III. Introdução à Teoria dos Jogos

Referências: Hillier, F.S., Lieberman G.J., Operations Research.
Straffin, P.D. Game Theory and Strategy
Mirshawka V., Elementos de Pesquisa Operacional.

1. Introdução

1. Dois jogadores no mínimo
2. Cada jogador possui um número de estratégias possíveis
3. As estratégias escolhidas definem o resultado do jogo
4. Associado a cada resultado possível há um payoff para cada jogador

Exemplo 1

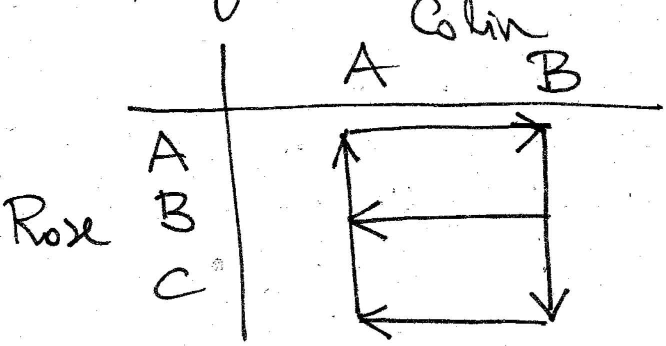
		Colin A	Colin B
Rose	A	(2,-2)	(-3,3)
	B	(0,0)	(2,-2)
	C	(-5,5)	(10,-10)

O que Rose ganha, Colin perde e vice-versa $\Rightarrow$ Jogo de Soma Zero
Basta, portanto, representar os payoffs de Rose:

		Colin A	Colin B
Rose	A	2	-3
	B	0	2
	C	-5	10

2. Diagrama de Movimento

Suponha que Rose jogue C esperando ganhar 10 se Colin jogar B. Colin conhece a matriz do jogo e joga Colin A. Se Rose supuser que Colin jogará ColinA, ela pode jogar RoseA, ganhando 2. No entanto, Colin pode supor que Rose sabe que ele intenciona jogar ColinA, jogando RoseA, assim ele decide jogar ColinB. Rose poderia seguir o raciocínio inteiro acima e antecipar a reação de Colin escolhendo Rose C, ganhando 10.



<u>Exemplo2</u>

		Colin A	Colin B
Rose	A	(1,1)	(-2,2)
	B	(2,-2)	(-5,-5)

(1,1) é a melhor alternativa para o par de jogadores, no entanto <u>1</u> é apenas o segundo melhor payoff do jogo.

Se Colin sabe que Rose vai jogar A, será melhor para ele explorá-la e jogar Colin B, ganhando 2. Se Rose pensar da mesma forma ela ~~irá~~ jogar Rose B e os jogadores acabarão em (−5,−5), que é o pior resultado possível!

Se os jogadores pudessem se comunicar, poderiam combinar e jogar ColinA e RoseA. Mas Colin poderia simplesmente se antecipar e anunciar que jogará B. Se isso ocorrer a única solução para Rose será jogar A e assistir a Colin ganhar 2 enquanto perde 2.

Exemplo 3 Jogue o seguinte jogo 20 vezes.

		Jogador 2			
		A	B	C	D
Jogador 1	A	12	-1	1	0
	B	5	1	7	-20
	C	3	2	4	3
	D	-16	0	0	16

Os números indicam payoffs do Jogador 1. As estratégias mais frequentes são 1C - 2B.

3. Dominância

* Jogador 2 - B é estritamente melhor que Jogador 2-C

* Jogador 2 - B domina 2C
* 2C é dominada por 2B

Definição (Dominância): Uma estratégia S domina uma estratégia T se cada resultado de S é no mínimo tão bom quanto cada resultado de T e pelo menos um resultado de S é estritamente melhor que seu correspondente de T.

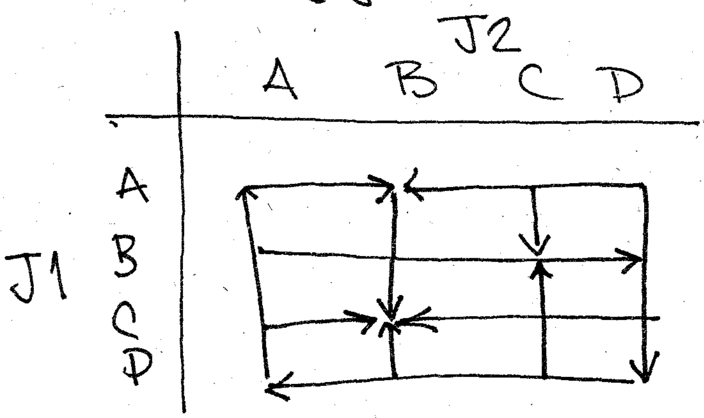
PRINCÍPIO DE DOMINÂNCIA

Um jogador racional nunca escolhe uma estratégia dominada.

4. Ponto de Sela

(1) 1C-2B é um resultado de equilíbrio.

Se J2 sabe ou acredita que J1 irá jogar 1C, J2 deveria jogar 2B. Se J1 sabe ou acredita que J2 irá jogar 2B, J1 deveria jogar 1C.

