

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM "MODELAGEM MATEMÁTICA EM FINANÇAS"

Otimização de Hedge de Derivativos com Algoritmo Genético

Alexandre de Aguiar Kamakura

Orientadores: Prof. Dr. Renato Vicente
Prof. Dr. Joe A. Yoshino

SÃO PAULO

2004

Otimização de Hedge de Derivativos com Algoritmo Genético

Alexandre de Aguiar Kamakura

e ao

Dissertação apresentada à
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de Mestre.

Orientadores: Prof. Dr. Renato Vicente
Prof. Dr. Joe A. Yoshino

SÃO PAULO

2004

Apresentação

A proposta desse trabalho é otimizar o hedge dos derivativos contratados em balcão através de contratos de maior liquidez, como os listados nas bolsas de valores. A otimização do hedge permite que os ganhos da atividade de intermediação sejam maximizados, pois os ganhos conseguidos na venda teriam risco de mercado remanescente mínimo, permitindo uma redução nos preços oferecidos aos clientes e conseqüentemente, um maior grau de competitividade para o banco.

Sumário

Introdução	1
1 Risco de Mercado	4
1.1 Marcação a mercado.....	4
1.1.1 Preços de mercado.....	5
1.1.2 Fluxos de caixa pré fixados	6
1.1.3 Fluxos de caixa pós fixados	8
1.1.4 Fluxos de caixa não-lineares	12
1.2 Risco de mercado	13
1.2.1 Carteiras de Markowitz	14
1.2.2 CAPM (Capital Asset Pricing Model)	15
1.2.3 APT (Arbitrage Pricing Theory).....	17
1.2.4 VaR (Value at Risk).....	17
1.2.5 Expansão Delta-Gamma	20
1.2.6 Vértices de risco.....	28
1.2.7 Interpolação	30
1.2.8 Análise de risco por simulação de Monte Carlo	34
1.2.9 Análise de risco por simulação de Stress	37

1.2.10 Modelos utilizados na prática	37
2 Algoritmo Genético	39
2.1 Problemas de otimização	39
2.1.1 Otimização com Programação Linear	40
2.2 Algoritmo Genético	54
2.2.1 A população.....	54
2.2.2 O cromossomo	57
2.2.3 A função adaptação ("fitness")	59
2.2.4 Seleção	60
2.2.5 Recombinação	62
2.2.6 Mutação	65
2.2.7 Aplicações do algoritmo genético	66
3 Implementação	68
3.1 Produtos utilizados	69
3.1.1 Derivativos com Clientes.....	72
3.1.2 Derivativos de Hedge	85
3.2 Arquitetura orientada a objetos	90
3.2.1 Visão geral	90
3.2.2 Aplicação	91
3.2.3 MeioAmbiente	93
3.2.4 População	94
3.2.5 Indivíduo	95
3.2.6 Cenário	96

3.2.7	CarteiraClientes	96
3.2.8	Instrumentos	97
3.2.9	Interface com o usuário	98
3.3	Resultados	99
3.3.1	Estratégia	99
3.3.2	Hedge de um swap pré x cdi com vencimento coincidente com série de futuro de DI	99
3.3.3	Hedge de um swap pré x cdi com vencimento diferente da série de futuros de DI	102
3.3.4	Hedge de uma carteira de 100 swaps pré x cdi.....	104
3.3.5	Hedge de um swap dólar x cdi com vencimento coincidente com série de futuro de DDI	105
3.3.6	Hedge de um swap dólar x cdi com vencimento coincidente com série de futuro de FRC	107
3.3.7	Hedge de uma carteira de 300 swaps.....	107
3.3.8	Hedge de uma opção de compra flexível com opções de compra listadas e futuros	109
4	Conclusão	111
A	Derivação da fórmula de Black-Scholes para opção de compra de dólar européia	113
5	Bibliografia	118

Lista de Figuras

2.1	45
2.2	55
2.3	56
2.4	57
2.5	58
2.6	61
2.7	61
2.8	63
2.9	64
2.10	67
3.11	81
3.12	95
3.13	100
3.14	101
3.15	102
3.16	103
3.17	103

Introdução

Entre os produtos oferecidos pelas instituições financeiras aos seus clientes corporativos e institucionais estão os derivativos de balcão (OTC - over the counter). Os derivativos são contratos financeiros criados para fornecer aos clientes uma forma de proteção (hedge) dos seus fluxos de caixa futuros em relação às flutuações dos preços e taxas praticados no mercado. São instrumentos que podem atender aos mais diversos setores da economia, tanto ao produtor de soja, que quer garantir o preço de venda do seu produto quando for feita a colheita, quanto ao fabricante de latas de refrigerante, que quer evitar aumento no custo de produção devido ao aumento do preço do alumínio no futuro.

As instituições financeiras buscam atender a seus clientes com contratos específicos, adequando prazos e volumes com as necessidades da empresa. Entretanto, a instituição financeira não pode absorver todo o risco do contrato. Também não é interessante para a instituição ficar com seu patrimônio exposto às flutuações das taxas. Assim, ao fecharem os contratos de balcão com seus clientes, as instituições financeiras buscam anular o risco desses contratos nas bolsas de valores, através de instrumentos financeiros de maior liquidez. Surge nessa hora, a habilidade dos operadores e dos analistas de risco que realizam toda uma engenharia para anular o risco da operação e ainda conseguir um ganho financeiro.

Como é definido quanto a empresa deve pagar pelo derivativo? Vários fatores podem entrar na composição do preço, tais como classificação de crédito do cliente, custos

operacionais, custo de margens de garantia, custo da anulação do risco de mercado e probabilidade de perda devido ao risco de mercado remanescente.

Os bancos realizam operações de forma direcional, especulando e apostando na movimentação dos preços. Mas esse trabalho será realizado com enfoque nas áreas comerciais, que realizam apenas a intermediação do hedge. O lucro dessas áreas vem basicamente da margem comercial conseguida na venda do derivativo. Entretanto, devido às necessidades específicas dos clientes, o banco sempre acaba correndo algum risco remanescente, pois nas bolsas de valores são encontrados apenas contratos padronizados, que dificilmente oferecem um hedge perfeito para o contrato de balcão. Há quem diga que a procura de ativos de maior liquidez para a obtenção de hedge de contratos específicos é uma arte.

A proposta desse trabalho é otimizar o hedge dos contratos de balcão através dos contratos listados nas bolsas de valores. A otimização do hedge permite que os ganhos da atividade de intermediação sejam maximizados, pois o ganho conseguido na venda não teria nenhum risco remanescente envolvido, permitindo até mesmo uma redução nos preços oferecidos aos clientes e conseqüentemente, um maior grau de competitividade para o banco.

Neste trabalho, os derivativos escolhidos para a aplicação dos conceitos foram os derivativos de taxa câmbio, muito utilizados pelas empresas importadoras e exportadoras, com dívidas ou recebíveis em dólar e que não querem que as flutuações da taxa de câmbio interfiram nos resultados de sua atividade.

O risco das operações foram modelados de acordo com a expansão Delta-Gamma dos instrumentos utilizados. Essa expansão consiste na aplicação de expansão de Taylor

multivariada nas funções de cálculo de preço. Assim, a carteira de hedge é avaliada com a aplicação de cenários de estresse nos componentes principais de risco, sendo a melhor carteira aquela que apresentar a menor variação esperada no valor. As técnicas utilizadas para calcular os preços dos derivativos e o risco das carteiras serão mostradas no Capítulo 1.

Para otimizar a composição da carteira de hedge, foi escolhido o algoritmo genético. A idéia principal desse algoritmo consiste em modelar a solução de um problema em um indivíduo de uma população. Através do mecanismo de seleção natural, onde sobrevivem os indivíduos mais aptos ao meio ambiente, a população converge para uma solução ótima. O algoritmo é de rápida implementação e possui um grau de flexibilidade elevado na definição da função objetivo. Seu funcionamento será detalhado no Capítulo 2.

Para aplicar esses conceitos, foi desenvolvida uma arquitetura que será apresentada no Capítulo 3. Serão apresentados os derivativos mais comuns no mercado brasileiro, com a modelagem no preço e do risco de mercado. Também será detalhada a modelagem orientada a objeto do sistema, cujo maior objetivo foi permitir facilmente a adição de novos instrumentos de hedge, novos contratos de balcão e diversas funções de avaliação da carteira na composição da função objetivo.

Finalmente, no Capítulo 4, serão descritas as conclusões do trabalho e apresentação de idéias para futuras direções. Em futuros estudos, pode-se por exemplo incluir risco de crédito ou risco de liquidez na avaliação da carteira de hedge.

Chapter 1

Risco de Mercado

1.1 Marcação a mercado

O conceito de marcação a mercado (mark-to-market) é utilizado para valorizar ativos e passivos. É um conceito muito abrangente, com muitas variáveis a serem consideradas e muitas de difícil mensuração, como risco de crédito ou não pagamento (default) ou risco de liquidez que envolve o grau de dificuldade de transformar seu ativo em caixa.

Neste texto estaremos considerando apenas a valorização dos ativos segundo os preços e as expectativas de taxas de juros observadas no mercado. Dependendo dos instrumentos utilizados na observação das taxas futuras, outros aspectos de risco podem estar embutidos no valor observado, além da pura expectativa de variação. Esses efeitos serão desprezados nas análises.

Neste trabalho os ativos decompostos em quatro componentes principais, dos quais derivam grande parte dos produtos encontrados no mercado de derivativos.

1) Ativos físicos: são aqueles que possuem os preços cotados diretamente no mercado e envolvem entrega física. Esses ativos são modelados diretamente pelo comportamento do preço de mercado observado. Como exemplo pode-se considerar as ações, as commodities e as diferentes moedas no mercado de câmbio.

2) Ativos com fluxos de pagamento futuro pré-fixado: esses ativos envolvem o recebimento de caixa numa data futura num valor pré determinado pelo contrato. Nesse grupo incluem-se títulos públicos como LTN e swaps com uma das pontas pré-fixadas.

3) Ativos com fluxos de pagamento futuro pós fixados: nesse grupo estão os ativos que dão o direito de receber um valor financeiro no vencimento correspondente à correção do valor nominal do ativo por um indexador ou cotação de moeda determinados no contrato. Nessa classificação estão os títulos públicos com indexação cambial como as NTN-D, os títulos indexados pela taxa SELIC como as LFT e os swaps com pontas dólar ou CDI.

4) Ativos com fluxo de pagamento futuro não linear: esses ativos possuem um valor no vencimento que é uma função não linear de uma taxa ou ativo objeto, como as opções de dólar.

1.1.1 Preços de mercado

Os preços de mercado normalmente são observados diretamente nas bolsas de valores através das cotações de compra ou venda estabelecidas pelos participantes interessados em realizar um negócio. Portanto, para obter o valor de mercado desses ativos num instante desejado, basta coletar amostras sobre seu preço observado. Não há o que calcular a não ser a média das cotações.

São utilizadas várias formas para modelar o comportamento dos preços desses ativos. Os trabalhos mais comuns são feitos em cima de análises de séries temporais. Nesses modelos o preço atual pode ter uma autocorrelação com níveis de preço anteriores (modelos

autoregressivos), pode ter médias móveis e pode ter uma componente estocástica com variância também dependente do tempo ou do nível de preço (modelo heterocedástico). Para o componente estocástico a distribuição mais adotada é a normal.

No caso de derivativos, partindo-se do processo chamado passeio aleatório

$$S_t = S_{t-1} + \mu + \sigma \varepsilon_t$$

onde ε_t são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição normal de média zero e variância 1, chega-se num processo onde S tem distribuição lognormal, isto é, a variável $\ln S$ tem distribuição normal.

$$\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = \mu + \sigma \varepsilon_t$$

diferenciando a equação, chegamos ao movimento browniano geométrico

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ$$

onde dZ é um processo de Wiener, isto é, uma variável aleatória com distribuição normal de média zero e variância dt .

1.1.2 Fluxos de caixa pré fixados

A base fundamental da marcação a mercado está na consideração de fluxos de caixa, que nada mais são do que movimentos financeiros numa data futura. Pelo princípio de ausência de arbitragem, dado que se conhece o valor futuro (FV- Forward Value) de um fluxo de

caixa, o valor presente do mesmo (PV - Present Value) se calcula através do desconto pela expectativa de taxa de juros do período (df - discount factor). Valor presente de um fluxo de caixa pré fixado:

$$PV_{pre} = \frac{FV_{pre}}{df_{pre}}$$

O fator de desconto é calculado de acordo com as diferentes formas de expressão de taxa existentes no mercado. Na análise matemática, a convenção mais utilizada é a de capitalização contínua, pois é uma função exponencial de fácil diferenciação.

$$df = e^{-rT}$$

No mercado brasileiro, a convenção de taxa adotada para a taxa de juros em Reais, é a expressão anual na forma exponencial por 252 dias úteis, onde DU é o número de dias úteis do período.

$$df_{pre} = (1 + r_{pre})^{-\frac{DU}{252}}$$

Já a taxa de juros em dólares americanos é expressada linearmente, na forma anual por 360 dias corridos. No mercado brasileiro esta taxa é chamada de taxa cupom:

$$df_{cpm} = (1 + r_{cpm} * DC/360)$$

Estas formas de expressão de taxa serão extensivamente utilizadas no decorrer do texto, pois são as taxas utilizadas pelas mesas de operações no mercado brasileiro. O pregão de futuros ocorre nessas expressões de taxas. Os movimentos esperados e as mar-

gens de ganho dos operadores medida pelo diferencial das taxas de compra e de venda são observados dessa forma e portanto mais apropriadas para fornecer uma avaliação de risco de mercado para os operadores.

No caso dos modelos intertemporais de taxa de juros onde a taxa é variável através dos diferentes prazos, temos o seguinte cálculo do fator de desconto, onde t é o instante atual e T é a data de vencimento:

$$df(t, T) = e^{\int_t^T r(u)du}$$

Em trabalhos de opções de taxa de juros, a taxa instantânea r também é modelada como um processo estocástico

$$dr = u(r, t)dt + w(r, t)dX$$

onde $u(r, t)$ e $w(r, t)$ determinam o comportamento da média e da variância no tempo, respectivamente. Nesse trabalho as taxas de juros serão consideradas como ativos observáveis para o prazo dos contratos. Portanto esses modelos não serão vistos em detalhe.

