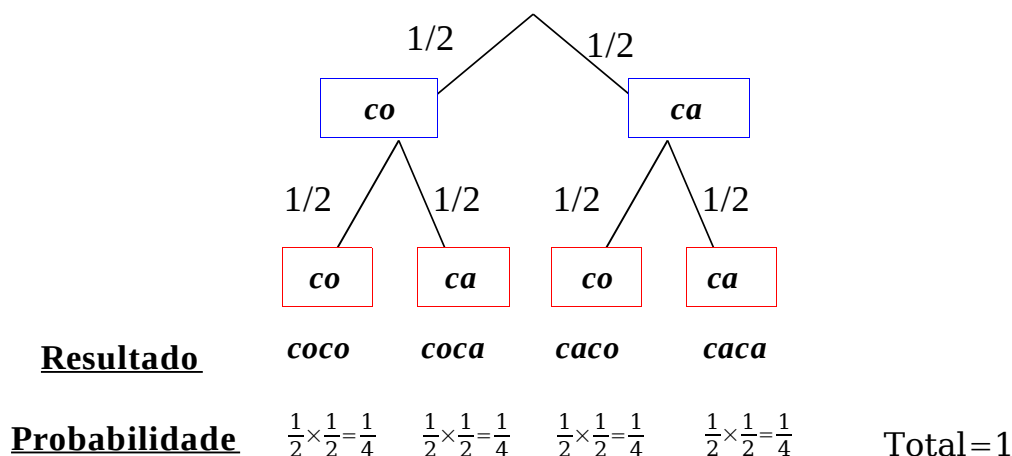
A probabilidade de um evento A, denotado  $P(A)$ , é o quociente entre o número de eventos favoráveis e o número de todos os eventos possíveis, ou seja

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

### Diagrama de Árvores

Usamos para representar graficamente todos os possíveis eventos em um experimento aleatório e assim construir o espaço amostral.

**Exemplo:** Lançamento de uma moeda duas vezes

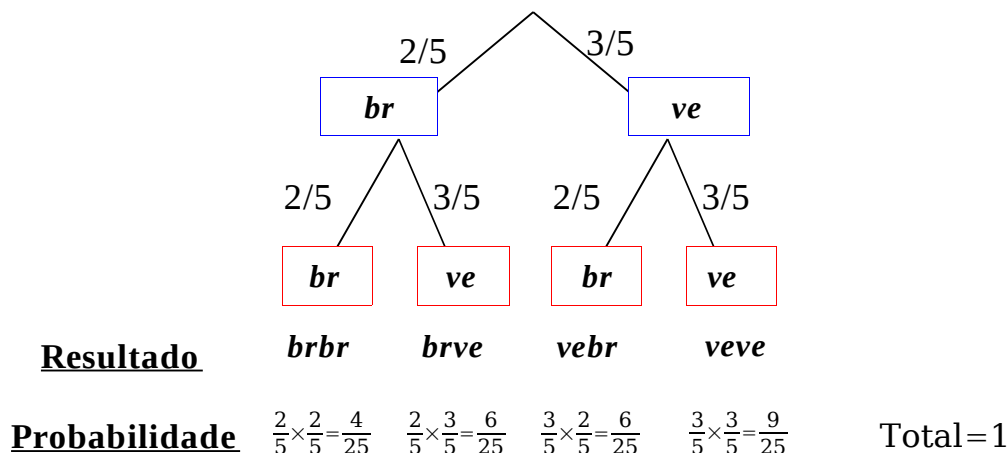


**Questões:**

- 1) Qual a probabilidade de sair um evento simples?
- 2) Qual a probabilidade de sair pelo menos uma cara?
- 3) Qual a probabilidade de sair somente uma cara?