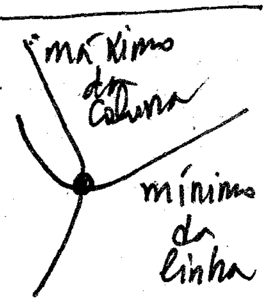


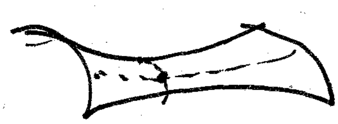
(2) Jogando J1C, J1 assegura que ganhará no mínimo 2. Jogando J2B, J2 assegura que perderá no máximo 2. Se os jogadores não estiverem jogando as estratégias de equilíbrio um ou outro saberá que poderia ter forçado um resultado melhor para si.

J1C e J2B = <u>jogada racional</u>

<u>Exemplo 4</u>

		J2 A	J2 B	J2 C	J2 D
J1	A	12	−1	1	0
J1	B	5	1	7	−20
J1	C	3	2	4	3
J1	D	−16	0	0	16





ponto de sela

Definição (Ponto de Sela): Um resultado em um jogo matricial é denominado ponto de sela se o payoff de J1 neste ponto é o menor de sua linha e, simultaneamente, o maior de sua coluna.

• PRINCÍPIO DO PONTO DE SELA

Se uma matriz apresenta um ponto de sela, ambos jogadores deveriam jogar a estratégia que o contem.

Definição (valor do jogo): Para qualquer jogo matricial, se há um número v tal que existe uma estratégia de J1 que garante que J1 ganhará no mínimo v e, simultaneamente, existe uma estratégia de J2 que garante que J2 perderá no máximo v, então v é chamado o valor do jogo.

Teorema. Se um jogo possui um ponto de sela, o valor neste ponto de sela é o valor do jogo.

Um jogo pode ter mais do que um ponto de sela

Exemplo 5.

		J2: A	B	C	D
J1	A	4	2	5	2
	B	2	1	-1	-20
	C	3	2	4	2
	D	-16	0	16	1

Teorema: Quaisquer dois pontos de sela de um jogo têm o mesmo valor.

Dem.:

$$\begin{array}{ccc} a & \cdots & c \\ \vdots & & \vdots \\ d & \cdots & b \end{array}$$

$a \leq c \leq b$

$b \leq d \leq a \quad \therefore \quad a=b=c=d$

q.e.d.

Exemplo 6:

		J2 A	B	C	D	mínimo da linha
J1	A	4	3	2	5	2 ← maxmin
	B	-10	2	0	-1	-10
	C	7	5	2	3	2 ← maxmin
	D	0	8	-4	-5	-5
Máximo da coluna		7	8	2	5	

↑ minmax

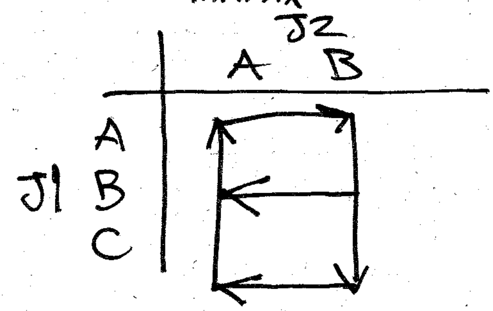
O ponto de sela pode ser encontrado verificando se melhor dos piores resultados do jogador J1 (maxmin) coincide com o melhor dentre os piores resultados do jogador J2 (minmax). Um jogador racional procura conter riscos.

Ponto de sela $\Longleftrightarrow$ $\underset{\uparrow \text{ colunas}}{\text{minmax}} = \underset{\uparrow \text{ linhas}}{\text{maxmin}}$

Uma matriz pode não ter nenhum ponto de sela.

Exemplo 7.

		J2 A	J2 B	min linha
J1	A	2	−3	−3
J1	B	0	2	0 ← maxmin
J1	C	−5	10	−5
maxcol		2 ↑ minmax	10	



minmax ≠ maxmin
∴
não há ponto de sela.

Exercícios

(1.) Encontre os pontos de sela e desenhe os diagramas de movimento para os seguintes jogos:

(a)

		J2 A	J2 B	J2 C	J2 D
J1	A	3	2	4	2
J1	B	2	1	3	0
J1	C	2	2	2	2

(b)

		J2 A	J2 B	J2 C
J1	A	−2	0	4
J1	B	2	1	3
J1	C	3	−1	−2

(c)

		J2 A	J2 B	J2 C
J1	A	4	3	8
J1	B	9	5	1
J1	C	2	7	6

(2) Encontre as dominâncias

		J2 A	J2 B	J2 C	J2 D
J1	A	3	−6	2	−4
J1	B	2	1	0	1
J1	C	−4	3	5	4

(82)

5. Estratégias Mistas

Alguns jogos não apresentam um ponto de sela. ~~Por exemplo, o dilema dos prisioneiros~~

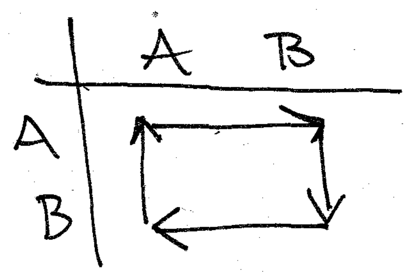
Exemplo 8

		Colin C	Colin D	mínimo da linha
Rose	C	2	−3	−3
Rose	D	0	3	0 ← maxmin
	max da coluna	2	3	

~~Imagine que Rose e Colin sejam suspeitos de um crime. Ambos estão presos para interrogatório em salas separadas. Se Rose~~

min max

Como não há um ponto de sela. Nenhum dos jogadores estaria disposto a jogar sempre a ~~da~~ mesma forma pois assim estaria exposto à exploração pelo outro jogador.