1.1.3 Fluxos de caixa pós fixados

O conceito de marcação a mercado visto acima pode se estender para os casos em que não se conhece o valor futuro do fluxo de caixa. Como exemplo pode-se citar os ativos indexados por taxas de juros ou taxas cambiais. Nesses casos, o valor futuro depende de processos estocásticos, de acordo com o modelo de taxa de juros adotado. No exemplo

abaixo, para um fluxo de caixa indexado pela taxa de juros r , o valor futuro é calculado pelo valor nominal N multiplicado pelo fator dos juros já decorridos e multiplicado pelo fator de juros esperado de hoje até o vencimento.

$$FV(t, T) = N e^{\int_0^t r_{ant}(u) du} e^{\int_t^T r(u) du}$$

O fator de juros esperado de hoje até o vencimento é uma integral de um processo estocástico r . Já o fator de juros decorridos é uma função de $r_{ant}(t)$ que é determinística pois já foi divulgada oficialmente. De acordo com a convenção da taxa CDI temos a fórmula modificada para:

$$FV_{CDI}(t, T) = N \cdot \prod_{i=0}^{t-1} \left[(1 + CDI_i)^{\frac{1}{252}} \right] \cdot e^{\int_t^T r(u) du}$$

Dependendo do tipo de operação realizada, o fluxo de caixa pode ainda ter um componente determinístico acordado no início da operação. Quando esse componente determinístico é aditivo e pré fixado, pode ser considerado apenas como uma constante adicionada no valor futuro. DU é o prazo em dias úteis da operação.

$$FV_{CDI}(t, T) = N \cdot \prod_{i=0}^{t-1} \left[(1 + CDI_i)^{\frac{1}{252}} \right] \cdot e^{\int_t^T r(u) du} + N \cdot (1 + r_{op})^{\frac{DU}{252}}$$

Quando é um componente multiplicativo, a modelagem torna-se um pouco mais complexa, como pode-se observar no caso do percentual do CDI para o mercado brasileiro.

$$FV_{CDI}(t, T) = N \prod_{i=0}^{t-1} \left[\left((1 + CDI_i)^{\frac{1}{252}} - 1 \right) \cdot p_{CDI} + 1 \right] \cdot \prod_{i=t}^{T-1} \left[\left(e^{\int_t^{i+1} r(u) du - \int_t^i r(u) du} - 1 \right) \cdot p_{CDI} + 1 \right]$$

Para fluxos de caixa indexados pela variação cambial, o valor futuro depende da variação da taxa de juros em duas moedas diferentes. No caso de fluxos em Reais indexados pela variação do Dólar, onde r é a taxa de juros em Reais, q é a taxa de juros em Dólar, S é a paridade Reais/Dólar hoje, S_0 a paridade no início do fluxo e N o valor nominal, temos:

$$FV_{dolar}(t, T) = \frac{N}{S_0} S e^{\int_t^T r(u) du} e^{-\int_t^T q(u) du}$$

Para o caso do fluxo em dólar mais uma taxa de cupom definida na operação de prazo DC dias corridos:

$$FV_{dolar}(t, T) = \frac{N}{S_0} (1 + q_{op} \cdot DC/360) \cdot S \cdot e^{\int_t^T r(u) du} e^{-\int_t^T q(u) du}$$

Para o cálculo do valor presente nesses casos de fluxos de caixa com valores indexados, as taxas de juros serão consideradas como na teoria de valorização neutra ao risco. As taxas de juros serão admitidas livre e risco, sem qualquer espécie de prêmio. Na valorização neutra ao risco o valor esperado do fluxo de caixa no futuro, calculado por uma medida de probabilidade Q martigale equivalente, descontado pela taxa de juros livre de risco resulta no valor presente.

$$PV(t) = \frac{E_Q[FV(T)]}{df(t, T)}$$

No caso dos fluxos de caixa lineares, como nos casos mostrados acima, exceto o percentual do CDI, o valor presente fica com um cálculo bastante simples, pois consideramos as taxas de juros como variáveis exógenas, determinísticas e observáveis no mercado. No caso de 100% do CDI:

$$\begin{aligned}
FV_{CDI}(t, T) &= N \cdot \prod_{i=0}^{t-1} \left[(1 + CDI_i)^{\frac{1}{252}} \right] \cdot e^{\int_t^T r(u) du} \\
df_{pre}(t, T) &= e^{\int_t^T r(u) du} \\
PV_{CDI}(t, T) &= \frac{FV_{CDI}(t, T)}{df_{pre}(t, T)} \\
PV_{CDI}(t, T) &= N \cdot \prod_{i=0}^{t-1} \left[(1 + CDI_i)^{\frac{1}{252}} \right]
\end{aligned}$$

Observa-se nesse caso que os fluxos de caixa indexados pelo CDI tem o valor presente determinístico, independente das expectativas de variação da taxa de juros. Isto ocorre porque na metodologia escolhida, o CDI é a própria taxa livre de risco e portanto, os fluxos de caixa indexados pelo CDI não tem risco de mercado.

No caso do fluxo de caixa indexado pelo dólar, o fator correspondente à taxa de juros em reais também é anulado:

$$\begin{aligned}
FV_{dolar}(t, T) &= \frac{N}{S_0} (1 + q_{op} \cdot DC/360) \cdot S \cdot e^{\int_t^T r(u) du} e^{-\int_t^T q(u) du} \\
df_{pre}(t, T) &= e^{\int_t^T r(u) du} \\
PV_{dolar}(t, T) &= \frac{FV_{cpm}(t, T)}{df_{pre}(t, T)} \\
PV_{dolar}(t, T) &= \frac{N}{S_0} (1 + q_{op} \cdot DC/360) \cdot S \cdot e^{-\int_t^T q(u) du}
\end{aligned}$$

Será mostrado adiante que os derivativos lineares encontrados no mercado brasileiro como futuros e swaps são modelados através da composição dos tipo básicos de fluxos de caixa.

1.1.4 Fluxos de caixa não-lineares

O valor futuro de um fluxo de caixa não linear, como aqueles gerados no vencimento das opções, possui um valor no vencimento que não varia linearmente de acordo com o ativo objeto ou indexador. O cálculo do valor esperado será dependente de uma medida de probabilidade do ativo objeto no vencimento do contrato, que será aplicada na função que retorna o valor final (pay-off).

No caso da fórmula de Black-Scholes, o valor esperado do fluxo de caixa de uma opção de compra europeia é dado por:

$$FV_{CallBS}(t, T) = E[\max(S_T - X), 0]$$

$$E[\max(S_T - X), 0] = \int_X^{\infty} (S_T - X) g(S_T) dS_T$$

onde $g(S_T)$ é a distribuição lognormal de probabilidade da variável S_T .

Como o escopo desse trabalho são os derivativos cambiais no mercado brasileiro, consideramos S uma variável que segue o processo estocástico dado por $dS = (r - q) S dt + \sigma S dZ$, sendo r a taxa de juros livre de risco em reais e q a taxa de juros em dólar dada pelo cupom cambial. Abaixo encontra-se a fórmula para cálculo de preço de opção de dólar europeia, produto utilizado na implementação e cuja demonstração encontra-se no apêndice.

$$\begin{aligned}
PV_{CallBS}(t, T) &= \frac{S_0 N(d1)}{df_{cpm}(t, T)} - \frac{X N(d2)}{df_{pre}(t, T)} \\
d1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \ln\left(\frac{df_{pre}(t, T)}{df_{cpm}(t, T)}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\
d2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \ln\left(\frac{df_{pre}(t, T)}{df_{cpm}(t, T)}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}
\end{aligned}$$

Nesse trabalho foram escolhidos instrumentos com forma de cálculo analítica, com fórmula fechada. Apesar de ser possível a utilização, não serão abordados os produtos com valor esperado dependente do caminho do movimento browniano calculados numericamente com simulações de Monte Carlo ou com árvores binomiais.

1.2 Risco de mercado

No capítulo anterior foi mostrado como determinar o valor presente de um ativo financeiro. Como foi possível observar, esse valor presente depende do valor observado dos preços e das taxas de juros no mercado. Devido ao comportamento dinâmico dos preços e das taxas de juros devido às leis da oferta e demanda, o valor do ativo pode mudar de um instante para outro, podendo gerar ganhos ou perdas financeiras. Isso é o que chamamos de risco de mercado.

Geralmente, os investidores diversificam as suas aplicações em mais de um ativo, formando uma carteira ou portfólio de ativos. Os modelos de avaliação risco de mercado

são construídos para fornecer uma medida da possível perda financeira de uma carteira, dada as prováveis movimentações do mercado.

A seguir serão mostrados sucintamente os modelos clássicos de avaliação do risco de mercado em carteiras.

1.2.1 Carteiras de Markowitz

O modelo de Markowitz tem como base a análise de média e variância dos retornos históricos dos ativos financeiro. Neste caso, a medida de risco é dada pela medida de dispersão dos retornos da carteira, isto é, a própria variância. O objetivo do modelo é determinar uma seleção das quantidades de cada ativo de forma a montar uma carteira eficiente. Uma carteira eficiente é aquela cuja combinação dos ativos é ótima no sentido de maximizar o retorno médio dentro do nível de variância escolhido.

A análise parte da determinação da média e variância de cada ativo e também da correlação entre cada um dos ativos existentes. Dadas as expressões do retorno médio $E(R_P)$ e da variância da carteira $VAR(R_P)$ em função dos pesos w_i de cada ativo, das médias $E(R_i)$ e variâncias σ_{ii} individuais, bem como os coeficientes de correlação σ_{ij}

$$E(R_P) = [E(R_1) \quad E(R_2) \quad \cdots \quad E(R_N)] \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$$

$$VAR(R_P) = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_N] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}$$

Temos um problema de programação linear com o objetivo de achar $[w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_N]$ tal que $E(R_P)$ seja máximo, dado $VAR(R_P) = K$, ou achar $[w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_N]$ tal que $VAR(R_P)$ seja mínimo, dado $E(R_P) = K$.

A grande observação feita por Markowitz foi que o problema de otimização acima leva a uma solução que maximiza a utilidade esperada pelo investidor, obtendo a chamada fronteira eficiente.

1.2.2 CAPM (Capital Asset Pricing Model)

O CAPM é um modelo que parte do pressuposto que a carteira de mercado é uma carteira eficiente, dentro da análise de média-variância, quando está em equilíbrio. A fronteira eficiente da carteira de mercado com um ativo livre de risco é obtida pelo modelo de Markowitz

$$\mu = R_f + \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_M} \sigma$$

Essa curva é chamada de linha de mercado (Security Market Line) e sua inclinação $\frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_M}$ é o prêmio de risco.

Uma carteira obtida com $a\%$ num ativo i e $(1 - a)\%$ na carteira de mercado, tem média e variância dada por:

$$E(R_P) = aE(R_i) + (1 - a)E(R_M)$$

$$\sigma(R_P) = \sqrt{a^2\sigma_i^2 + (1 - a)^2\sigma_M^2 + 2a(1 - a)\sigma_{iM}}$$

O prêmio de risco dessa carteira é dado por

$$\frac{\frac{\delta E(R_P)}{\delta a}}{\frac{\delta \sigma(R_P)}{\delta a}} = \frac{E(R_i) - E(R_M)}{\frac{1}{2}(a^2\sigma_i^2 + (1-a)^2\sigma_M^2 + 2a(1-a)\sigma_{iM})^{-1/2} \times (2a\sigma_i^2 - 2\sigma_M^2 + 2\sigma_{iM} - 4a\sigma_{iM})}$$

Dado que no mercado em equilíbrio temos que $a \rightarrow 0$ e o prêmio de risco da carteira iguala-se ao prêmio de risco da linha de mercado:

$$\begin{aligned} \frac{E(R_i) - E(R_M)}{\frac{1}{2}(\sigma_M^2)^{-1/2} \times (-2\sigma_M^2 + 2\sigma_{iM})} &= \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_M} \\ \frac{E(R_i) - E(R_M)}{(\sigma_{iM} - \sigma_M^2)/\sigma_M} &= \frac{E(R_m) - R_f}{\sigma_M} \\ E(R_i) &= R_f + [E(R_m) - R_f] \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \end{aligned}$$

Transformando na forma mais conhecida temos

$$E(R_i) = R_f + \beta_i [E(R_m) - R_f]$$

$$\text{com } \beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

Uma das conclusões tiradas do modelo do CAPM é que quanto maior a diversificação de uma carteira, menor o risco não sistêmico, isto é, minimiza-se o efeito do risco individual de um ativo.

Um problema do CAPM na avaliação do risco de mercado é que o beta é apenas uma medida relativa de risco. O beta mede quanto o preço de uma ação varia em relação ao índice de mercado, mas não avalia o risco do ativo sozinho. Além disso, o CAPM foi modelado para trabalhar com ativos cujos preços são observados no mercado em relação

aos ativos livres de risco. Fica difícil aplicá-lo em problemas de ativos com taxa de juros e derivativos.

1.2.3 APT (Arbitrage Pricing Theory)

O APT foi desenvolvido por Ross em 1976. Funciona como uma generalização do CAPM, pois modela o retorno dos ativos como uma função linear de k fatores F

$$R_i = E(R_i) + b_{i1}F_1 + \dots + b_{ik}F_k + \varepsilon_i$$

Assim, o modelo do APT chega a resultados análogos ao CAPM

$$E(R_i) - R_f = [\delta_1 - R_f]b_{i1} + \dots + [\delta_k - R_f]b_{ik}$$

com $b_{ik} = \frac{COV(R_i, \delta_k)}{VAR(\delta_k)}$ onde δ_k é o retorno esperado de um portfólio dado por F_k .

Para chegar ao CAPM a partir do APT, basta considerar apenas 1 fator, que seria o retorno da carteira de mercado.

1.2.4 VaR (Value at Risk)

VaR é um modelo de mensuração de risco de mercado que também recorre à análise estatística para tentar prever o comportamento futuro do valor de uma carteira de ativos. O VaR fornece o valor de perda máximo da carteira para um dado intervalo de confiança e um dado intervalo de tempo, dentro da distribuição de probabilidades dos retornos.

O modelo foi projetado para atender aos mais variados tipos de ativos, inclusive aqueles com fluxos de caixa futuros, sensíveis a variação das taxas de juros, quanto aos derivativos não lineares, como as opções. A idéia parte do pressuposto que os ativos objeto possuem retornos com distribuição normal multivariada.

Para cada ativo V_i deve-se obter o desvio padrão σ_i . O VaR desse ativo é dado por

$$VaR_i = 1.65\sigma_i$$

onde 1.65 é o valor da função de densidade de probabilidade acumulada para 95% de probabilidade. Isto significa que a o valor de V_i em 95% dos casos não vai reduzir mais que $1.65\sigma_i$ e o VaR calculado corresponde a perda máxima com 5% de tolerância que pode ocorrer em 1 dia. Para 99% de confiança, o fator seria 2.33 e o cálculo ficaria

$$VaR_i = 2.33\sigma_i$$

Esse conceito é estendido para uma carteira com k ativos, dados os pesos de cada ativo na carteira w_i , os desvios padrões σ_i e as correlações ρ_{ij} entre eles:

$$VaR = \sqrt{\vec{V} R \vec{V}^T}$$

$$\vec{V} = (w_1 \times 1.65\sigma_1, w_2 \times 1.65\sigma_2, \dots, w_k \times 1.65\sigma_k)$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1k} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k1} & \rho_{k2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

A técnica normalmente utilizada para avaliar os desvios padrões e as correlações é chamada de alisamento exponencial, onde apenas uma janela dos dados históricos é utilizada e pesos maiores são dados às amostras mais recentes.

Dado o fator de decaimento λ , temos a seguinte matriz de retornos de k ativos com uma janela de observação T

$$X = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21}\sqrt{\lambda} & r_{22}\sqrt{\lambda} & \cdots & r_{2k}\sqrt{\lambda} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{T1}\sqrt{\lambda^{T-1}} & r_{T2}\sqrt{\lambda^{T-1}} & \cdots & r_{Tk}\sqrt{\lambda^{T-1}} \end{bmatrix}$$

Para normalizar a matriz de retornos, calculamos os desvios padrões para cada retorno da seguinte forma

$$\sigma_j = \left(\sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} \right)^{-1} \sqrt{\sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} r_{ij}^2}$$

e chegamos na matriz normalizada Y

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{r_{11}}{\sigma_1} & \frac{r_{12}}{\sigma_2} & \cdots & \frac{r_{1k}}{\sigma_k} \\ \frac{r_{21}\sqrt{\lambda}}{\sigma_1} & \frac{r_{22}\sqrt{\lambda}}{\sigma_2} & \cdots & \frac{r_{2k}\sqrt{\lambda}}{\sigma_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{r_{T1}\sqrt{\lambda^{T-1}}}{\sigma_1} & \frac{r_{T2}\sqrt{\lambda^{T-1}}}{\sigma_2} & \cdots & \frac{r_{Tk}\sqrt{\lambda^{T-1}}}{\sigma_k} \end{bmatrix}$$

A matriz de correlação é dada por

$$R = \left(\sum_{i=1}^T \lambda^{i-1} \right)^{-1} Y^T Y$$

Dessa forma podemos calcular o VaR para uma carteira de ativos.