**Exercício:** Construa o diagrama de árvores para o lançamento de três moedas e responda as perguntas anteriores.

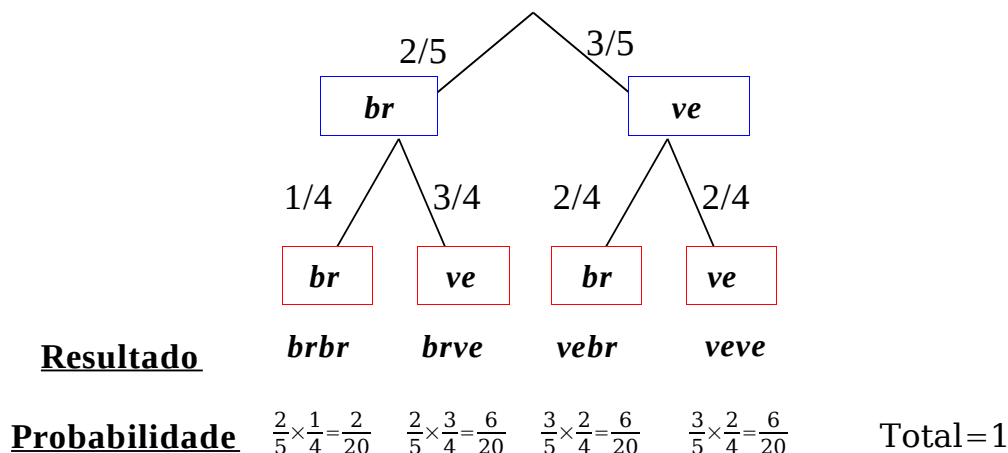
**Exemplo:** Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas e 3 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, com reposição.



**Questões:**

- 4) Qual a probabilidade da 2ª bola sorteada ser branca?
- 5) Qual a probabilidade de sair pelo menos uma bola branca?
- 6) Qual a probabilidade de sair somente uma bola vermelha?

**Exemplo:** Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas e 3 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, sem reposição.



**Questões:**

- 7) Qual a probabilidade da 2ª bola sorteada ser branca?
- 8) Qual a probabilidade de sair pelo menos uma bola branca?
- 9) Qual a probabilidade de sair somente uma bola vermelha?

## Distribuições de Probabilidades

O conceito de variável aleatória nos permite associar aos resultados de um experimento aleatório, números reais para que, utilizando o conceito de função, possamos calcular mais facilmente as probabilidades de ocorrência dos vários eventos correspondentes a esse experimento. Consideramos, então, variável aleatória como uma função definida no espaço amostral  $\Omega$  e que assume valores no conjunto dos números reais. Uma variável aleatória poderá ser discreta ou contínua, conforme os seus possíveis valores formem um conjunto enumerável de valores ou intervalos contínuos da reta real.

### Regras da função de Probabilidades

Indicando as probabilidades de ocorrência de cada um dos valores da variável aleatória  $x_i$  por  $P(x_i)$  estas devem satisfazer as seguintes condições:

- 1ª)  $P(x_i) \geq 0$  para todo  $i$ ;  
2ª)  $\sum_{i=1} P(x_i) = 1$  ou seja  $P(\Omega) = 1$  ;  
2ª)  $P(\emptyset) = 0$  uma vez que  $[\emptyset] = 0$  ;

*Exercício:* A tabela a seguir apresenta dados relativos à distribuição de sexo e alfabetização em habitantes de Sergipe com idade entre 20 e 24 anos.

| Sexo             | Alfabetizado  |               | Total          |
|------------------|---------------|---------------|----------------|
|                  | Sim           | Não           |                |
| <b>Masculino</b> | <b>39.577</b> | <b>8.672</b>  | <b>48.249</b>  |
| <b>Feminino</b>  | <b>46.304</b> | <b>7.297</b>  | <b>56.601</b>  |
| <b>Total</b>     | <b>85.881</b> | <b>15.969</b> | <b>101.850</b> |

Fonte: IBGE-Censo 1991

### Definimos os eventos

$\Omega$  : conjunto de 101.850 jovens de Sergipe, com idade entre 20 e 24 anos.

M: jovem sorteado é do sexo masculino;

F : jovem sorteado é do sexo feminino;

S : jovem sorteado é alfabetizado;

N : jovem sorteado não é alfabetizado.

1) Calcule  $P(M)$ ,  $P(F)$ ,  $P(S)$  e  $P(N)$ .

2) Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado e ser do sexo masculino?

Dica: Procure

$M \cap S$  : jovem é alfabetizado e do sexo masculino

### 1 - Teorema da adição (ou)

a) para eventos mutuamente exclusivos

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

Ex.: Qual a probabilidade de ocorrer “dama” ou “valete” ao retirarmos uma única carta de um baralho completo ?

b) para eventos não mutuamente exclusivos

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ex.: Qual a probabilidade de ocorrer “ás” ou “carta de ouros” ao retirarmos uma única carta de um baralho completo ?

3) Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado ou ser do sexo masculino?

Dica: Procure

$M \cap S$  : jovem é alfabetizado e do sexo masculino

### Observação: probabilidade condicional

Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é denotada por  $P(A | B)$  e definida por

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

4) Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado **sabendo-se** que é do sexo masculino?