A única estratégia possível seria o uso de jogadas alternadas ao acaso visando maximizar o ganho esperado.

Este tipo de estratégia é conhecido como <u>estratégia mista</u>.

<u>Definição (Estratégias Mistas)</u>: Seja um jogo definido por uma matriz M_{jk} com $j=1,\dots,L$ linhas e $k=1,\dots,C$. ~~Se~~ $P=(p_1,\dots,p_L)$ é a estratégia mista do jogador 1 e $Q=(q_1,\dots,q_C)$ é a estratégia

mista do jogador 2.

Definição (valor esperado do payoff): O valor esperado dos payoffs $a_1, \ldots, a_L$ com respeito às probabilidades $p_1, \ldots, p_L$ é $a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + \ldots + a_L p_L$.

No exemplo 8 suponha que a estratégia de Colin envolva jogar uma moeda para decidir quando jogar A e B. Se Rose jogar A, o valor esperado de seu payoff será:

$$\text{Rose A: } \quad 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Se Rose jogar B o valor esperado será

$$\text{Rose B: } \quad 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

Claramente, se Rose sabe que Colin irá utilizar a estratégia $Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sua escolha deverá ser Rose B.

PRINCÍPIO DO VALOR ESPERADO

Se o jogador conhece a estratégia mista empregada pelo adversário e sabe que o adversário continuará a jogar a mesma estratégia independentemente de suas decisões, sua escolha racional deverá ser a estratégia pura com maior valor esperado.

84

Do ponto de vista de Colin é claro que a escolha da estratégia mista $Q=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ irá levar a resposta de Rose jogando sempre B e a uma perda esperada de $\frac{3}{2}$.

Suponhamos então que Colin jogue outra estratégia mista $Q=(q, 1-q)$. Os valores esperados de Rose neste caso serão

$$\begin{cases} \text{Rose A}: & q\times(2)+(-3)(1-q) = -3+5q \\ \text{Rose B} & q\times(0)+3\ (1-q) = 3-3q \end{cases}$$

Como Colin não sabe qual estratégia Rose irá escolher, a melhor situação será quando

$$-3+5q^*=3-3q^* \therefore \quad q^*=\frac{3}{4}$$

Se Colin jogar $Q^*=\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, o payoff esperado irá ser $\frac{3}{4}$ independentemente da escolha de Rose.

Analogamente, Rose pode jogar $P=(p, 1-p)$, neste caso:

$$\begin{cases} \text{Colin A}: & p\cdot 2+0\cdot(1-p) = 2p \\ \text{Colin B}: & p\cdot(-3)+3\ (1-p) = 3-6p \end{cases}$$

A melhor situação será se

$$2p^*=3-6p^* \therefore \quad p^*=\frac{3}{8}, \text{ ou seja, } P^*=\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$$

com payoff esperado de $\frac{3}{4}$

Temos então que $P^*=\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$ $Q^*=\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ é a solução do jogo.

6. Solução do Jogo

Uma forma prática de cálculo de soluções de jogos sem pontos de sela é a seguinte:

Exemplo 9

		Colin A	Colin B
Rose	A	2	-3
	B	0	3

diferença de linha

$2-(-3)=5 \quad \to 3$

$0-3=-3 \quad \to 5$

diferença das colunas $\quad 2-0=2 \quad -3-3=-6$

$6 \quad 2$

$P^* = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$

$Q^* = \left(\frac{6}{8}, \frac{2}{8}\right)$

$v = \frac{3}{8} \times 2 + \frac{5}{8} \times 0 = \frac{3}{4}$

7* Jogos 2 x n*

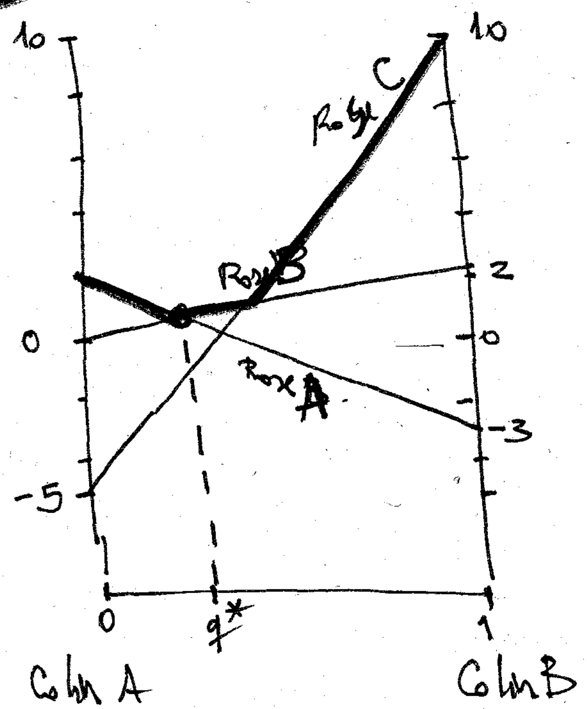
Todo jogo 2xn sem pontos de sela possui uma solução correspondendo a uma estratégia mista que é solução de um jogo de seus subjogos 2x2.