1.2.5 Expansão Delta-Gamma

Como acabamos de ver, o VaR é calculado a partir dos desvios padrões e correlações entre os diferentes ativos da carteira, considerando que todos tem distribuição normal. Entretanto existem ativos que não tem seus preços observados diretamente no mercado. Seus preços são calculados a partir de um ou mais ativos objeto. Os produtos com fluxos de caixa, por exemplo, são calculados em relação as taxas de juros para os prazos do contrato, como vimos no capítulo anterior. Podem também ser função de duas taxas de juros mais a cotação spot de uma moeda, como no caso do fluxo em reais indexado à variação do dólar.

Para conseguir incorporar no modelo nos ativos com fluxo de caixa e opções no modelo, precisamos decompor a valorização do instrumento nos diferentes fluxos de caixa estudados e além disso, determinar como o valor presente de cada fluxo de caixa varia em relação a uma variação na taxa de juros. Para isso precisamos recorrer a chamada expansão Delta-Gamma, que nada mais é do que a aplicação de uma expansão de Taylor na função de cálculo do valor presente do ativo.

A expansão de Taylor consiste na construção de uma série de Taylor de uma função, dado um ponto do domínio.

Na forma genérica para uma função real multidimensional $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a série de Taylor num ponto (a_1, a_2, \dots, a_n) é dada por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j!} \left[\sum_{k=1}^n (x'_k - a_k) \frac{\partial}{\partial x'_k} \right]^j f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \right\}_{x'_1=a_1, \dots, x'_n=a_n}$$

Para a função de cálculo do valor presente de um fluxo de caixa com valor futuro pré-fixado, considerando taxa com capitalização contínua, temos:

$$PV(r) = FV \cdot e^{-rT}$$

Aplicando a expansão de Taylor para uma dimensão, $n = 1$, no ponto r_0

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j!} \left[(x'_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x'_1} \right]^j f(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \right\}_{x'_1=x_1} \\ f(x_1) &= f(a_1) + (x_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} f(a_1) + \frac{(x_1 - a_1)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(a_1) + \dots \\ PV(r) &= PV(r_0) + (r - r_0) \frac{\partial}{\partial r} PV(r_0) + \frac{(r - r_0)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} PV(r_0) + \dots \\ PV(r) &= PV(r_0) + (r - r_0)(-T \cdot PV(r_0)) + \frac{(r - r_0)^2}{2} (T^2 \cdot PV(r_0)) + \dots \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável onde $r = r_0 + \Delta r$

$$\begin{aligned} PV(r_0 + \Delta r) &= PV(r_0) + \Delta r(-T \cdot PV(r_0)) + \frac{\Delta r^2}{2} (T^2 \cdot PV(r_0)) + \dots \\ PV(r_0 + \Delta r) - PV(r_0) &= -T \cdot \Delta r \cdot PV(r_0) + \frac{(T \cdot \Delta r)^2}{2} \cdot PV(r_0) + \dots \end{aligned}$$

Considerando $T = 1$ e r como sendo a taxa para o período do contrato

$$PV(r_0 + \Delta r) - PV(r_0) = -\Delta r \cdot PV(r_0) + \frac{\Delta r^2}{2} \cdot PV(r_0) + \dots$$

Essa última equação mostra que podemos mensurar a variação no valor do ativo dada uma variação na taxa de juros. Na expansão Delta-Gamma, o termo de primeira ordem é chamado de Delta e o termo de segunda ordem é chamado de Gamma.

No modelo do VaR do Riskmetrics para fluxos de caixa, os termos de segunda ordem e os de ordem superior são desprezados, ficando a variação do preço do ativo uma função linear da variação da taxa de juros. Assim, dado o desvio padrão da taxa de juros pode-se diretamente calcular o VaR do ativo.

$$VaR_{PV} = PV(r_0) \cdot 1.65\sigma_r$$

No caso de opções, o termo de segunda ordem, no caso da variação do ativo objeto, é considerado. Outros fatores de risco também podem ser considerados, como taxa de juros, volatilidade e tempo para o vencimento. Isso torna a expansão de Taylor mais elaborada, pois o número de variáveis n , aumenta consideravelmente.

Partindo da fórmula de Black-Scholes, considerando C o preço da opção de compra, a expansão de Taylor com termos até segunda ordem inicialmente fica

$$\begin{aligned} & C(S + \Delta S, r + \Delta r, q + \Delta q, T + \Delta T, \sigma + \Delta \sigma) \\ = & C(S, r, q, T, \sigma) + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S + \frac{\partial C}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial C}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial C}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial C}{\partial \sigma} \Delta \sigma + \\ & \frac{\partial^2 C}{\partial q \partial T} \Delta q \Delta T + \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma \partial T} \Delta \sigma \Delta T + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial r} \Delta S \Delta r + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial q} \Delta S \Delta q + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial T} \Delta S \Delta T + \\ & \frac{\partial^2 C}{\partial r \partial T} \Delta r \Delta T + \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma \partial r} \Delta \sigma \Delta r + \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma \partial q} \Delta \sigma \Delta q + \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma \partial S} \Delta \sigma \Delta S + \frac{\partial^2 C}{\partial r \partial q} \Delta r \Delta q + \\ & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \Delta r^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial q^2} \Delta q^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial T^2} \Delta T^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2} \Delta \sigma^2 \end{aligned}$$

Dessa expansão são obtidas as "gregas", que medem a sensibilidade do preço da opção em relação ao movimento dos fatores de risco. Muitos dos termos dessa expressão são desprezados. Os mais comuns são:

$$\begin{aligned}
 \text{Delta}(\Delta) &= \frac{\partial C}{\partial S} \\
 \text{Gamma}(\Gamma) &= \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \\
 \text{Vega} &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} \\
 \text{RhoBRL} &= \frac{\partial C}{\partial r} \\
 \text{RhoUSD} &= \frac{\partial C}{\partial q} \\
 \text{Theta}(\Theta) &= \frac{\partial C}{\partial T} \\
 \text{Volga} &= \frac{\partial C}{\partial \sigma \partial S} \\
 \text{Vanna} &= \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}
 \end{aligned}$$

Nesse trabalho vamos considerar apenas os 6 primeiros, que a partir da fórmula de Black-Scholes são derivados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 C &= e^{-qT} S N(d1) - e^{-rT} X N(d2) \\
 d1 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + rT - qT + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma \sqrt{T}} \\
 d2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + rT - qT - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma \sqrt{T}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Delta(\Delta) &= \frac{\partial C}{\partial S} = e^{-qT} N(d1) + \frac{e^{-qT} N'(d1)}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{e^{-rT} X N'(d2)}{S\sigma\sqrt{T}} \\
Gamma(\Gamma) &= \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{e^{-qT} N'(d1)}{S\sigma\sqrt{T}} + \frac{e^{-qT} N''(d1)}{S^2\sigma^2 T} - \frac{e^{-rT} X N'(d2)}{S^2\sigma\sqrt{T}} - \frac{e^{-rT} X N''(d2)}{S^2\sigma^2 T} \\
Vega &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = e^{-qT} S N'(d1) \left(\sqrt{T} - \frac{d1}{\sigma} \right) - e^{-rT} X N'(d2) \left(-\sqrt{T} - \frac{d2}{\sigma} \right) \\
RhoBRL &= \frac{\partial C}{\partial r} = e^{-qT} S N'(d1) \frac{\sqrt{T}}{\sigma} + T e^{-rT} X N(d2) - e^{-rT} X N'(d2) \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \\
RhoUSD &= \frac{\partial C}{\partial q} = -T e^{-qT} S N(d1) - e^{-qT} S N'(d1) \frac{\sqrt{T}}{\sigma} + e^{-rT} X N'(d2) \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \\
-Theta(\Theta) &= \frac{\partial C}{\partial T} = -S q e^{-qT} N(d1) + S e^{-qT} N'(d1) \left(\frac{r - q + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{d1}{2T} \right) + \\
&\quad X r e^{-rT} N(d2) - X e^{-rT} N'(d2) \left(\frac{r - q - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{d2}{2T} \right)
\end{aligned}$$

$N'(x)$ é a densidade de probabilidade da distribuição normal

$$\begin{aligned}
N'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\
N''(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) \\
N'''(x) &= -x N'(x)
\end{aligned}$$

No cálculo das gregas por Jonh Hull (2000), algumas aproximações são feitas, chegando-se nos seguintes resultados

$$\begin{aligned}
Delta(\Delta) &= \frac{\partial C}{\partial S} = e^{-qT} N(d1) \\
Gamma(\Gamma) &= \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{e^{-qT} N'(d1)}{S\sigma\sqrt{T}} \\
Vega &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = e^{-qT} SN'(d1)\sqrt{T} \\
RhoBRL &= \frac{\partial C}{\partial r} = Te^{-rT} XN(d2) \\
RhoUSD &= \frac{\partial C}{\partial q} = -Te^{-qT} SN(d1) \\
-Theta(\Theta) &= \frac{\partial C}{\partial T} = -Sqe^{-qT} N(d1) + Xre^{-rT} N(d2) + Se^{-qT} N'(d1) \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{T}} \right)
\end{aligned}$$

Para o cálculo do VaR, o Riskmetrics utiliza apenas a expansão Delta-Gamma em relação ao retorno do ativo objeto, que no caso das opções de dólar seria a própria cotação pronta do dólar (S) e em relação ao tempo (Theta), onde ΔT seria o horizonte de tempo considerado no cálculo do VaR

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \Delta S^2 + \frac{\partial C}{\partial T} \Delta T$$

A partir dessa expressão, pode-se determinar os quatro primeiros momentos da distribuição de probabilidade de ΔC em relação ao desvio padrão de S

$$\begin{aligned}
Média &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_S^2 + \frac{\partial C}{\partial T} \Delta T \\
Variância &= \left(\frac{\partial C}{\partial S} \right)^2 \sigma_S^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right)^2 \sigma_S^4 \\
Skewness &= 3 \left(\frac{\partial C}{\partial S} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \sigma_S^4 + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right)^3 \sigma_S^6 \\
Kurtosis &= 12 \left(\frac{\partial C}{\partial S} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right)^2 \sigma_S^6 + 3 \left(\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right)^4 \sigma_S^8 + 3\sigma_S^4
\end{aligned}$$

A partir desses momentos pode-se encontrar uma distribuição de Johnson com os mesmos momentos e calcular qual a máxima perda para um intervalo de confiança de 95%, obtendo o VaR.

Uma outra forma para calcular o VaR, mencionada por John Hull, consiste na utilização da expansão de Cornish-Fisher para obter a distribuição de probabilidades de ΔC . Esse método permite a utilização de todos os termos da expansão, dado que se tenha os desvios padrões σ_i e as covariâncias σ_{ij} de cada um dos n fatores de risco. A expansão de Taylor fica

$$\Delta C = \sum_{i=1}^n S_i \delta_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} S_i S_j \gamma_{ij} \Delta x_i \Delta x_j$$

onde S_i é o valor atual do fator de risco i , isto é, pode ser S , r , q , T ou σ

δ_i é a primeira derivada de C em relação ao fator de risco i , isto é, pode ser $\frac{\partial C}{\partial S}$, $\frac{\partial C}{\partial r}$,

$\frac{\partial C}{\partial q}$, $\frac{\partial C}{\partial T}$ ou $\frac{\partial C}{\partial \sigma}$

γ_{ij} é uma das derivadas cruzadas do fator i com o fator j , isto é, pode ser $\frac{\partial C}{\partial q \partial T}$, $\frac{\partial C}{\partial \sigma \partial T}$,

$\frac{\partial C}{\partial S \partial r}$, $\frac{\partial C}{\partial S \partial q}$, $\frac{\partial C}{\partial S \partial T}$, $\frac{\partial C}{\partial r \partial T}$, $\frac{\partial C}{\partial \sigma \partial r}$, $\frac{\partial C}{\partial \sigma \partial q}$, $\frac{\partial C}{\partial \sigma \partial S}$, $\frac{\partial C}{\partial r \partial q}$, $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$, $\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 C}{\partial q^2}$, $\frac{\partial^2 C}{\partial T^2}$ ou $\frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^2}$

Δx_i é a variação relativa do fator de risco S_i , isto é, $\Delta x_i = \frac{\Delta S_i}{S_i}$

Podemos fazer mais uma substituição de variáveis onde $\alpha_i = S_i \delta_i$ e $\beta_{ij} = \frac{1}{2} S_i S_j \gamma_{ij}$

$$\Delta C = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \Delta x_i \Delta x_j$$

e calcular os primeiros três momentos da distribuição de ΔC

$$\begin{aligned}
E(\Delta C) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \sigma_{ij} \\
E[(\Delta C)^2] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_{ij} \beta_{kl} (\sigma_{ij} \sigma_{kl} + \sigma_{ik} \sigma_{jl} + \sigma_{il} \sigma_{jk}) \\
E[(\Delta C)^3] &= 3 \sum_{i,j,k,l=1}^n \alpha_i \alpha_j \beta_{kl} (\sigma_{ij} \sigma_{kl} + \sigma_{ik} \sigma_{jl} + \sigma_{il} \sigma_{jk}) + \\
&\quad \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6=1}^n \beta_{i_1 i_2} \beta_{i_3 i_4} \beta_{i_5 i_6} (\sigma_{i_1 i_2} \sigma_{i_3 i_4} \sigma_{i_5 i_6} + \sigma_{i_1 i_2} \sigma_{i_3 i_6} \sigma_{i_4 i_5} + \dots + \sigma_{i_1 i_2} \sigma_{i_3 i_5} \sigma_{i_4 i_6}) \\
\text{Média} &: \mu_C = E(\Delta C) \\
\text{Variância} &: \sigma_C^2 = E[(\Delta C)^2] - [E(\Delta C)]^2 \\
\text{Skewness} &: \xi_C = \frac{1}{\sigma_C^3} E[(\Delta C - \mu_C)^3] = \frac{E[(\Delta C)^3] - 3E[(\Delta C)^2] \mu_C + 2\mu_C^3}{\sigma_C^3}
\end{aligned}$$

Usando os três momentos de ΔC , podemos obter o percentil q da distribuição de ΔC através da expansão de Cornish-Fisher por

$$\mu_C + \left(z_q + \frac{1}{6} (z_q^2 - 1) \xi_C \right) \sigma_C$$

onde z_q é o percentil q da distribuição normal de média zero e variância 1.

Portanto, o VaR para uma opção de compra para 95% de confiança ficaria:

$$VaR = \mu_C + \left(-1.65 + \frac{1}{6} (1.65^2 - 1) \xi_C \right) \sigma_C$$

1.2.6 Vértices de risco

Como vimos no primeiro capítulo, alguns ativos financeiros podem ser decompostos em tipos básicos de fluxo de caixa. O valor a mercado dos fluxos de caixa dependem basicamente do valor da taxa de juros de hoje até o dia do vencimento. No mercado são realizadas operações nos mais diferentes prazos e se fossemos considerar todos os prazos possíveis, haveria uma sobrecarga no modelo.

Dessa forma foi criado o conceito de vértice ou fator de risco. Os vértices são definições de prazos fixos da estrutura a termo de taxa de juros. Exemplo: 1m, 3m, 6m, 12m, 2y, 3y, 4y onde m é 1 mês e y é um ano em dias corridos.

Essa definição de vértices é necessária para viabilizar o cálculo dos desvios padrões e das correlações entre os pontos, pois seria impossível o cálculo para cada vencimento existente.

Para implementar tornar a idéia dos vértices factível, surge a necessidade de tratar os fluxos de caixa que têm um vencimento diferente dos que foram definidos. A solução é distribuir o risco desse fluxo de caixa nos fatores de risco mais próximos. A seguir será mostrada a solução sugerida pelo Riskmetrics.