Dica: Procure

$M \cap S$  : jovem é alfabetizado e do sexo masculino

### 2 - Teorema da multiplicação (e)

a) para eventos condicionados

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot [P(B | A)]$$

Ex.: Retira-se, sem reposição, duas cartas de um baralho completo, qual a probabilidade de ambas serem espadas ?

b) para eventos independentes

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ex.: Qual a probabilidade de acertarmos os dois primeiros jogos da loteria esportiva utilizando palpite simples ?

## Exercícios

- 5) Retira-se duas cartas de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de se obter dois reis sendo o primeiro um rei de ouros?
- 6) Joga-se um dado duas vezes. Qual a probabilidade de se obter a face 5 em ambas as jogadas?

### Análise Combinatória

Para a contagem direta do número de possibilidades devemos usar da análise combinatória para determinar tanto o número de elementos do espaço amostral, i.e., o número de todos os casos possíveis dos experimentos estudado quanto dos casos favoráveis. Primeiro classificamos adequadamente o agrupamento e depois calculamos sabendo que:

#### **1) Permutação**

Quando ordenamos os elementos de um conjunto numa sequência previamente definida. As permutações podem ser:

##### a) Permutação sem Repetição

Conjuntos com elementos distintos

Ex.: Três membros de uma organização social se ofereceram como voluntários, para compor a diretoria, para o próximo ano, assumindo as funções de Presidente, Tesoureiro e Secretário. Qual o número de maneiras pelas quais os três podem assumir tais cargos?

##### b) Permutação com Repetição

Conjuntos com alguns elementos iguais entre si.

Ex.: Quantos anagramas distintos têm na palavra MISSISSIPPI?

*Exercício:*

Quantos números de 4 algarismos podem ser formados com os 10 algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9:

- a) admitindo-se repetições;
- b) não se admitindo repetições;
- c) não se admitindo repetições e o último algarismo devendo ser zero.

#### **2-Arranjo**

Quando a permutação é feita com apenas uma parte dos elementos do espaço amostral, ou seja, por arranjo se entende o número total de permutações possíveis nos subconjuntos de 'r' elementos de um conjunto composto por 'n' elementos. Os arranjos são calculados pela seguinte expressão:

$$A_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Onde: n = número total de elementos, r = o que se pretende agrupar.

Ex.: Com base no exemplo anterior, suponha que existam 10 membros na organização social e que nenhuma indicação tenha sido feita para os cargos de Presidente, Tesoureiro e Secretário. Qual é o número, de diferentes disposições de 3 membros eleitos entre os 10 membros do clube, que poderão ser formadas?

*Exercício:*

Cinco pessoas constituem a junta diretora de uma empresa. Suponha que somente três destes diretores sejam convidados a representar a empresa num banquete. Quantos arranjos diferentes seriam possíveis para compor este trio?

### **3 – Combinação**

Quando as escolhas se distinguem somente pela qualidade e não pela ordem dos elementos. Para se calcular o número de combinações possíveis de 'n' elementos, tomando-se 'r' de cada vez, usa-se a expressão:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ex.: Suponhamos que 3 membros de uma pequena organização social, de 10 membros, venham a ser escolhidos para formar uma comissão. Qual é o número, de diferentes grupos de 3 pessoas, que pode ser escolhido?

*Exercício:*

De 5 matemáticos e 7 físicos deve-se constituir uma comissão de 2 matemáticos e 3 físicos. De quantas maneiras podemos formar a comissão se:

- a) qualquer matemático e qualquer físico pode ser incluído;
- b) determinado físico deve fazer parte da comissão;
- c) dois determinados matemáticos não devem pertencer à comissão.

### **Distribuição Binomial**

Consideremos agora um experimento com apenas dois resultados possíveis, que chamaremos de sucesso e fracasso. Por exemplo:

- a) Jogamos uma moeda não viciada e temos sucesso = cara, fracasso = coroa.
- b) De uma urna que contém 6 bolas brancas e 4 bolas pretas, sacamos uma bola e temos sucesso = a bola é preta; fracasso = a bola é branca.

Esses experimentos são conhecidos como experimentos de Bernoulli ou ensaios de Bernoulli. Chamaremos de  $p$  a probabilidade de sucesso e  $q = 1 - p$  a probabilidade de fracasso. Devemos ressaltar que qualquer um dos dois resultados possíveis do experimento poderá ser chamado de sucesso, para isso bastando que a sua probabilidade de ocorrência seja indicada por  $p$ .