Exemplo 10

		Colin A	Colin B	min linha
Rose	A	2	-3	-3
	B	0	2	0 ← maxmin
	C	-5	10	-5
	max col	2	10	
		↑ minmax		

minmax ≠ maxmin

∴ não há pto de sela.



Cada reta representa payoffs esperados de Rose para cada valor q na estratégia mista de Colin

$$Q = (q, 1-q)$$

A curva cheia indica os piores resultados para Colin para cada escolha de q.

O melhor dos piores resultados é indicado por q^* e é definido pela intersecção de A e B. Assim sendo o subjogo que resolve o jogo original é definido pela matriz:

		Colin A	Colin B	
Rose	A	2	-3	5
Rose	B	0	2	-2
		2	-5	

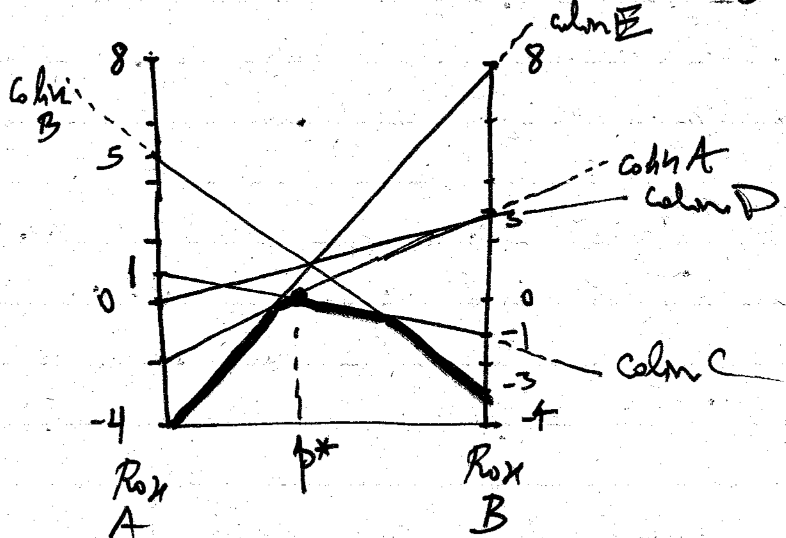
$$\begin{pmatrix} 2/7 \\ 5/7 \\ 0 \end{pmatrix} = P^*$$

$$Q^* = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

O valor do jogo: $v = p_1 a_{11} q_1 + p_1 a_{12} q_2 + p_2 a_{21} q_1 +$
$+ p_2 a_{22} q_2 + p_3 a_{31} q_1 + p_3 a_{32} q_2 = \frac{4}{7}$

Exemplo 11

		Colin A	B	C	D	E
Rose	A	−2	5	1	0	−4
	B	3	−3	−1	3	8



Os piores resultados para Rose são indicados pela linha cheia. O melhor dentre os piores é indicado por p^*, encontro entre Colin A e Colin C.

		Colin A	C	min lin
Rose	A	−2	1	−2
	B	3	−1	−1 ← max
	maxcol	3	1 ↑ min	

minmax ≠ maxmin
não há pto de sela

		Colin A	C	
Rose	A	−2	1	−3
	B	3	−1	4
		−5	2	

$\begin{pmatrix} 4/7 \\ 3/7 \end{pmatrix} = P^*$

$\frac{2}{7}, \frac{5}{7}$

$Q^* = \left(\frac{2}{7}, 0, \frac{5}{7}, 0, 0\right)$

O valor do jogo é

$v = (-2)\cdot\frac{4}{7} + 3\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{1}{7}$

8. Teorema Minimax (von Neumann 1928)

Qualquer jogo $m \times n$ tem uma solução. Ou seja, existe um único número v, denominado <u>valor do jogo</u>, e existe uma estratégia ótima (pura ou mista) tal que:

(1) Se Rose jogar sua estratégia ótima, seu payoff esperado será $\geq v$, não importa o que Colin fizer.
(2) Se Colin jogar sua estratégia ótima, seu payoff esperado será $\leq v$, não importa o que Rose fizer.

Esta solução <u>sempre</u> será uma solução de algum sub-jogo $k \times k$ do jogo original.

A solução para um jogo $m \times n$ será sempre a solução para algum subjogo (1×1 no caso de um ponto de sela). As estratégias puras envolvidas em uma solução são chamadas <u>estratégias ativas</u>.