Dado que r_i e r_{i+1} são as taxas nos vértices mais próximos, obtem-se r_x que é a taxa no vencimento do fluxo de caixa, por interpolação

$$r_x = ar_i + (1 - a)r_{i+1}$$

onde a é o coeficiente linear de ponderação, calculado com base no número de dias corridos entre cada fluxo de caixa. Em seguida calcula-se o valor presente PV_x do fluxo de caixa e o desvio padrão σ_x do retorno desse preço, também por interpolação

$$\sigma_x = a\sigma_i + (1 - a)\sigma_{i+1}$$

Agora calculamos o coeficiente de alocação α de forma a manter-se o risco de mercado, isto é, de forma que a seguinte equação seja satisfeita

$$\begin{aligned} \text{variância}(r_x) &= \text{variância}[\alpha r_i + (1 - \alpha)r_{i+1}] \\ \sigma_x^2 &= \alpha^2\sigma_i^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\rho_{i,i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} + (1 - \alpha)^2\sigma_{i+1}^2 \end{aligned}$$

$$[\sigma_i^2 + \sigma_{i+1}^2 - 2\rho_{i,i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}] \cdot \alpha^2 + [2\rho_{i,i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} - 2\sigma_{i+1}^2] \cdot \alpha + [\sigma_{i+1}^2 - \sigma_x^2] = 0$$

e α sai da solução de uma equação de segundo grau, tal que $0 < \alpha < 1$.

Apesar da solução indicada pelo Riskmetrics, em muitos casos o coeficiente de alocação α é calculado pela simples ponderação do número de dias corridos ou úteis entre os fluxos de caixas.

Da mesma forma vista no modelo de APT, podemos considerar o cálculo do VaR através da análise dos componentes principais dos fatores de risco existentes numa carteira com ativos de taxa de juros. Isso é possível quando a curva de juros tem vértices com

alta correlação entre si, de tal forma que podemos explicar seus movimentos através de um número reduzido de fatores de risco..

A vantagem de aplicar esse método consiste na redução do número de fatores de risco e conseqüentemente menor carga de processamento do modelo. A dificuldade consiste na determinação dos fatores a serem utilizados.

1.2.7 Interpolação

Quando mostramos o cálculo do valor presente, utilizamos para o fator de desconto das taxas de juros, o resultado da expressão $e^{\int_t^T r(u)du}$. Essa expressão refere-se a uma modelagem instantânea da estrutura a termo da taxa de juros.

Nas análises envolvendo taxa de juros, serão utilizadas as taxas observadas no mercado de futuros da BM&F que apresentam maior liquidez e portanto menor margem para arbitragens. As taxas negociadas nesses contratos de futuros já são as taxas equivalentes para o período, sendo necessário apenas o cálculo do fator de desconto usando a fórmula de acordo com a convenção de expressão da taxa.

$$df_{pre} = (1 + r_{pre})^{\frac{DU}{252}}$$

$$df_{cpm} = (1 + r_{cpm} * DC/360)$$

O problema desse tipo de solução surge nos casos em que o prazo da operação não coincide exatamente com o prazo das taxas observadas. Surge nessa hora a necessidade de

definição de um critério de interpolação, que terá resultado significativos na avaliação do risco de um ativo.

Nesse trabalho serão utilizados dois métodos de interpolação. Ambos envolvem o cálculo de um fator diário que é capitalizado para o prazo desejado, mas um utiliza-se da capitalização linear e o outro da capitalização exponencial.

Interpolação linear

Dada uma taxa q_1 para um prazo em dias corridos DC_1 e uma taxa q_2 para um prazo em dias corridos DC_2 , queremos calcular a taxa q_x interpolada para o prazo DC_x tal que $DC_1 < DC_x < DC_2$

Para isso, basta aplicar a seguinte fórmula

$$q_x = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{DC_2 - DC_1} (DC_x - DC_1)$$

onde $\frac{q_2 - q_1}{DC_2 - DC_1}$ é o fator de capitalização diária do período e $DC_x - DC_1$ é o prazo de capitalização adicional.

Rearrajando, temos

$$q_x = q_1 \frac{DC_2 - DC_x}{DC_2 - DC_1} + q_2 \frac{DC_x - DC_1}{DC_2 - DC_1}$$

que é uma média ponderada pelas distâncias entre o prazo desejado e os prazos dados.

Interpolação exponencial

Dada uma taxa r_1 para um prazo em dias úteis DU_1 e uma taxa r_2 para um prazo em dias úteis DU_2 , queremos calcular a taxa r_x interpolada para o prazo DU_x tal que $DU_1 < DU_x < DU_2$

A diferença em relação ao método anterior é a necessidade de se calcular um fator de capitalização a partir das taxas dadas:

$$df_1 = (1 + r_1)^{\frac{DU_1}{252}}$$

$$df_2 = (1 + r_2)^{\frac{DU_2}{252}}$$

Agora, aplicamos o mesmo conceito visto, utilizando a capitalização exponencial

$$df_x = df_1 \cdot \left(\frac{df_2}{df_1} \right)^{\frac{DU_x - DU_1}{DU_2 - DU_1}}$$

onde $\left(\frac{df_2}{df_1} \right)^{\frac{1}{DU_2 - DU_1}}$ é o fator de capitalização diária do período e $DU_x - DU_1$ é o prazo de capitalização adicional.

Rearrajando, temos

$$df_x = df_1^{\frac{DU_2 - DU_x}{DU_2 - DU_1}} \cdot df_2^{\frac{DU_x - DU_1}{DU_2 - DU_1}}$$

E assim, voltamos a expressão inicial da taxa

$$r_x = df_x^{\frac{252}{DU_x}} - 1$$

Interpolação linear modificada

Dada uma taxa q_1 para um prazo em dias corridos DC_1 e uma taxa q_2 para um prazo em dias corridos DC_2 , queremos calcular a taxa q_x interpolada para o prazo DC_x tal que $DC_1 < DC_x < DC_2$

Nesse método também serão calculados os fatores de descontos

$$df_1 = \left(1 + q_1 \frac{DC_1}{360}\right)$$

$$df_2 = \left(1 + q_2 \frac{DC_2}{360}\right)$$

A interpolação dos fatores de desconto será feita linearmente

$$df_x = df_1 + \frac{df_2 - df_1}{DC_2 - DC_1} (DC_x - DC_1)$$

onde $\frac{df_2 - df_1}{DC_2 - DC_1}$ é o fator de capitalização diária do período e $DC_x - DC_1$ é o prazo de capitalização adicional.

Rearrajando, temos

$$df_x = df_1 \frac{DC_2 - DC_x}{DC_2 - DC_1} + df_2 \frac{DC_x - DC_1}{DC_2 - DC_1}$$

que é uma média ponderada pelas distâncias entre o prazo desejado e os prazos dados.

Voltando a expressão normal da taxa

$$q_x = (df_x - 1) \frac{360}{DC_x}$$

1.2.8 Análise de risco por simulação de Monte Carlo

A idéia principal por trás do conceito de mensuração de risco por simulação é bastante simples e consiste apenas em construir uma série de cenários fictícios para movimentos das taxas e preços de mercado, avaliando qual o comportamento do valor da carteira dentro desses parâmetros.

Uma das formas mais utilizadas é a simulação de Monte Carlo, que consiste na geração de cenários aleatórios para a avaliação do risco de mercado da carteira.

Normalmente é admitido que os fatores de risco seguem a um processo estocástico como, por exemplo, o movimento browniano geométrico, usado na derivação da fórmula de Black-Scholes

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z$$

Δz é uma variável aleatória com distribuição normal de média zero e variância Δt

Considerando ε uma variável aleatória tal que $\varepsilon \sim N(0, 1)$ podemos reescrever o processo acima

$$\begin{aligned} \Delta S &= \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t} \\ \frac{\Delta S}{S} &= \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

Assim, podemos simular o comportamento do fator S gerando valores aleatórios para a variável ε . Uma das formas utilizadas para gerar números aleatórios dada uma distribuição de probabilidade conhecida, que nesse caso é a normal, consiste na aplicação

da função inversa da densidade de probabilidade acumulada numa variável gerada aleatoriamente com distribuição uniforme entre zero e um.

Usando o Excel, poderíamos gerar amostras aleatórias de ε da seguinte forma

$$\varepsilon = \text{NORMINV}(\text{RAND}(), 0, 1)$$

Dessa forma pode-se simular o comportamento de S depois de um dia, ou num prazo Δt , considerando que os valores de ε são independentes através do tempo.

Para o caso de simulação de variações na taxa de juros, o processo estocástico adotado normalmente é o seguinte

$$\Delta r_t = k(\theta(t) - ar_t)\Delta t + \sigma r_t^\gamma \Delta z$$

onde $0 \leq k < 1$. A característica principal desse modelo, observada no comportamento das taxas de juros, é que o processo estocástico é estacionário e reverte à uma média. Se o comportamento de Δz é determinado por apenas uma variável aleatória, o modelo é chamado de modelo de um fator e a trajetória da taxa pode ser simulada fazendo-se $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$

No caso do cálculo do VaR para uma carteira, também é necessário considerar que os fatores de risco são correlacionados entre si. Isso implica que os cenários aleatórios gerados para cada fator de risco devem obedecer às correlações existentes entre os fatores. Para gerar N variáveis aleatórias que tenham correlações dadas pela matriz R , utilizamos a fatoração de Cholesky:

$$R = TT'$$

onde T é o fator de Cholesky representado por uma matriz triangular.

Depois de gerar um vetor η com N variáveis aleatórias independentes, aplicamos a transformação

$$\varepsilon = T\eta$$

para obter o vetor ε com as variáveis correlacionadas.

A fatoração de Cholesky é conseguida da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \cdots & l_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{N1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{NN} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = l_{11}^2 \rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{21} = l_{21}l_{11} \rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}, \dots, l_{n1} = \frac{a_{n1}}{l_{11}}$$

$$a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 \rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

$$a_{32} = l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} \rightarrow l_{32} = \frac{(a_{32} - l_{31}l_{21})}{l_{22}}, \dots$$

Na forma genérica, com $i = 1, \dots, n$ e $j = i + 1, \dots, n$

$$l_{ii} = \sqrt{\left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)}$$

$$l_{ji} = \frac{\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik} \right)}{l_{ii}}$$

Após realizar a simulação for um número grande de cenários C , o VaR para 95% de confiança é obtido ordenando os resultados do maior para o menor e pegando o pior resultado a 95%, ou seja, o resultado na posição $95\% \cdot C$

1.2.9 Análise de risco por simulação de Stress

Uma outra forma de se obter o risco de uma carteira por simulação é o chamado Teste de "Stress". O teste de estresse consiste no estudo do comportamento histórico dos preços e taxas de mercado analisando principalmente as crises, onde observam-se as maiores volatilidades do mercado. Admitindo que os mesmos movimentos ocorressem hoje, pode-se obter cenários em situações de estresse e, dessa forma, simular qual seria o impacto no valor da carteira.

1.2.10 Modelos utilizados na prática

Normalmente, os modelos utilizados na prática consistem numa combinação dos modelos apresentados acima. Cada um tem uma característica importante que deve ser considerada pelos gestores de risco de mercado. O VaR, por exemplo, é utilizado para avaliar o risco

de carteira durante dias comuns, sem muitos movimentos bruscos no mercado. Porém, em situações de crise, o modelo normalmente falha e o resultado acaba passando o nível de tolerância estimado, como pode-se verificar em testes retroativos ("Back Testing"). Por isso o Teste de Estresse normalmente é utilizado em conjunto com o VaR, para tentar prever perdas em situações de crise.

No dia a dia dos operadores de mercado, porém, o modelo mais utilizado é o da análise de sensibilidade. Os operadores monitoram constantemente os valores de seus "Deltas" em relação aos fatores de risco. Todas as operações de proteção ("hedge") são realizadas com base no impacto que causam nos "Deltas".

Chapter 2

Algoritmo Genético

2.1 Problemas de otimização

Problemas de otimização são encontrados nas mais variadas formas e nos mais variados campos comerciais, pois consistem basicamente em procurar a melhor alocação de recursos restritos, de forma a ter o melhor aproveitamento possível. São muitos os casos com aplicação de algoritmos de otimização e muitas vezes ouve-se falar que o estudo da otimização é uma arte, devido à dificuldade em modelar um algoritmo matemático a partir de um problema real.

Um problema de otimização normalmente é composto pelos seguintes itens:

- 1) função objetivo: é função que buscamos maximizar ou minimizar
- 2) variáveis: são as entradas da função objetiva e são seus valores que devem ser encontrados para fornecer a solução do problema.
- 3) restrições: são expressões matemáticas envolvendo as variáveis do problema que indicam quais os limites impostos para os valores das variáveis na busca das possíveis soluções

Os algoritmos de otimização desenvolveram-se numa vasta quantidade de estudos dentro da programação matemática, dependendo de como se apresentam os itens acima

dentro do problema analisado. A seguir serão mostrados alguns dos métodos básicos de otimização dentro das diferentes classificações dos problemas.

2.1.1 Otimização com Programação Linear

A programação linear consiste no estudo de problemas de otimização onde a função objetiva é uma função linear das variáveis e as restrições são inequações lineares.

minimizar ou maximizar

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeito a

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & \leq & b_n \end{array}$$

Para resolver um caso particular de programação linear, onde o problema é formado apenas por restrições de igualdade e as variáveis não podem assumir valores negativos, foi desenvolvido o algoritmo Simplex por George Dantzig. O problema então, fica escrito da seguinte forma:

minimizar ou maximizar

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

\vdots

$$x_n \geq 0$$

$$b_1 \geq 0$$

$$b_2 \geq 0$$

\vdots

$$b_m \geq 0$$

ou, na forma matricial

minimizar ou maximizar

$$f = c_{1 \times n}^T \cdot x_{n \times 1}$$

sujeito a

$$A_{m \times n} \cdot x_{n \times 1} = b_{n \times 1}$$

$$x \geq 0$$

$$b \geq 0$$

n : número de variáveis

m : número de restrições

A idéia do algoritmo Simplex consiste em considerar o espaço de soluções possíveis dentro do conjunto R^n como um poliedro definido pelas m restrições, e buscar a solução para o problema dentro de um dos vértices desse poliedro. Esse é o algoritmo mais utilizado na prática, devido aos inúmeros problemas que podem ser modelados com programação linear. Inclusive, para problemas com variáveis negativas, ou restrições representadas por inequações, pode-se adaptar o problema e transformá-lo num problema linear padrão para resolvê-lo através do algoritmos Simplex.

Para problemas com variáveis irrestritas, pode-se substituí-las pela diferença de duas variáveis positivas. O problema abaixo por exemplo:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{sujeito a } x_1 + x_2 &= 100 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\in R \end{aligned}$$

substituindo a variável irrestrita x_2 pelas variáveis positivas x_3 e x_4 , fica da seguinte forma :

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f &= c_1x_1 + c_2x_3 - c_2x_4 \\ \text{sujeito a } x_1 + x_3 - x_4 &= 100 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Para o problema com restrições representadas por inequações, deve-se acrescentar uma variável de folga, como pode-se ver no exemplo abaixo:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{sujeito a } x_1 + x_2 &\geq 100 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

acrescentando a variável de folga x_3 fica

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f &= c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{sujeito a } x_1 + x_2 - x_3 &= 100 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Otimização Combinatória

Os problemas de otimização combinatória são aqueles com um conjunto finito de soluções. Os chamados problemas de rede são uma aplicação prática muito comum. Esses problemas buscam por exemplo a máxima vazão entre dois nós, a mínima distância entre dois pontos ou o tempo mínimo para chegar de um ponto a outro. Grande parte desses problemas podem ser modelados como problemas de programação linear e resolvidos com o algoritmo Simplex.