**Exemplo:** Consideremos um dado lançado 3 vezes.

**Questão:** Qual é a probabilidade de obtermos a face 5 duas vezes?

Denotemos,

**S:** sucesso, ocorre a face 5;

**F:** fracasso, não ocorre a face 5;

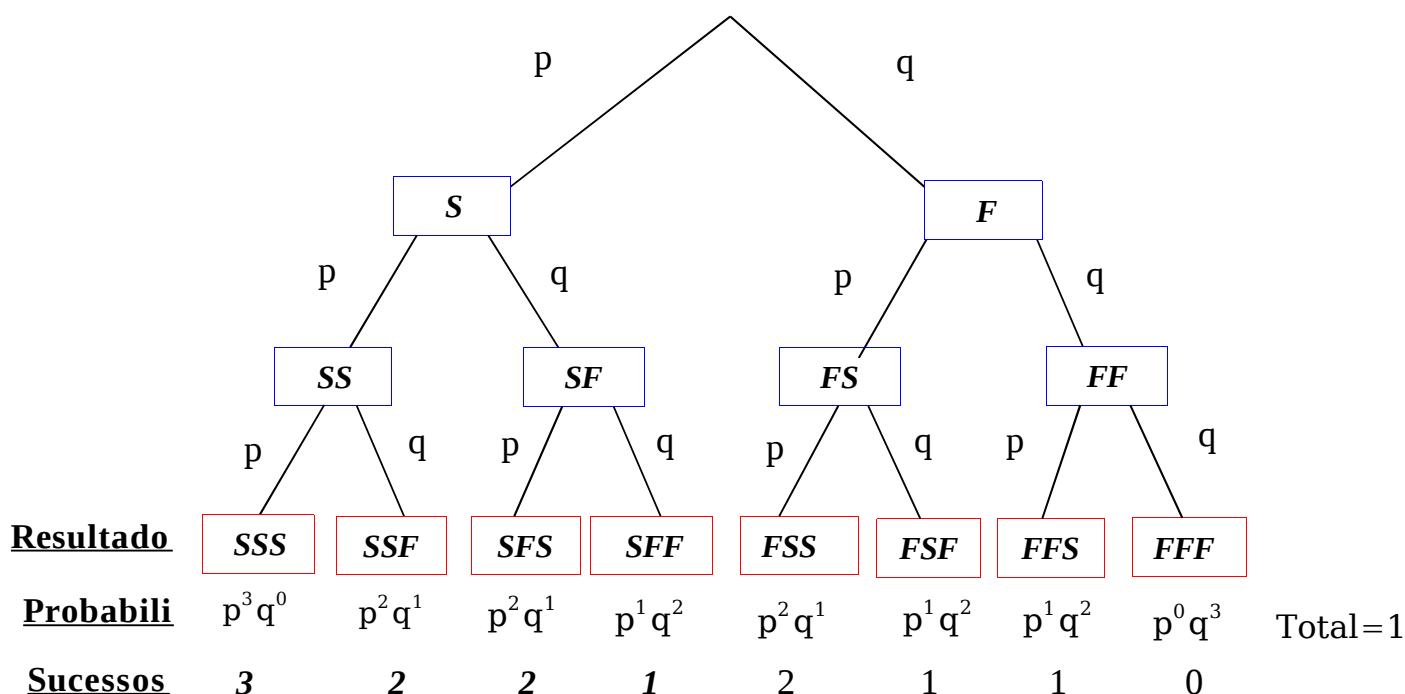
É fácil ver que

$$p = P(\text{sucesso}) = 1/6$$

$$q = 1 - p = P(\text{fracasso}) = 5/6$$

$$\Omega = \{SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF\}$$

Estamos interessados no número total de sucessos que, no caso, é o número de vezes que a face 5 é observada nos 3 lançamentos do dado.