<u>Exemplo 12</u>

Colin

		A	B	C	min lin
Rose	A	1	2	2	1
	B	2	1	2	1
	C	2	2	0	0
	max col	2	2	2	

$\therefore$ não há pto de sela

A estratégia ótima para ~~Rose~~ Colin pode ser obtida calculando-se os payoffs esperados para cada stratégia escolhida por Rose, assim:

$$\begin{aligned}
\text{Rox } A &: \ 1\cdot q_1 + 2\cdot q_2 + 2\cdot(1-q_1-q_2) = 2-q_1 \\
\text{Rox } B &: \ 2\cdot q_1 + 1\cdot q_2 + 2\cdot(1-q_1-q_2) = 2-q_2 \\
\text{Rox } C &: \ 2\cdot q_1 + 2q_2 + 0\cdot(1-q_1-q_2) = 2q_1+2q_2
\end{aligned}$$

$$2q_1 = 2-q_2 = 2q_1+2q_2 \ \therefore$$

$$\begin{cases} q_1 - q_2 = 0 \\ 2q_1+3q_2=2 \end{cases} \Rightarrow q_1 = q_2 = \frac{2}{5}$$

$Q^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Equivalentemente, repetindo o procedimento para Colin temos:

$P^* = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$. O valor do jogo é $v = \frac{8}{5}$.

9. Jogos Matriciais mxn

A matriz do jogo é definida por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

O payoff esperado pelo jogador 1 jogando a estratégia j contra o jogador 2 jogando a estratégia mista $(q_1, \ldots, q_n)$ é
$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} q_k$$

Pelo teorema minimax sabemos que existe uma estratégia para o jogador 2 (Colin) tal que o payoff esperado não pode ser pior do que v (lembrando que perdas do jogador 2 ~~são~~ correspondem a valores positivos de payoff). Em símbolos temos que:

$$\text{Existe } q^* \text{ tal que } \sum_{k=1}^{n} a_{jk} q_k^* \leq v \quad \text{para todo } j.$$

Observemos que sempre é possível transformar uma matriz de jogo pela adição de uma constante em todas as suas entradas sem alterarmos as estratégias ótimas.

Exemplo 13: Os jogos

$$(\mathrm{I}) \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (\mathrm{II}) \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

são idênticos do pto de vista de suas estratégias pois diferem por uma constante $(+6)$. Note que o valor do jogo passa a ser $v+6$ no segundo jogo (v é o valor do jogo I).

Podemos, portanto, supor $v > 0$ o que nos permite escrever

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \frac{q_k^*}{v} \leq 1$$

Introduzindo $x_j = \frac{q_j^*}{v}$ teremos:

$\sum_k a_{jk} x_k \leq 1$. No entanto temos também que $\sum_k q_k^* = 1$, assim

$f = \sum_k \frac{q_k^*}{v} = \frac{1}{v} \sum_k q_k^* = \frac{1}{v}$. Desejamos que v seja o menor possível (no caso de sermos o jogador 2), isso equivale a procurarmos pelo máximo de f.
O problema que desejamos resolver é, portanto:

Maximizar $f = \sum_j x_j$

sujeito a $\sum_k a_{jk} x_k \leq 1$

$x_j \geq 0$

Se $M = \max f$ teremos que $v = \frac{1}{M}$ e $Q^* = [v x_j^*]$.

Exemplo 14

$$A' = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{+6} A = \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{min} \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{max } 8 & 7 \end{matrix} & \end{array}$$

minmax $\neq$ maxmin

$\max f = x_1 + x_2$
sujeito a
$4x_1 + 6x_2 \leq 1$
$8x_1 + 2x_2 \leq 1$
$2x_1 + 7x_2 \leq 1$
$x_1, x_2 \geq 0$

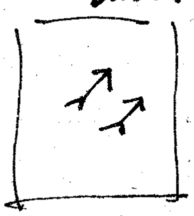
A solução será

$Q^* = (v x_1^*, v x_2^*)$
$v = 1/\max f$

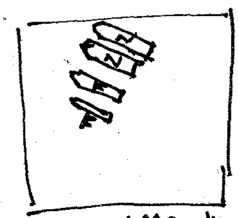
Exemplo 15 Star Wars

Dois países – vermelho e azul – estão em guerra constante. Os vermelhos desejam destruir uma base militar azul, para isso eles possuem 4 mísseis que serão disparados em seqüência. Dois mísseis são equipados com ogivas nucleares, dois são falsos. Para defesa, os azuis têm 2 anti-mísseis. Cada anti-míssil pode detectar dois mísseis vermelhos e destruir o primeiro que encontrar com uma ogiva real. Os vermelhos devem escolher uma ordem de lançamento, por exemplo, "FNNF". Os azuis escolhem quando lançar seus mísseis anti-mísseis, por exemplo, "13" para disparar no primeiro ou no terceiro.

Os azuis perdem se pelo menos um míssil nuclear vermelho atingir a base.



Azul



vermelho

A matriz do jogo é

Vermelho

Azul		NNFF	NFNF	NFFN	FNNF	FNFN	FFNN
	12	1	1	0	1	0	0
	13	0	1	1	1	1	0
	14	0	0	1	0	1	0
	23	0	0	0	1	1	1
	24	0	0	0	0	1	1
	34	0	0	0	0	0	1

Por dominância podemos eliminar as linhas e colunas marcadas acima e escrever:

		Vermelho	
	NNFF	NFFN	FFNN
Azul 12	1	0	0
13	0	1	0
23	0	0	1

A estratégia ótima para os vermelhos é dada por

$$Q^* = (q_1^*, q_2^*, 1-q_1^*-q_2^*)$$

$$q_1^* = q_2^* = 1 - q_1^* - q_2^* = \frac{1}{3}$$

$$Q^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$ e o valor do jogo é $v = 1/3$.