Mas existem algoritmos mais eficientes para certos modelos. Uma classe de algoritmos bastante utilizada é a dos algoritmos recursivos, que buscam pela melhor solução através de um teste de todas as soluções possíveis. Para evitar um teste de um número muito grande de combinações, normalmente são aplicados alguns tipos de heurística para evitar a perda de tempo testando soluções inviáveis.

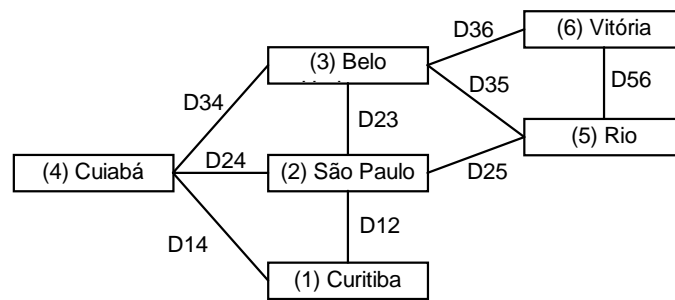


Fig. 2.1.

Um dos algoritmos utilizados na solução do problema do caminho mais curto é o algoritmo de Dijkstra. Dados os pontos origem e destino, esse algoritmo parte da origem e vai descobrindo qual a distância mínima entre origem e cada um dos nós da rede, até chegar no destino.

Otimização com Programação Inteira

Os problemas de programação inteira são aqueles nos quais uma ou mais variáveis podem assumir apenas valores inteiros. Dentro da programação linear, uma das técnicas adotadas é a solução do problema pelo algoritmo Simplex e após encontrada a solução, arredondar o valor das variáveis que só podem receber valores inteiros. Quando o valor dessa variável na solução é grande o suficiente, o arredondamento não trás prejuízos significativos na função objetiva. Entretanto, quando o arredondamento produz uma variação percentual significativa no valor da variável, o resultado pode ficar comprometido e a utilização de outros algoritmos pode ser necessária.

Um dos algoritmos utilizados é o algoritmo da decomposição ("Branch and Bound"). O funcionamento desse algoritmo consiste numa forma de, após obter a solução do problema com variáveis reais, realizar um teste com todas as combinações das variáveis inteiras de forma a obter a solução ótima. O funcionamento consiste em:

- 1) Achar a solução f_0 do problema sem restrição de variáveis inteiras.
- 2) Encontrada a solução, analisar dentre as variáveis inteiras, quais têm valor decimal.

Escolher a primeira delas x_i , com o valor decimal α_i

3) Adicionar duas novas restrições ao problema original $x_i \geq \gamma_i$ ou $x_i \leq \beta_i$ criando dois novos problemas, onde γ_i é o valor do menor inteiro maior que α_i (α_i arredondado para cima) e β_i é o valor do maior inteiro menor que α_i (α_i arredondado para baixo). Resolver cada um dos problemas.

4) Voltar ao passo 2 recursivamente, até que seja encontrada uma solução com as variáveis com restrição inteira assumindo valores inteiros.

Otimização com Programação Estocástica

Os problemas de otimização estocástica surgiram como uma evolução dos modelos de programação linear, na medida em que adicionam incertezas nos coeficientes da função objetiva e nas equações de restrições, através de variáveis estocásticas. O modelo normalmente utilizado para representar o problema é o seguinte

minimizar

$$c^T x + E_{\xi} Q(x, \xi)$$

sujeito a

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

onde $Q(x, \xi) = \min \{q^T y \mid Wy + Tx = h, y \geq 0\}$

Nesse modelo, chamado de modelo de dois estágios com recursão, c^T consiste num vetor de coeficientes determinísticos e ξ é um vetor com variáveis aleatórias formado pelos componentes de q^T , h e T .

E_ξ é o valor esperado das minimizações do segundo estágio Q dentro das diferentes realizações do vetor ξ .

Uma das formas de resolver esse tipo de problema consiste na geração de diferentes cenários para as realizações do vetor ξ e resolver o problema do segundo estágio recursivamente, obtendo o valor esperado das diferentes minimizações.

Outra forma de buscar uma solução consiste na adoção de modelos de distribuição de probabilidades para as variáveis aleatórias, considerando que as variáveis do vetor ξ têm distribuições independentes. Dessa forma, consegue-se decompor o problema do segundo estágio em uma equação não linear para cada variável aleatória, exigindo a aplicação de conceitos de programação não linear.

Esse modelo também pode ser estendido para tratar problemas multi-períodos, onde as decisões podem ser tomadas de diferentes formas de acordo com a evolução do tempo. Para isso utiliza-se o modelo de programação estocástica multi-estágios com recursão.

Os algoritmos L-Shaped com e sem decomposição por aninhamento utilizados para resolver esses problemas de otimização linear estocástica são descritos com detalhes por Birge(1997).

Otimização com Programação Não Linear

Os problemas de otimização de funções não lineares são subdivididos em vários casos, dependendo do tipo de função e das restrições do problema. Uma das grandes dificuldades dessa classe de problemas é identificar o mínimo ou máximo de uma função quando ela não é estritamente convexa, contendo mínimos ou máximos locais.

Dentro dos modelos baseados em cálculo, para problemas sem restrições com funções convexas e contínuas, o máximo ou mínimo de uma função é encontrado através do vetor de derivadas parciais da função, chamado gradiente ∇ , e da matriz de Hessian H , formada pelas derivadas de segunda ordem:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Os pontos de mínimo ou de máximo são encontrados achando-se x^* tal que $\nabla f(x^*) = 0$

Para verificar se o ponto é de mínimo, verifica-se se a matriz H , no ponto x^* é positiva definida, isto é, para qualquer $d \in R^n$, $d^T H(x^*)d > 0$. Analogamente, se o ponto for de máximo a matriz H no ponto x^* será negativa definida, isto é, para qualquer $d \in R^n$, $d^T H(x^*)d < 0$

No caso da matriz H ser simétrica, o teste para saber se a matriz é positiva definida pode ser feito pelo determinante dos menores principais H_n , que devem ser todos maiores do que zero.

$$\begin{aligned}
 H_1(x) &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) \right] \\
 H_2(x) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) \end{bmatrix} \\
 &\vdots \\
 H_n(x) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para matrizes H simétricas negativas definidas, o determinante de H_1 deve ser menor que zero, o determinante de H_2 maior que zero e assim alternadamente até H_n .

Quando a equação $\nabla f(x^*) = 0$ gera sistemas de equações de difícil solução analítica, são utilizados os algoritmos iterativos para encontrar a solução do problema. O algoritmo mais utilizado é o "Steepest Descent", que utiliza uma busca seguindo a direção mais íngreme apontada pelo vetor gradiente.

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

O escalar α_k é o tamanho do passo dado na iteração e é determinado minimizando-se

$$f(x_k - \alpha \nabla f(x_k)), \text{ isto é, fazendo-se } \frac{\partial f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))}{\partial \alpha} = 0$$

Um algoritmo muito utilizado, derivado do "Steepest Descent" é o algoritmo de Newton. Para obtê-lo, basta aproximar a função objetivo $f(x)$ por uma série de Taylor no ponto x_k , transformá-la numa função quadrática e minimizar $f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$.

$$f(x) \simeq f(x_k) + \nabla f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T H(x_k)(x - x_k)$$

$$f'(x) \simeq \nabla f(x_k) + \frac{1}{2}H(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T H(x_k)$$

$$f'(x) \simeq \nabla f(x_k) + H(x_k)(x - x_k)$$

$$f'(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) = 0$$

$$\nabla f(x_k) + H(x_k)(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) - x_k) = 0$$

$$\alpha_k = \frac{1}{H(x_k)}$$

Assim obtemos a fórmula para o algoritmo de Newton, onde H é a matriz de Hessian

$$x_{k+1} = x_k - [H(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$$

Devido ao custo computacional de se calcular a inversa da matriz de Hessian a cada passo do algoritmo, existem métodos quase-Newton que fazem uma aproximação desse cálculo.

Adicionando-se restrições de igualdade ao problema, obtemos a seguinte formulação, onde $g(x) = b$ é um conjunto de restrições na forma $g_1(x) = b_1, g_2(x) = b_2, \dots, g_m(x) = b_m$

$$\text{minimizar ou maximizar} \quad : \quad f(x)$$

$$\text{sujeito a} \quad g(x) = b$$

Nesse caso o problema de otimização é resolvido com a utilização do Lagrangeano $L(x, \lambda)$, onde os λ_i são os chamados multiplicadores de Lagrange.

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$$

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - g_i(x))$$

Para achar o ponto de otimização do problema, basta encontrar x^* e λ , tal que $\nabla L(x^*, \lambda) = 0$

Encontrado o ponto extremo satisfazendo a condição de otimalidade de primeira ordem, basta verificar a condição de segunda ordem. Se a matriz $F(x^*) + \lambda^T G(x^*)$ for positiva definida, o ponto é de mínimo. Se for negativa definida, o ponto é de máximo. $F(x^*)$ é a matriz de Hessian de $f(x)$ e $\lambda^T G(x)$ é a matriz de Hessian de $g(x)$.

Adicionando restrições de inequações ao problema, obtemos

$$\begin{aligned} \text{minimizar ou maximizar} & : f(x) \\ \text{sujeito a} & \quad g(x) = b \\ & \quad h(x) \leq d \end{aligned}$$

Para solução desse problema, a condição de otimalidade de primeira ordem fica

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla g(x^*) + \mu^T \nabla h(x^*) &= 0 \\ \mu^T (h(x^*) - d) &= 0 \\ \mu &\geq 0\end{aligned}$$

A segunda condição de otimalidade é chamada de condição de Kuhn-Tucker.

Otimização com algoritmos de busca aleatória

Os algoritmos mencionados até agora, são todos baseados em cálculo, com exceção do algoritmo de Dijkstra, que é um algoritmo enumerativo. Os algoritmos baseados em cálculo são extremamente precisos e eficientes na utilização em funções contínuas e unimodais. Entretanto, existe uma grande quantidade de problemas cujas funções de otimização são descontínuas e multimodais, isto é, podem existir inúmeros pontos de máximo ou mínimos locais e os algoritmos baseados no gradiente local perdem a eficiência. Os algoritmos enumerativos são ótimos para problemas com domínio pequenos e finitos, pois também garantem a solução ótima encontrada, mas perdem a eficiência em problemas com muitas variáveis.

Foi na tentativa de se resolver problemas não lineares multimodais que surgiram os algoritmos de busca aleatória. Apesar de não serem algoritmos baseados em cálculo de derivadas locais, não significa que a busca não tenha um componente direcional. Entre os algoritmos de busca aleatória mais conhecidos estão "Tabu Search", "Simulated Annealing" e o algoritmo genético, que será o objeto de estudo do próximo capítulo.

2.2 Algoritmo Genético

O algoritmo genético faz parte de uma classe de algoritmos de busca ou otimização, chamada de algoritmos evolucionários ou adaptativos. A idéia básica é imitar o funcionamento genético dos organismos biológicos na solução de problemas computacionais, através do mecanismo de seleção natural, onde sobrevivem os indivíduos mais aptos, combinado com mecanismos de reprodução por troca de informações genéticas. O algoritmo genético na computação foi desenvolvido por J. H. Holland, em 1975.

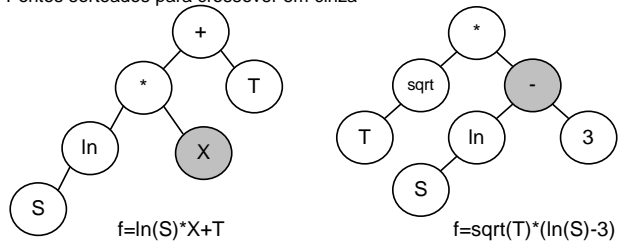
Algoritmos genéticos são algoritmos robustos e aplicáveis nas mais variadas formas de problemas. Desde problemas combinatórios comuns até problemas de design de aviões. Uma das aplicações mais interessantes que já observei foi na descoberta de funções matemáticas analíticas para efetuar algum tipo de cálculo, partindo de funções e operadores matemáticos elementares. A título de demonstração anexo o diagrama abaixo, mostrando a reprodução de indivíduos num problema para descobrir uma função de cálculo de opções, encontrado no artigo de Chidambaram (1998)

2.2.1 A população

O algoritmo tem início com uma população aleatória de indivíduos, cada um representando uma solução do problema. O tamanho dessa população é um fator muito importante na calibração do algoritmo. Dada a natureza aleatória da busca, quanto mais indivíduos formarem a população inicial, maior a probabilidade de geração de um indivíduo próximo

1) Pais

Pontos sorteados para crossover em cinza



2) Filhos

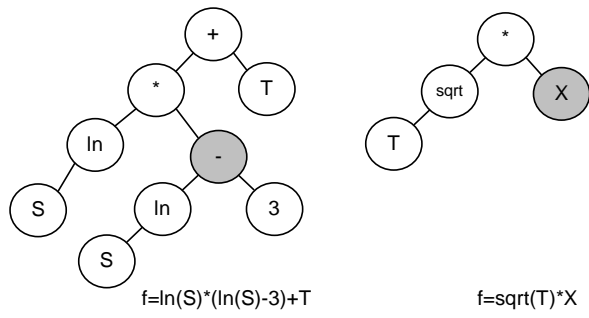


Fig. 2.2.

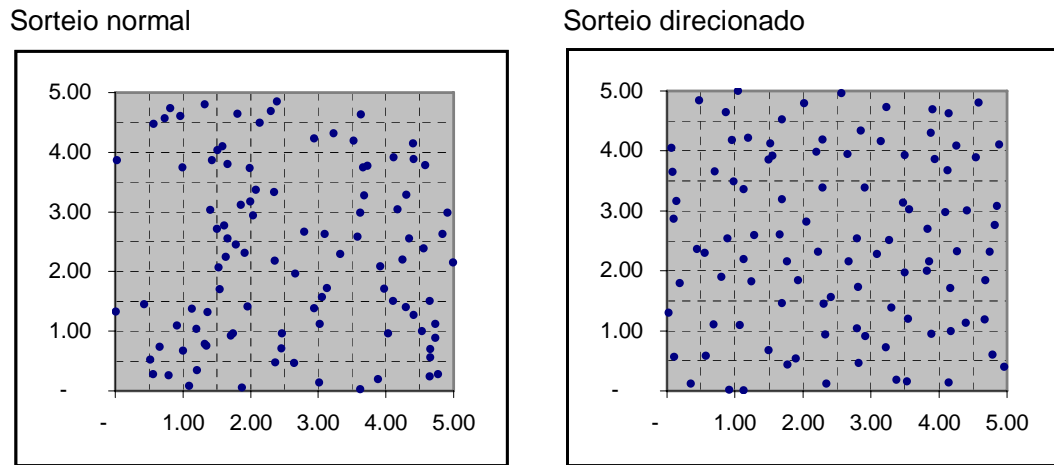


Fig. 2.3.

a solução do problema. Mas populações muito grandes também tem um ponto contra, pois exigem muito processamento e memória.

Como todo algoritmo de otimização, existem algumas técnicas que podem ser utilizadas para melhorar a convergência do problema. No caso do algoritmo genético, a diversificação da população é um fator que tem grande influência no início do processo de convergência. Uma das formas sugeridas em Chelouah (2000) é a geração de número quase aleatórios, forçando a criação de indivíduos bem distribuídos pelo espaço de soluções.

Também é sugerido que o tamanho da população seja reduzido gradativamente com a evolução da população, pois a diversidade diminui naturalmente com o mecanismo de seleção natural e torna-se desnecessária uma população muito grande, diminuindo a utilização de processamento e aumentando a velocidade de convergência.