A função de probabilidade é dada por

| No de Sucessos | Probabilidade | p=1/6          |
|----------------|---------------|----------------|
| 0              | $p^0 q^3$     | 125/216=0,5787 |
| 1              | $3p^1 q^2$    | 75/216=0,3472  |
| 2              | $3p^2 q^1$    | 15/216=0,0694  |
| 3              | $p^3 q^0$     | 1/216=0,0046   |

Podemos escrever

$$P(\text{sucesso}=k) = \binom{3}{k} p^k q^{3-k} \quad \text{onde } k=0,1,2,3$$

que no problema de termos 2 faces 5, i.e.,  $k=2$  e  $p=1/6$

$$P(\text{sucesso}=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0,0694$$

Experimento binomial: n ensaios de *Bernouilli*, ou seja:

- (i) ensaios são independentes
- (ii) as probabilidades de sucesso em cada ensaio é igual a p

**Distribuição Binomial:** corresponde ao número de sucessos num experimento binomial, com parametros n e p

$$P(\text{sucesso}=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{onde } k=0,1,\dots,n.$$

*Exemplo*

Sabe-se que numa linha de produção 10% das peças são defeituosas, e as peças são acondicionadas em caixas com 5 unidades. Seja  $X$  a variável aleatória igual ao número de peças defeituosas encontradas numa caixa, determine:

- a) a probabilidade de uma caixa conter exatamente 3 peças defeituosas;
- b) a probabilidade de uma caixa conter duas ou mais peças defeituosas.

**Exercícios:**

1) A tabela a seguir mostra o tipo de sangue de um grupo de funcionários de uma empresa.

| Tipo do Sangue | Fator RH |          |
|----------------|----------|----------|
|                | Positivo | Negativo |
| O              | 620      | 800      |
| A              | 460      | 650      |
| B              | 350      | 350      |
| AB             | 530      | 0        |

Um funcionário é sorteado ao acaso. Qual é a probabilidade que ele tenha sangue:

- a) do tipo O?
- b) RH positivo (RH+)?
- c) do tipo B e com RH+?
- d) do tipo AB ou do tipo A?
- e) RH+ ou RH-?
- f) do tipo AB com RH-?
- g) Sabendo que o funcionário tem sangue do tipo B, qual a probabilidade que tenha fator RH+?

2) Uma empresa entrevistou 300 de seus funcionários a respeito de 3 embalagens A, B e C para o lançamento de um novo produto. O resultado foi o seguinte:

|                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 160 indicaram a embalagem A;      | 120 indicaram a embalagem B;      |
| 90 indicaram a embalagem C;       | 30 indicaram as embalagens A e B; |
| 40 indicaram as embalagens A e C; | 50 indicaram as embalagens B e C; |
| 10 indicaram as três embalagens.  |                                   |

Qual a probabilidade de que um funcionário:

- a) Não escolha nenhuma das três embalagens;
- b) Não escolha a embalagem C;
- c) Não escolham as embalagens B ou C

3) Uma cidade tem 30.000 habitantes e três jornais A, B e C. Uma pesquisa de opinião revela que:

|                   |                   |                    |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| 12.000 lêem A;    | 8.000 lêem B;     |                    |
| 7.000 lêem A e B; | 6.000 lêem C;     |                    |
| 4.500 lêem A e C; | 1.000 lêem B e C; | 500 lêem A, B e C. |

Qual é a probabilidade de que um habitante leia:  
pelo menos um jornal;  
só um jornal.

4) Uma empresa possui 2.400 empregados, classificados de acordo com a tabela abaixo:

| Idade                | Homem | Mulher |
|----------------------|-------|--------|
| Menos do que 25 anos | 317   | 259    |
| Entre 25 e 40 anos   | 1.057 | 527    |
| Mais do que 40 anos  | 186   | 54     |

Se um empregado for selecionado ao acaso, calcule a probabilidade de que ele seja:

- a) um empregado com até 40 anos de idade;
- b) homem entre 25 e 40 anos de idade;
- c) mulher ou tenha mais do que 40 anos de idade;

5) Se 20% das peças produzidas por uma máquina acusam defeito, determine a probabilidade de que, em 4 peças escolhidas ao acaso tenhamos:

- a) uma peça defeituosa;
- b) nenhuma peça defeituosa;
- c) menos de duas peças defeituosas.

6) A probabilidade de um estudante que entra na Universidade se formar é 0,4. Dentre cinco estudantes escolhidos ao acaso, determine a probabilidade de que:

- a) nenhum consiga se formar;
- b) apenas um consiga se formar;
- c) ao menos um se forme.

7) Jogamos uma moeda não viciada 10 vezes. Qual é a probabilidade de obtermos exatamente 5 caras?

8) Sabendo-se que para determinado tipo de peça a probabilidade de se produzir uma peça defeituosa é de 0,02, calcule a probabilidade de que em 10 dessas peças, escolhidas ao acaso da produção tenhamos:

- a) nenhuma peça defeituosa;
- b) apenas uma peça defeituosa;
- c) pelo menos duas peças defeituosas;
- d) no máximo duas peças defeituosas.