As estratégias ótimas podem ser descritas da seguinte forma:

Vermelhos: Disparar dois mísseis falsos seguidos.
Azuis: Nunca esperar mais do que dois mísseis para lançamento do primeiro míssil anti-míssil.

A chance dos azuis se salvarem é, no entanto, apenas 1/3.

10. Teoria dos Jogos e Livre Arbítrio

O seguinte problema foi proposto em 1960 pelo físico William Newcomb.
Duas caixas:

$10000 — 1

$1.000.000 ou nada — 2

Duas escolhas: (1) Pega as duas caixas
(2) Pega apenas a caixa 2.

Ontem um ser Superior fez uma previsão sobre o que você fará hoje. Se previu que você pegará as duas caixas, deixou a segunda vazia. Se previu que você pegará só a caixa 2 deixou $ 1000.000 nesta caixa. Se previu que você escolherá aleatoriamente deixou a segunda caixa vazia.

Não importa a natureza específica do tal ser. Você tem razões para acreditar que ele pode fazer previsões com grande acurácia. Digamos que acerte ~~com~~ em 90% das vezes. Que escolha você faria?

A matriz do jogo é

		Ser Supremo: Prevê que você pegará as duas caixas	Ser Supremo: Prevê que você pegará apenas a caixa 2
Você	Pega as duas caixas	$ 10000	$ 1.010.000
Você	pega apenas a caixa 2	0	$ 1.000.000

Qual estratégia escolher?

ARGUMENTO 1: Suponha que eu pegue ambas as caixas.

Quase certamente o Ser terá previsto isto e terá deixado a caixa 2 vazia, assim ganharei quase certamente $ 10.000. Por outro lado, suponha que eu pegue apenas a caixa 2. Então o Ser quase certamente terá previsto isso e colocará $ 1.000.000 na caixa 2 e ganharei quase certamente $ 1.000.000. Prefiro ganhar 1.000.000, então, escolho apenas a caixa 2.

ARGUMENTO 2 O Ser fez a previsão ontem e há $ 1000000 na caixa 2 ou não está. O que fizer hoje não irá mais mudar nada. Se $ 1.000.000 já estiverem na caixa nada irá mudar apenas porque decidi pegar as duas caixas, mudando de idéia e ganhando $ 1.010.000. Se não há $ 1.000.000, então, ganharei $ 10.000 pegando as duas caixas. Se estiver, ganharei $ 1.010.000 pegando as duas caixas. Assim, devo escolher as duas caixas.

Colocando de outra forma:

Argumento 1: Princípio do Valor Esperado

Ambas: 0,9 × 10.000 + 0,1 × 1.000.000 = 101.000
Apenas 2: 0,1 × 0 + 0,9 × 1.000.000 = 900.000

A escolha racional é "Apenas 2".

Argumento 2: Princípio da Dominância

"Ambas" domina "Apenas 2".

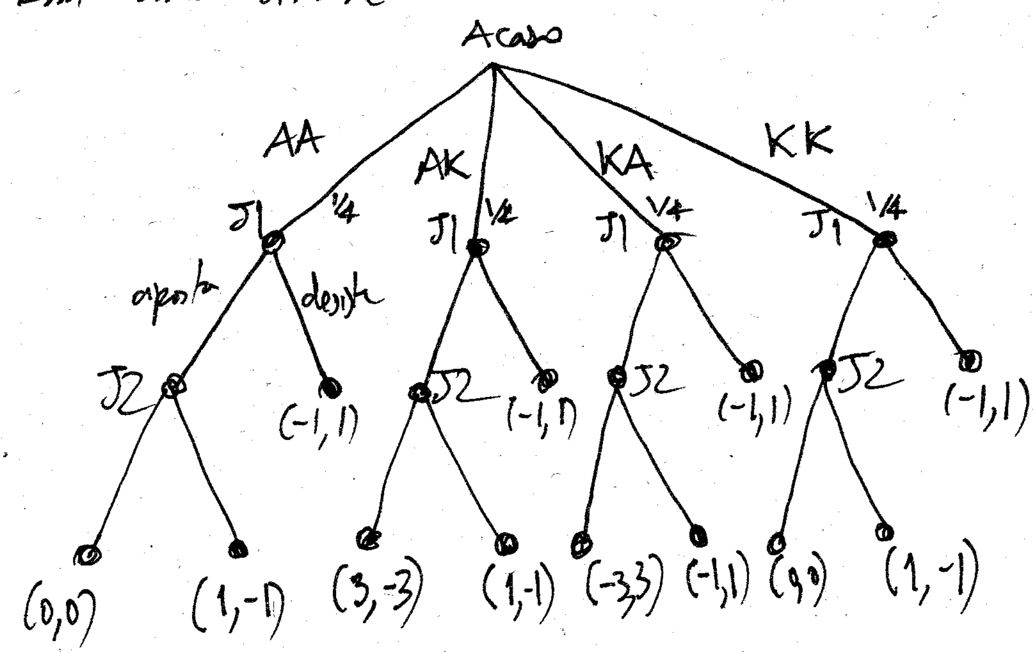
A escolha racional é "Ambas".