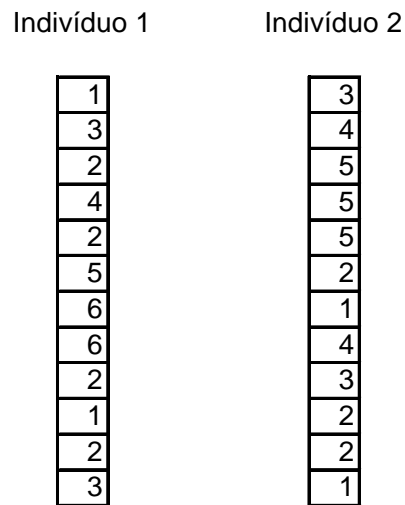


Fig. 2.4.

2.2.2 O cromossomo

O primeiro passo para a implementação do algoritmo é definir como representar a solução do problema em um indivíduo. Para isso devemos partir da análise da função objetivo do problema e de suas variáveis e assim construir uma sequência de valores representando a solução. Pode ser uma sequência de números, símbolos, letras, na simples estrutura de uma lista como também na estrutura de uma árvore, como visto no exemplo anterior. Essa sequência de valores será o cromossomo de cada indivíduo da população. Como a natureza da representação do cromossomo em um computador é combinatória, no caso de variáveis numéricas inteiras ou reais, a representação deve ser feita como uma sequência de bits. Isso leva automaticamente a uma limitação no valor das variáveis de acordo com a capacidade numérica da máquina utilizada.

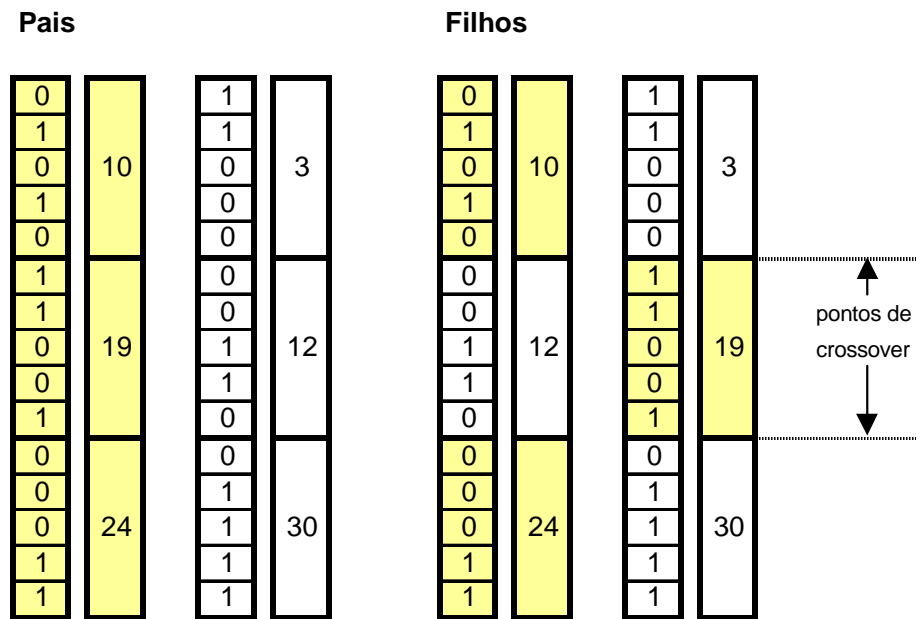


Fig. 2.5.

Um dos grandes desafios da modelagem do cromossomo é tentar evitar que os mecanismos de reprodução quebrem importantes sequências das soluções já existentes, e perdendo portanto, informação genética importante. O exemplo abaixo mostra a representação binária de uma solução com três variáveis inteiras. Se a troca genética ocorresse num ponto no meio da representação de uma variável, o valor dessa variável nos filhos teria pouco significado hereditário, pois seriam gerados números completamente diferentes dos iniciais.

2.2.3 A função adaptação ("fitness")

A função adaptação é aquela que avalia um indivíduo fornecendo uma pontuação ("score") que indica o quanto a solução do problema é boa. No caso de problemas de otimização, a função adaptação é representada pelo próprio valor retornado pela função objetivo.

O valor da pontuação recebida por cada indivíduo terá importância fundamental no mecanismo de seleção natural, que escolherá apenas os indivíduos mais aptos na sobrevivência e na reprodução.

A condição de otimalidade do algoritmo genético é dada por um número de gerações nos quais a população evolui sem apresentar melhora de adaptação. Apesar da robustez do algoritmo, que não faz nenhuma suposição sobre as dericadas da função objetivo, esse também é um ponto fraco do algoritmo genético, pois não há como garantir matematicamente que a solução encontrada é um ponto ótimo global.

Na codificação do algoritmo, normalmente são utilizadas algumas técnicas para melhorar a taxa de convergência, como por exemplo, impedir a criação de soluções iguais dentro da população. Outra técnica muito importante é analisar logo após a produção de uma nova solução, se ela é tecnicamente viável, isto é, se não obedece alguma restrição do problema. Caso isso aconteça, elimina-se imediatamente a solução, impedindo o "nascimento" do organismo.

Definida a representação dos indivíduos e a geração da população inicial, devemos agora apresentar os mecanismos de reprodução que propiciam a evolução da população: seleção, recombinação ("crossover") e mutação.

2.2.4 Seleção

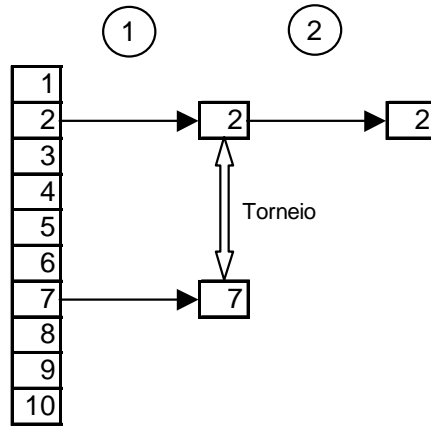
Esse é o mecanismo da seleção natural que ocorre nos meios ambientes biológicos. Os indivíduos que têm um maior grau de adaptação ao meio ambiente têm maior probabilidade de sobrevivência e maior probabilidade de reprodução.

Na codificação do algoritmo existem diferentes formas de implementação. Uma das formas mais utilizadas e mais simples de ser implementada é a seleção por torneio. Na seleção por torneio, dois ou mais indivíduos são sorteados com distribuição de probabilidade uniforme entre todos os indivíduos da população. Após isso, entre os indivíduos sorteados, escolhe-se o que tem melhor adaptação. Nesse tipo de seleção, quanto maior o número de indivíduos sorteados para o torneio, menor a probabilidade dos mais fracos serem escolhidos, isto é, maior o grau de seletividade.

Na figura a baixo, temos um exemplo de seleção por torneio. Nesse caso, quando menor o valor da função objetivo, melhor adaptado é o indivíduo.

Outra forma de seleção utilizada ocorre através da ordenação da população pela adaptação e construção de uma função de distribuição de probabilidade acumulada. Assim, ocorre o sorteio de números aleatórios de forma ponderada à probabilidade de seleção do indivíduo, como mostrado na figura abaixo.

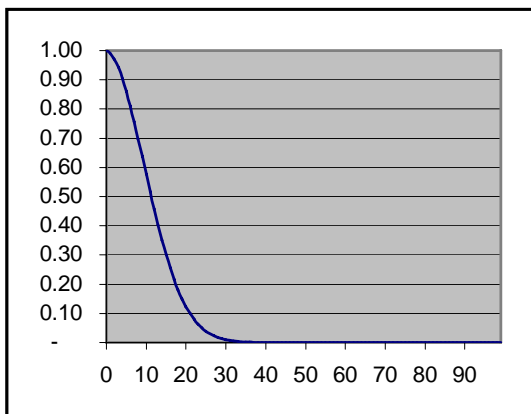
Assim, conforme visto acima, serão selecionados os indivíduos que sobreviverão na próxima geração e quais terão seus cromossomos recombinados para a produção de novos indivíduos. Desse mecanismo vem a classificação de algoritmo evolucionário.



- 1) Seleção com distribuição de probabilidade uniforme
- 2) Seleção por torneio: permanece o melhor

Fig. 2.6.

Distribuição de probabilidade acumulada



Número de seleções por indivíduo

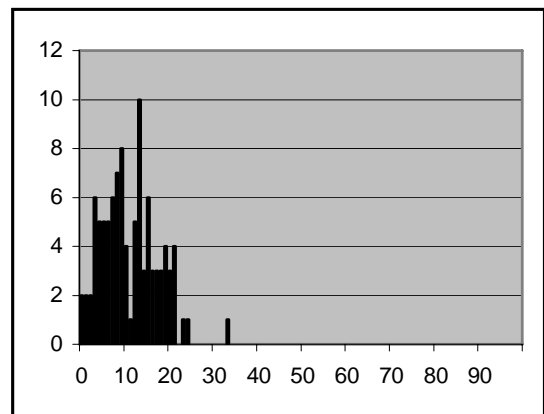


Fig. 2.7.

2.2.5 Recombinação

A recombinação é o mecanismo que fornece a direção da busca aleatória. O próximo ponto a ser testado será obtido através da combinação de pedaços de duas soluções diferentes. Esse método pode resultar na criação de uma solução melhor mas também pode originar uma solução mais distante do ponto ótimo, evitando que o algoritmo fique preso em mínimos ou máximos locais.

O mecanismo utilizado para isso também foi baseado nos mecanismos de reprodução celular dos organismos. São selecionados dois indivíduos, através dos critérios já mostrados, que farão o papel dos pais. Seus cromossomos são então recombinados através do processo de "crossover", gerando dois indivíduos filhos. O ponto de corte para a recombinação também é selecionado aleatoriamente com distribuição uniforme, também pode ser selecionado mais de um ponto, conforme mostrado na figura abaixo.

No caso da aplicação do algoritmo genético em domínios numéricos, onde a codificação em bits é necessária, existe uma sugestão de recombinação para aprimorar os casos de recombinação de bits dentro de uma variável, sugerido por Chelouah (2000). Suponha $x(i)$ o componente de solução do organismo x na posição i do cromossomo, e $y(i)$ o componente de solução do organismo y na mesma posição i . Dado que a posição i foi sorteada para crossover, os valores $x'(i)$ e $y'(i)$ dos componentes nos organismos filhos, serão dados por

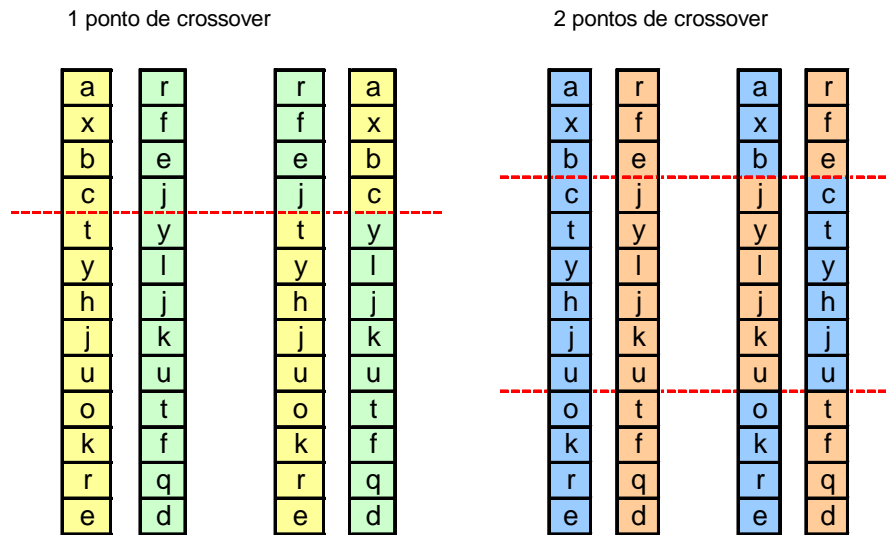


Fig. 2.8.

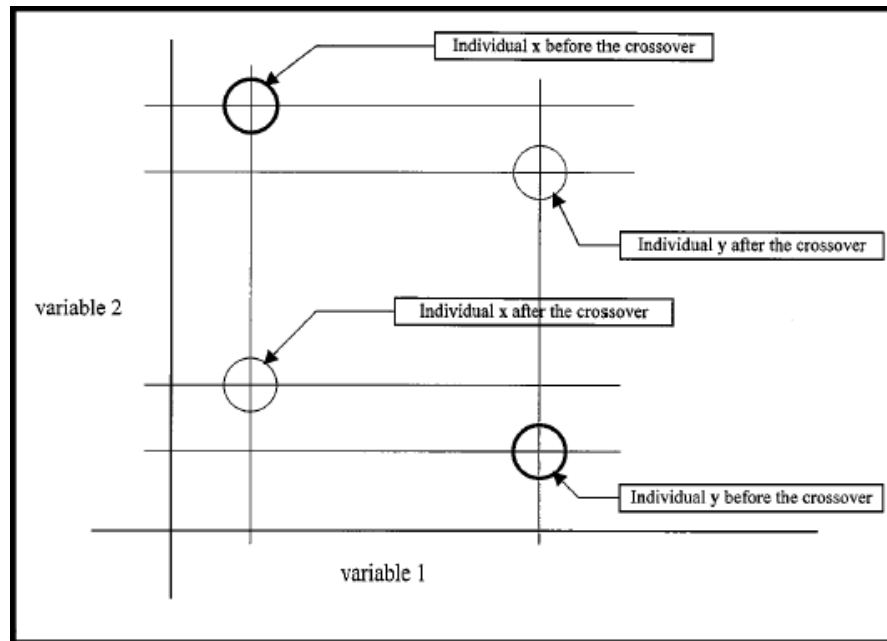


Fig. 2.9.

$$\Delta x = \frac{x(i)}{M}, \Delta y = \frac{y(i)}{M}$$

$$x'(i) = x(i) + \Delta y - \Delta x$$

$$y'(i) = y(i) - \Delta y + \Delta x$$

onde M é um número aleatório entre 1 e 1000, dependendo da precisão desejada.

A figura abaixo, extraída do artigo de Chelouah (2000) mostra o efeito desse tipo de recombinação na variável selecionada.

2.2.6 Mutação

A mutação é um mecanismo que permite manter e gerar maior diversidade da população, servindo como uma outra forma de evitar que as soluções fiquem presas num ponto ótimo local. Também imita um efeito ocorrido na reprodução dos organismos biológicos e da mesma forma que ocorre na natureza, pode gerar tanto uma solução melhor para o problema, quanto uma solução muito pior. A taxa de ocorrência de mutação é um parâmetro muito importante na calibração do algoritmo, pois poucas mutações podem travar o algoritmo num ponto de mínimo local e mutações em excesso podem dificultar a convergência do algoritmo.

A implementação é muito fácil o ponto de vista de codificação. Sorteia-se a posição que sofrerá a mutação e sorteia-se o novo valor da variável, dentro do conjunto de valores possíveis. No caso de variáveis numéricas, um método utilizado é a inversão de um bit sorteado dentro da sequência do número. Uma outra forma sugerida por Chelouah (2000), mostra-se mais apropriada.

Após o sorteio da posição i do cromossomo x que sofrerá a mutação, no lugar de uma inversão binária calcula-se um intervalo de variação Δx e aplica-se esse intervalo no valor da variável, obtendo $x'(i)$.

$$\Delta x = \frac{\text{máximo}(x(i)) - \text{mínimo}(x(i))}{M}$$
$$x'(i) = x(i) \pm k \cdot \Delta x$$

onde M é um número aleatório entre 1 e 10 e k é um coeficiente tal que $0 < k \leq 1$.