Os dois princípios apenas levam a conclusão consistente se a chance do Ser Superior predizer nossa decisão for $q = 1/2$.

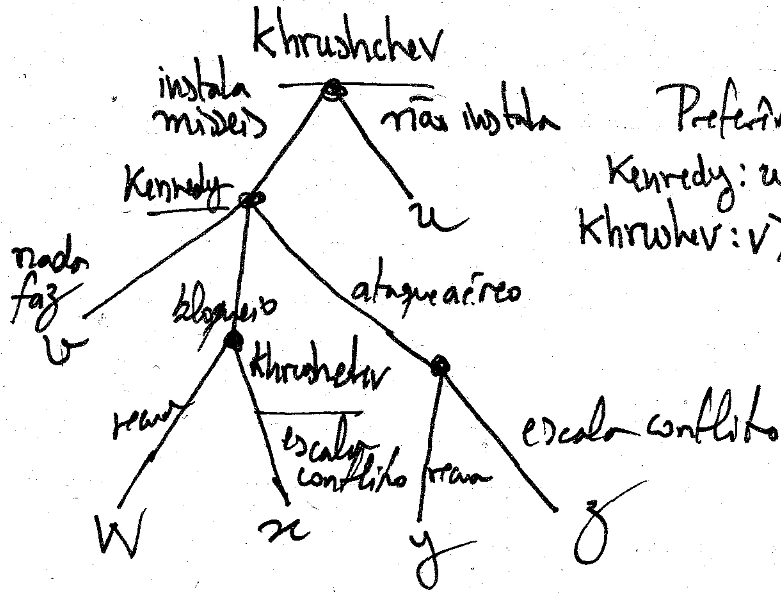
11. Jogos em Árvore

Jogos sequenciais podem ser representados em uma árvore. Suponhamos um jogo de Poker simplificado. Neste jogo há apenas duas cartas A e K. As cartas são, inicialmente, distribuidas aleatoriamente. O jogador 1 pode apostar ou desistir. Se desistir perderá 1 e o jogador 2 ganhará 1. Se apostar, o jogador 2 terá que decidir. O jogador 2 pode então apostar ou desistir se desistir perderá 1 e o jogador 1 ganhará 1, se apostar as cartas serão comparadas. Se forem iguais haverá um empate ~~se for~~ ~~jogador 1~~, caso contrário, o jogador com um A ganhará 3 enquanto o adversário perderá 3.

Em uma árvore:



Exemplo 16 Crise dos Mísseis



Preferências:
Kennedy: $w > y > u > v > x > z$
Khrushchev: $v > u > w > y > z > x$

Todo jogo em árvore pode ser representado na forma matricial. Primeiro listamos todas as alternativas de cada jogador:

Khrushchev

A: Não instala mísseis
C: Instala mísseis, recua em resposta a bloqueio, escala em resposta à ataque
B: Instala mísseis, recua sempre
D: Instala mísseis. Escala em resposta à bloqueio, recua em resposta à ataque
E: Instala mísseis. Escala sempre.

Kennedy

A: Não faz nada
B: Bloqueio
C: Ataque

Kennedy \ Khrushchev	A	B	C	D	E
A	u	v	v	v	v
B	$\boxed{u}$	w	w	x	x
C	u	y	z	y	z

98

O jogo pode ser resolvido utilizando apenas dominância:

Primeiro eliminamos as colunas E (dominada por D), C e D (dominadas por B). ~~A~~ ~~já~~ A matriz resultante é

	A	B
A	u	v
B	u	w
C	u	y

Eliminamos as linhas A e C (dominadas por B) e escrevemos:

	A	B
B	u	w

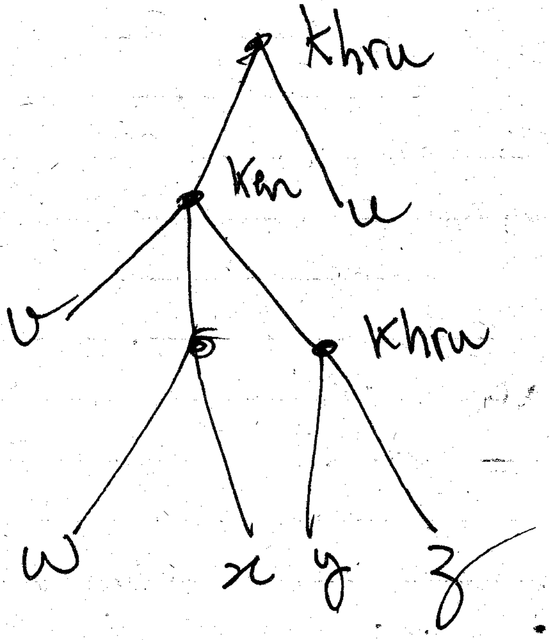
Finalmente eliminamos a coluna B (dominada por A). A solução do jogo é, portanto, :

Kennedy: Bloqueio
Krushchev: Não instala mísseis.

Alternativamente podemos resolver um jogo em árvore utilizando a técnica de truncamento.

Nesta técnica começamos pelas folhas da árvore.

(1)

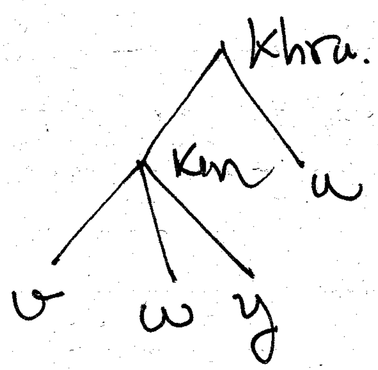


Lembrando que para Khrushchev:

$v > u > w > y > z > x$

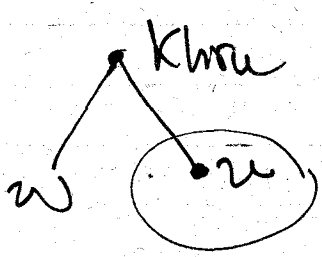
Escolhemos as opções preferenciais

(2)



Para Kennedy temos:
$w > y > u > v > x > z$

(3)



Finalmente

$u > w$ para Khrushchev

EXERCÍCIOS

(3) a. Construa a matriz do jogo Pedra-Tesoura-Papel.
b. Encontre as estratégias ótimas (solução do jogo).

(4) Esboce a árvore que represente o jogo da velha. O jogo é honesto?

(5) Dois políticos começarão sua campanha em breve. Os dois têm que decidir ~~sobre~~ que assunto irão enfatizar em sua campanha. Suponha que você é o Político 1. A situação pode ser descrita na forma de um jogo.

		Assunto para o Político 2: 1	2	3
Assunto para o Político 1	1	7	−1	3
	2	1	0	2
	3	−5	−3	−1

Os payoffs indicam perdas ou ganhos em popularidade. Qual assunto você deve escolher?

(6) Desenhe o ~~grá~~ diagrama de movimento para o seguinte jogo

	A	B	C
A	−2	0	2
B	3	1	−1

(7) Considere um jogo genérico 2x2 definido por

		Colin A	Colin B
Rose	A	a	b
	B	c	d

Suponha que os dois maiores payoffs são a e d. Suponha que Colin jogará A e B com probabilidade x e 1−x.

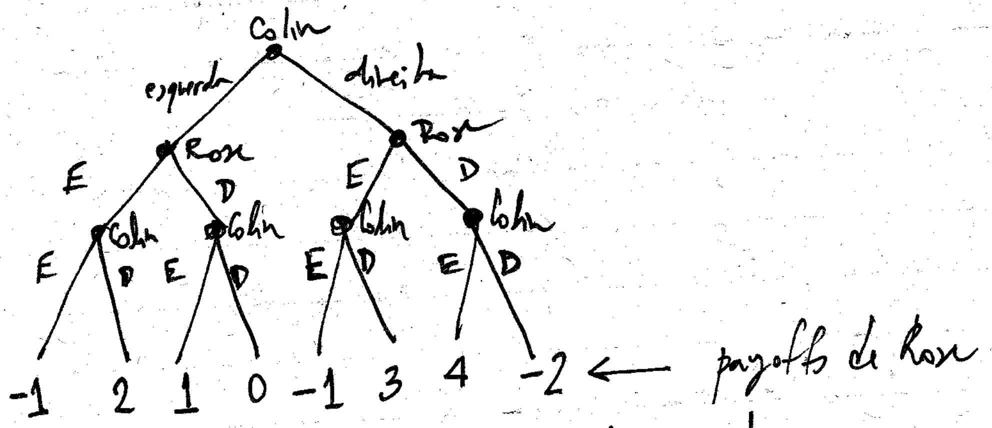
(a) Mostre que o valor de x que faz com que os payoffs esperados para Rose jogando A e Rose jogando B sejam os mesmos é

$$x = \frac{d-b}{(a-c)+(d-b)}$$

(b) Mostre que o valor do jogo será

$$v = \frac{ad-bc}{(a-c)+(d-b)}$$

(8) Considere o jogo da figura abaixo



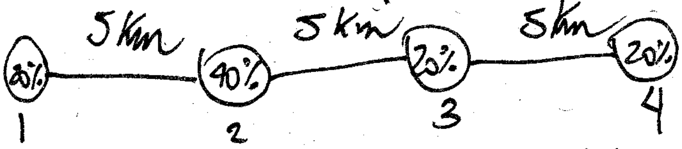
(a) Encontre a solução pela técnica de truncamento.
(b) Liste todas as estratégias de cada um e construa a matriz do jogo. Tente resolvê-lo por dominância

(9) Resolva os seguintes jogos

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

(10) Duas firmas, uma grande e uma pequena, fabricam o mesmo produto e querem construir um novo armazém em uma das quatro cidades ao longo da estrada. Suponhamos que a população das quatro cidades é 100% e então a distribuição da população está indicada na figura abaixo



Suponhamos que a firma grande terá 80% de todo movimento em cada cidade que esteja mais próxima de seu armazém que do armazém da firma pequena, 60% do movimento se as distâncias forem iguais e 40% na cidade que diste do seu armazém mais do que do armazém da firma pequena.

(a) Escreva a matriz do jogo.

(b) Verifique se há dominâncias

(c) Resolva o jogo.