O sinal da variação também deve ser sorteado. Importante observar a restrição no valor da variável $x(i)$, que vai de $mínimo(x(i))$ a $máximo(x(i))$.

O coeficiente k é um coeficiente de intensificação. Deve começar com o valor 1 e reduzir lentamente a medida em que a população evolui. Isso permite que a busca aleatória fique mais precisa na medida em que se aproxima do ponto ótimo.

2.2.7 Aplicações do algoritmo genético

O algoritmo genético é um algoritmo que pode ser utilizado em problemas de otimização, problemas de busca e também em aplicações de inteligência artificial, conjugado com redes neurais. No campo da otimização consegue atender às necessidades nas mais variadas formas de função objetivo e mostra-se eficiente em funções altamente multimodais, como a função de Griewank mostrada na figura abaixo.

Existem problemas de convergência conhecidos na aplicação do algoritmo, como por exemplo a demora para atingir um ponto de máximo com a precisão desejada, quando a solução já se encontra próxima do valor. Essa demora ocorre devido à dependência exclusiva no mecanismo de mutação, fato que acaba tornando o processo uma busca puramente aleatória. Para resolver esse tipo de problema, como muitos outros tipos, normalmente são empregadas técnicas mistas dos algoritmos vistos nesse capítulo, utilizando por exemplo a otimização pelo gradiente combinada com o algoritmo genético.

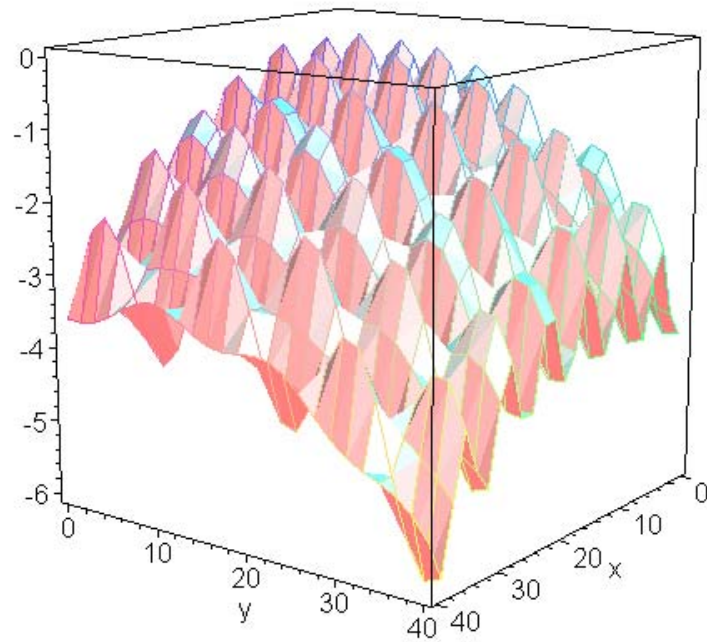


Fig. 2.10.

Chapter 3

Implementação

A idéia da aplicação dos algoritmos genéticos na otimização de hedge de derivativos surgiu como uma forma de reunir, em um único trabalho, conceitos de modelagem de risco de derivativos, conceitos de problemas de otimização, conceitos de engenharia de software e experiência profissional adquirida no controle de operações de tesouraria em bancos de investimentos.

A implementação começa com a definição dos derivativos utilizados e seus fatores de risco. Logo em seguida será mostrada a arquitetura do sistema desenvolvido para realizar os testes. O objetivo da arquitetura foi o de aplicar o algoritmo genético para encontrar uma composição de carteira de derivativos de pregão que fizesse o melhor hedge possível de uma carteira já existente, contratada com clientes da instituição.

O principal motivo da escolha do algoritmo genético foi o de explorar a característica evolutiva do algoritmo. A medida que novas operações fossem incluídas na carteira de cliente, o algoritmo poderia evoluir a nova carteira de hedge a partir de informações sobre a solução já existente, podendo fornecer uma carteira de hedge com mais agilidade.

Outra característica considerada para utilizar esse algoritmo foi a complexidade da função objetivo. Nesse implementação a função objetivo será o risco total da carteira, considerando a carteira de cliente mais a carteira de hedge. Esse risco será estimado através da aplicação de cenários de estresse sobre a expansão delta-gamma total da carteira. Como

é uma função objetivo de difícil computação e não trivial, o algoritmo genético mostra-se uma boa alternativa por não exigir informações de derivadas da função.

3.1 Produtos utilizados

Os produtos escolhidos para utilização nesse trabalho foram os derivativos de câmbio e de taxa de juros negociados na BM&F (Bolsa de Mercadorias e Futuros). São derivativos com boa liquidez e estão entre os mais negociados pelas mesas de tesouraria. Na implementação, os produtos foram divididos em dois grupos, os derivativos negociados com clientes, através do mercado de balcão, e os derivativos de proteção ("hedge") negociados em pregão. As operações feitas com clientes podem ser em qualquer quantidade e prazo, enquanto que as operações de pregão devem obedecer aos prazos e exercícios listados na bolsa e também um tamanho mínimo de contrato.

No cálculo dos produtos e seus riscos, foram feitas algumas premissas para replicar algumas estratégias utilizadas pelos operadores na realização de hedge de operações e também para restringir um pouco a complexidade do trabalho. Essas premissas são listadas a seguir:

- 1) O prazo de vencimento mínimo para os produtos considerados na carteira é o vencimento do primeiro contrato de dólar futuro na BM&F. Essa restrição foi adotada devido à complexidade para tratar os riscos dos derivativos com vencimento mais curto e também riscos na formação da taxa média de vencimento de derivativos cambiais, correspondente a taxa PTAX do dólar divulgada pelo Banco Central.

2) O produto utilizado para o hedge da exposição cambial em dólar será o dólar futuro de menor vencimento negociado no pregão e não o dólar a vista, como é feito normalmente nos modelos de risco. Essa escolha é decorrente da restrição anterior e também é uma estratégia adotada por muitos bancos para travar os riscos da exposição cambial em dólar.

3) Não serão considerados efeitos de falta de liquidez nem de custos operacionais nos cálculos dos valores presentes dos produtos.

4) O risco analisado para os produtos será calculado através da expansão delta-gamma, diferente do utilizado normalmente nas mesas de operação que parte de uma análise de sensibilidade obtida numericamente.

5) A otimização do hedge procurada é de efetividade "intradia". Não serão considerados efeitos intertemporais, estatísticos nem a valorização "overnight" dos fluxos nem do caixa da carteira.

6) Os fluxos de caixa indexados pelo CDI serão restritos a um percentual de 100% da variação do índice e serão admitidos sem risco.

7) Os vértices de risco utilizados serão os próprios vencimentos dos contratos futuros da BM&F, e não vértices de prazo fixo como utilizado pelo Riskmetrics. As curvas de juros também serão contruídas com base nos mesmo vencimentos. Isso permite uma maior aderência do modelo de risco às expectativas de taxas de juros observadas diretamente no mercado.

8) As taxas de juros em dólar (cupom cambial) serão obtidas pela cotação do FRC (contrato a termo de taxa de juros em dólar) e portanto, serão válidas pelo período que se

inicia no vencimento do primeiro dólar futuro e se estende até o vencimento do contrato de FRC.

9) As volatilidades das opções de dólar serão consideradas como as volatilidades implícitas obtidas dos preços observados no mercado.

Nas fórmulas mostradas as seguir, serão adotadas as seguintes convenções:

r_x : taxa pré da curva de mercado coincidente com o prazo da operação

DU_x : número de dias úteis da data atual até o vencimento da taxa r_x

r_1 : taxa pré da curva de mercado com vencimento imediatamente anterior ao da operação

DU_1 : número de dias úteis da data atual até o vencimento da taxa r_1

r_2 : taxa pré da curva de mercado com vencimento imediatamente posterior ao da operação.

DU_2 : número de dias úteis da data atual até o vencimento da taxa r_1

q_x : taxa cupom da curva de mercado coincidente com o prazo da operação

DC_x : número de dias corridos entre o vencimento do primeiro dólar futuro até o vencimento da taxa q_1

q_1 : taxa cupom da curva de mercado coincidente com o prazo da operação ou vencimento imediatamente anterior

DC_1 : número de dias corridos entre o vencimento do primeiro dólar futuro até o vencimento da taxa q_1

q_2 : taxa cupom da curva de mercado coincidente com o prazo da operação ou vencimento imediatamente anterior

DC_2 : número de dias corridos entre o vencimento do primeiro dólar futuro até o vencimento da taxa q_2

F_1 : cotação do primeiro vencimento do dólar futuro

DU_{F1} : número de dias úteis da data atual até a data de vencimento do primeiro dólar futuro

r_{F1} : taxa pré válida da data atual até o vencimento do primeiro dólar futuro

3.1.1 Derivativos com Clientes

Swap Pré x CDI

Esse tipo de derivativo tem como objetivo fornecer aos clientes uma forma de proteção de dívidas ou ativos pré-fixados em reais, em relação a variação da taxa de juros em reais, doravante denominada "taxa pré". Na contratação do produto são definidos qual o indexador passivo e qual o indexador ativo, a data de início da operação DO , o valor inicial em reais N , a taxa de correção do fluxo pré-fixado tx_{oppre} , o percentual de correção do CDI e a data de vencimento DV . O cálculo do valor presente é feito através de dois fluxos de caixa, um pré-fixado em reais e outro corrigido pelo CDI, conforme mostrado no primeiro capítulo.

$$PV_{\text{swap pré x cdi}} = PV_{\text{pre}} + PV_{\text{CDI}}$$

Para o cálculo da taxa pré no vencimento do contrato será utilizada a interpolação exponencial e os fatores de risco desse produto serão os imediatamente anterior e o imediatamente posterior ao vencimento da operação. No caso do vencimento coincidir com um dos vértices da curva de juros, a taxa para cálculo será obtida diretamente e só haverá um fator de risco.

FV_{pre} será o valor em reais a ser recebido no vencimento, calculado por

$$FV_{pre} = N \cdot (1 + tx_{oppre})^{\frac{DU_{op}}{252}}$$

onde DU_{op} é o número de dias úteis entre DO e DV .

O cálculo do valor presente do fluxo pré-fixado fica

$$PV_{pre} = \frac{FV_{pre}}{df_{pre}}$$

Cálculo do delta pré

$$\begin{aligned}
PV_{pre} &= \frac{FV_{pre}}{df_{pre}} \\
\frac{\partial PV_{pre}}{\partial df_{pre}} &= -\frac{FV_{pre}}{df_{pre}^2} \frac{\partial df_{pre}}{\partial r_1} \\
\text{1 fator} &: df_{pre} = (1+r_1)^{\frac{DU_1}{252}} \\
&: \frac{\partial df_{pre}}{\partial r_1} = \frac{DU_1}{252} \frac{df_{pre}}{1+r_1} \\
\text{2 fatores} &: df_1 = (1+r_1)^{\frac{DU_1}{252}} \\
&: df_2 = (1+r_2)^{\frac{DU_2}{252}} \\
&: df_{pre} = df_1^{\left(\frac{DU_2 - DU_x}{DU_2 - DU_1}\right)} \cdot df_2^{\left(\frac{DU_x - DU_1}{DU_2 - DU_1}\right)} \\
&: \frac{\partial df_{pre}}{\partial r_1} = \left(\frac{DU_2 - DU_x}{DU_2 - DU_1}\right) \frac{df_{pre}}{df_1} \frac{DU_1}{252} \frac{df_1}{1+r_1} \\
&: \frac{\partial df_{pre}}{\partial r_1} = \left(\frac{DU_2 - DU_x}{DU_2 - DU_1}\right) \frac{DU_1}{252} \frac{df_{pre}}{1+r_1} \\
&: \frac{\partial df_{pre}}{\partial r_2} = \left(\frac{DU_x - DU_1}{DU_2 - DU_1}\right) \frac{DU_2}{252} \frac{df_{pre}}{1+r_2}
\end{aligned}$$

Cálculo do gamma pré

$$\frac{\partial^2 PV_{pre}}{\partial df_{pre}^2} = 2 \frac{FV_{pre}}{df_{pre}^3} \left(\frac{\partial df_{pre}}{\partial r_1} \frac{\partial df_{pre}}{\partial r_2} \right) - \frac{FV_{pre}}{df_{pre}^2} \left(\frac{\partial^2 df_{pre}}{\partial r_1 \partial r_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{1 fator} &: \frac{\partial^2 df_{pre}}{\partial r_1^2} = \left(\frac{DU_1}{252}\right)^2 \frac{df_{pre}}{(1+r_1)^2} - \frac{DU_1}{252} \frac{df_{pre}}{(1+r_1)^2} \\
&: \frac{\partial^2 df_{pre}}{\partial r_1^2} = \frac{DU_1}{252} \frac{df_{pre}}{(1+r_1)^2} \left(\frac{DU_1}{252} - 1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \text{ fatores} & : \frac{\partial^2 df_{pre}}{\partial r_1^2} = \left(\frac{DU_2 - DU_x}{DU_2 - DU_1} \right)^2 \frac{df_{pre}}{df_1^2} (df_1')^2 + \\
& \frac{DU_2 - DU_x}{DU_2 - DU_1} \frac{df_{pre}}{df_1} df_1'' - \frac{DU_2 - DU_x}{DU_2 - DU_1} \frac{df_{pre}}{df_1^2} (df_1')^2 \\
& : \frac{\partial^2 df_{pre}}{\partial r_1^2} = \frac{DU_2 - DU_x}{DU_2 - DU_1} \frac{DU_1}{252} \frac{df_{pre}}{(1+r_1)^2} \left(\frac{DU_2 - DU_x}{DU_2 - DU_1} \frac{DU_1}{252} - 1 \right) \\
& : \frac{\partial^2 df_{pre}}{\partial r_2^2} = \frac{DU_x - DU_1}{DU_2 - DU_1} \frac{DU_2}{252} \frac{df_{pre}}{(1+r_2)^2} \left(\frac{DU_x - DU_1}{DU_2 - DU_1} \frac{DU_2}{252} - 1 \right) \\
& : \frac{\partial^2 df_{pre}}{\partial r_1 \partial r_2} = \frac{DU_2 - DU_x}{DU_2 - DU_1} \frac{DU_x - DU_1}{DU_2 - DU_1} \frac{df_{pre}}{df_1 df_2} df_1' df_2' \\
& : \frac{\partial^2 df_{pre}}{\partial r_1 \partial r_2} = \frac{DU_2 - DU_x}{DU_2 - DU_1} \frac{DU_x - DU_1}{DU_2 - DU_1} \frac{df_{pre}}{df_1 df_2} \frac{DU_1}{252} \frac{df_1}{1+r_1} \frac{DU_2}{252} \frac{df_2}{1+r_2} \\
& : \frac{\partial^2 df_{pre}}{\partial r_1 \partial r_2} = \frac{DU_2 - DU_x}{DU_2 - DU_1} \frac{DU_x - DU_1}{DU_2 - DU_1} \frac{DU_1}{252} \frac{DU_2}{252} \frac{df_{pre}}{(1+r_1)(1+r_2)}
\end{aligned}$$

Swap Dólar x CDI

Esse swap é utilizado por clientes para proteção de dívidas ou ativos indexados pelo dólar, em relação a variação da cotação do dólar e também da variação da taxa de juros em dólar, doravante denominada "taxa cupom". Na contratação do produto são definidos qual o indexador passivo e qual o indexador ativo, a data de início da operação, o valor inicial em reais, a taxa inicial do dólar, a taxa de correção do fluxo em dólar, o percentual de correção do CDI e a data de vencimento. O cálculo do valor presente é feito através de dois fluxos de caixa, um indexado ao dólar e outro corrigido pelo CDI.

$$PV_{\text{swap dolar x cdi}} = PV_{\text{dolar}} + PV_{\text{CDI}}$$

O cálculo do valor presente do fluxo em dólar será modificado em relação ao mostrado anteriormente de forma a refletir a mudança do instrumento utilizado para avaliar a taxa cambial, que será o dólar futuro e não a taxa a vista. A taxa de juros em dólar também será considerada a partir do vencimento do dólar futuro.

$$PV_{dolar}(t, T) = \frac{N}{S_0} (1 + q_{op} \cdot DC/360) \cdot F_1 \cdot e^{-\int_{T_{F1}}^T q(u)du} \cdot e^{-\int_t^{T_{F1}} r(u)du}$$

Definindo o valor futuro em dólares e os fatores de desconto

$$FV_{dolar} = \frac{N}{S_0} (1 + q_{op} \cdot DC/360)$$

o valor presente fica

$$PV_{dolar}(t, T) = \frac{FV_{dolar} \cdot F_1}{df_{cpm} \cdot df_{preF1}}$$

Nesse produto existe um risco de variação cambial, dado pelo delta em relação ao dólar futuro, e também um risco de taxa pré no prazo do dólar futuro.

Para o cálculo da taxa cupom no vencimento do contrato será utilizada a interpolação exponencial e os fatores de risco de taxa de juros desse produto serão os imediatamente anterior e o imediatamente posterior ao vencimento da operação. No caso do vencimento coincidir com um dos vértices da curva de juros, a taxa para cálculo será obtida diretamente e só haverá um fator de risco de taxa de juros.

Cálculo do delta dólar F_1

$$\frac{\partial PV_{dolar}}{\partial F_1} = \frac{FV_{dolar}}{df_{cpm} \cdot df_{preF1}}$$

Cálculo do delta pré r_{F1}

$$\begin{aligned} \frac{\partial PV_{dolar}}{\partial df_{preF1}} &= - \frac{FV_{dolar} \cdot F_1}{df_{cpm} \cdot df_{preF1}^2} \frac{\partial df_{preF1}}{\partial r_{F1}} \\ &: df_{preF1} = (1 + r_{F1})^{\frac{DU_{F1}}{252}} \\ &: \frac{\partial df_{preF1}}{\partial r_{F1}} = \frac{DU_{F1}}{252} \frac{df_{preF1}}{1 + r_{F1}} \end{aligned}$$

Cálculo do delta cupom q

$$\begin{aligned} \frac{\partial PV_{dolar}}{\partial df_{cpm}} &= - \frac{FV_{dolar} \cdot F_1}{df_{cpm}^2 \cdot df_{preF1}} \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1} \\ \text{1 fator} &: df_{cpm} = (1 + q_1 \frac{DC_1}{360}) \\ &: \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1} = \frac{DC_1}{360} \\ \text{2 fatores} &: df_1 = (1 + q_1 \frac{DC_1}{360}) \\ &: df_2 = (1 + q_2 \frac{DC_2}{360}) \\ &: df_{cpm} = df_1 \left(\frac{DC_2 - DC_x}{DC_2 - DC_1} \right) + df_2 \left(\frac{DC_x - DC_1}{DC_2 - DC_1} \right) \\ &: \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1} = \left(\frac{DC_2 - DC_x}{DC_2 - DC_1} \right) \frac{DC_1}{360} \\ &: \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_2} = \left(\frac{DC_x - DC_1}{DC_2 - DC_1} \right) \frac{DC_2}{360} \end{aligned}$$

Cálculo do gamma pré r_{F1}

$$\begin{aligned} \frac{\partial PV_{dolar}}{\partial df_{preF1}^2} &= \frac{FV_{dolar} \cdot F_1}{df_{cpm}} \left(\frac{2}{df_{preF1}^3} \frac{\partial df_{preF1}}{\partial r_{F1}} - \frac{1}{df_{preF1}^2} \frac{\partial^2 df_{preF1}}{\partial r_{F1}^2} \right) \\ &: \frac{\partial^2 df_{preF1}}{\partial r_{F1}^2} = \frac{DU_{F1}}{252} \frac{df_{preF1}}{(1+r_{F1})^2} \left(\frac{DU_{F1}}{252} - 1 \right) \end{aligned}$$

Cálculo do gamma cupom q

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 PV_{dolar}}{\partial df_{cpm}^2} &= \frac{FV_{dolar} \cdot F_1}{df_{preF1}} \left[\frac{2}{df_{cpm}^3} \left(\frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1} \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_2} \right) - \frac{1}{df_{preF1}^2} \frac{\partial^2 df_{cpm}}{\partial q_1^2} \right] \\ 1 \text{ fator} &: \frac{\partial^2 df_{cpm}}{\partial q_1^2} = 0 \\ 2 \text{ fatores} &: \frac{\partial^2 df_{cpm}}{\partial q_1^2} = 0 \\ &: \frac{\partial^2 df_{cpm}}{\partial q_2^2} = 0 \\ &: \frac{\partial^2 df_{cpm}}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \end{aligned}$$

Cálculo do gamma dólar F_1 x pré r_{F1}

$$\frac{\partial^2 PV_{dolar}}{\partial df_{preF1} \partial F_1} = - \frac{FV_{dolar}}{df_{cpm} \cdot df_{preF1}^2} \frac{\partial df_{preF1}}{\partial r_{F1}}$$

Cálculo do gamma dólar F_1 x cupom q

$$\frac{\partial^2 PV_{dolar}}{\partial df_{cpm} \partial F_1} = - \frac{FV_{dolar}}{df_{cpm}^2 \cdot df_{preF1}} \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1}$$

Cálculo do gamma pré r_{F1} x cupom q

$$\frac{\partial PV_{dolar}}{\partial df_{cpm}} = - \frac{FV_{dolar} \cdot F_1}{df_{cpm}^2 \cdot df_{preF1}^2} \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1} \frac{\partial df_{preF1}}{\partial r_{F1}}$$

Swap Dólar x Pré

Esse swap é utilizado por clientes para trocar um indexador dólar por um indexador pré-fixado ou vice-versa.

No caso desse produto, considera-se o cálculo como se fosse uma soma de um swap pre x cdi com um swap usd x cdi.

$$PV_{\text{swap dolar x cdi}} = PV_{\text{dolar}} + PV_{CDI}$$

Os cálculos de risco são os mesmos dos swaps pre x cdi e usd x cdi.

Opção flexível de dólar

Esse é um produto procurado por clientes que querem proteger dívidas ou ativos em dólar, trocando o indexador para um valor pré-fixado em reais, mas limitando a perda ao prêmio da opção.

O valor presente desse tipo de operação será calculado com base na fórmula de Black-Scholes, vista no primeiro capítulo, mas que também sofrerá uma modificação, para trabalhar com a volatilidade implícita em cima da cotação do dólar futuro. O processo estocástico continua o mesmo $dS = (r - q) Sdt + \sigma SdZ$, mas o ativo objeto passa a ser o primeiro dólar futuro F_1 e as taxas de juros são as taxas a termo, a partir do vencimento do primeiro futuro.

$$\begin{aligned}
PV_{CallBS}(t, T) &= \frac{S_0 N(d1)}{df_{cpm}(t, T)} - \frac{X N(d2)}{df_{pre}(t, T)} \\
d1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \ln\left(\frac{df_{pre}(t, T)}{df_{cpm}(t, T)}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\
d2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \ln\left(\frac{df_{pre}(t, T)}{df_{cpm}(t, T)}\right) - \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \\
PV_{Call} &= \frac{\frac{F_1}{df_{preF1}} N(d1)}{df_{cpm}} - \frac{X N(d2)}{df_{pre}} \\
d1 &= \frac{\ln\left(\frac{\frac{F_1}{df_{preF1}}}{X}\right) + \ln\left(\frac{df_{pre}}{df_{cpm}}\right) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d2 &= \frac{\ln\left(\frac{\frac{F_1}{df_{preF1}}}{X}\right) + \ln\left(\frac{df_{pre}}{df_{cpm}}\right) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PV_{CallBS} &= \frac{F_1 N(d1)}{df_{cpm} df_{preF1}} - \frac{X N(d2)}{df_{pre}} \\
d1 &= \frac{\ln\left(\frac{F_1}{X} \frac{df_{pre}}{df_{cpm} df_{preF1}}\right) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} \\
d2 &= \frac{\ln\left(\frac{F_1}{X} \frac{df_{pre}}{df_{cpm} df_{preF1}}\right) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

As volatilidades implícitas serão calculadas a partir dos preços observados no mercado e para o cálculo das opções flexíveis será calculada uma volatilidade através de interpolação linear simples usando como ponderação o prazo em dias corridos e o preço de exercício. Primeiro a taxa será interpolada no prazo e depois para o exercício desejado.

Para uma superfície observada em quatro pontos $V(X_1, DC_1) = V_1$, $V(X_2, DC_2) = V_2$, $V(X_3, DC_3) = V_3$ e $V(X_4, DC_4) = V_4$ a volatilidade V_x interpolada num ponto interno a esse quadrilátero fica

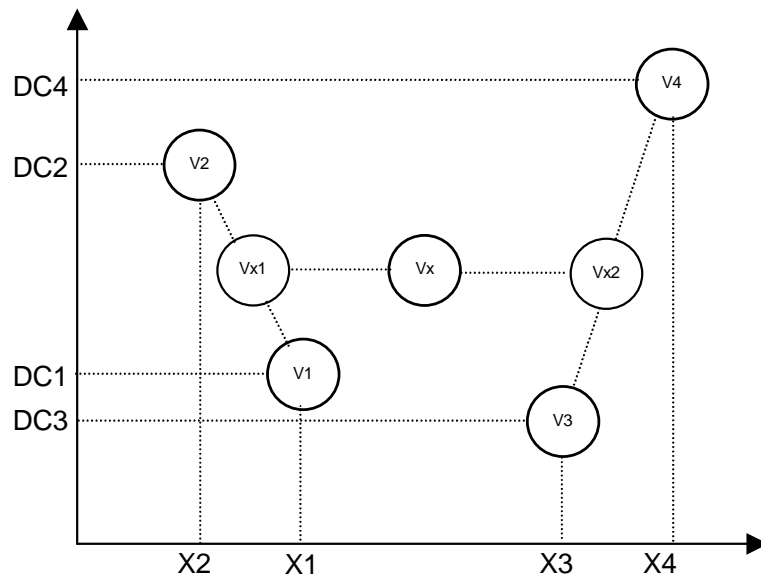


Fig. 3.11.

$$\begin{aligned}
V_{X1} &= V_1 \frac{DC_2 - DC_x}{DC_2 - DC_1} + V_2 \frac{DC_x - DC_1}{DC_2 - DC_1} \\
X_{X1} &= X_1 \frac{DC_2 - DC_x}{DC_2 - DC_1} + X_2 \frac{DC_x - DC_1}{DC_2 - DC_1} \\
V_{X2} &= V_3 \frac{DC_4 - DC_x}{DC_4 - DC_3} + V_4 \frac{DC_x - DC_3}{DC_4 - DC_3} \\
X_{X2} &= X_3 \frac{DC_4 - DC_x}{DC_4 - DC_3} + X_4 \frac{DC_x - DC_3}{DC_4 - DC_3} \\
V_X &= V_{X1} \frac{X_{x2} - X_x}{X_{x2} - X_{x1}} + V_{X2} \frac{X_x - X_{x1}}{X_{x2} - X_{x1}}
\end{aligned}$$

Existem outros modelos mais precisos de interpolação, como desenvolvido em Avelaneda (1997), mas não foram adotados devido à complexidade na derivação do risco, fugindo do escopo do trabalho. Nessa implementação também não serão utilizadas opções de venda e o cálculo de alguns gammas serão desprezados, por simplificação.

A seguir serão calculados os seguintes deltas: $\frac{\partial PV_{Call}}{\partial F_1}$, $\frac{\partial PV_{Call}}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial PV_{Call}}{\partial r_{F1}}$, $\frac{\partial PV_{Call}}{\partial r}$, $\frac{\partial PV_{Call}}{\partial q}$

e o seguinte gamma: $\frac{\partial^2 PV_{Call}}{\partial F_1^2}$.

O delta em relação ao tempo $\frac{\partial PV_{Call}}{\partial T}$, chamado de Theta, será desconsiderado pois não faremos análise de hedge multiperíodo. Em relação ao utilizado normalmente nas mesas de operações, será calculado um delta novo $\frac{\partial PV_{Call}}{\partial r_{F1}}$, que é a sensibilidade do preço em relação à taxa de juros pré para o vencimento do primeiro dólar futuro.

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$N''(x) = -xN(x)$$

Cálculo do delta dólar F_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial PV_{Call}}{\partial F_1} &= \frac{N(d1)}{df_{cpm} df_{preF1}} + \frac{F_1 N'(d1)}{df_{cpm} df_{preF1}} \frac{\partial d1}{\partial F_1} - \frac{X N'(d2)}{df_{pre}} \frac{\partial d2}{\partial F_1} \\ &: \frac{\partial d1}{\partial F_1} = \frac{\partial d2}{\partial F_1} = \frac{1}{F_1 \sigma \sqrt{T}} \end{aligned}$$

Cálculo do delta pré r_{F1}

$$\begin{aligned} \frac{\partial PV_{Call}}{\partial r_{F1}} &= \frac{F_1 N'(d1)}{df_{cpm} df_{preF1}} \frac{\partial d1}{\partial r_{F1}} - \frac{F_1 N(d1)}{df_{cpm} df_{preF1}^2} \frac{\partial df_{preF1}}{\partial r_{F1}} - \frac{X N'(d2)}{df_{pre}} \frac{\partial d2}{\partial r_{F1}} \\ &: \frac{\partial d1}{\partial r_{F1}} = \frac{\partial d2}{\partial r_{F1}} = -\frac{1}{df_{preF1} \sigma \sqrt{T}} \frac{\partial df_{preF1}}{\partial r_{F1}} \\ &: \frac{\partial df_{preF1}}{\partial r_{F1}} = \frac{DU_{F1}}{252} \frac{df_{preF1}}{1 + r_{F1}} \end{aligned}$$

Cálculo do delta σ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial PV_{Call}}{\partial \sigma} &= \frac{F_1 N'(d1)}{df_{cpm} df_{pre} F_1} \frac{\partial d1}{\partial \sigma} - \frac{X N'(d2)}{df_{pre}} \frac{\partial d2}{\partial \sigma} \\
1 \text{ fator} &: \frac{\partial d1}{\partial \sigma} = \sqrt{T} - \frac{d1}{\sigma^2 \sqrt{T}} \\
&: \frac{\partial d2}{\partial \sigma} = -\sqrt{T} - \frac{d2}{\sigma^2 \sqrt{T}} \\
4 \text{ fatores} &: \frac{\partial d1}{\partial \sigma_1} = \left(\sqrt{T} - \frac{d1}{\sigma^2 \sqrt{T}} \right) \frac{Xx_2 - X_x}{Xx_2 - Xx_1} \frac{DC_2 - DC_x}{DC_2 - DC_1} \\
&: \frac{\partial d1}{\partial \sigma_2} = \left(\sqrt{T} - \frac{d1}{\sigma^2 \sqrt{T}} \right) \frac{Xx_2 - X_x}{Xx_2 - Xx_1} \frac{DC_x - DC_1}{DC_2 - DC_1} \\
&: \frac{\partial d1}{\partial \sigma_3} = \left(\sqrt{T} - \frac{d1}{\sigma^2 \sqrt{T}} \right) \frac{X_x - Xx_1}{Xx_2 - Xx_1} \frac{DC_2 - DC_x}{DC_2 - DC_1} \\
&: \frac{\partial d1}{\partial \sigma_4} = \left(\sqrt{T} - \frac{d1}{\sigma^2 \sqrt{T}} \right) \frac{X_x - Xx_1}{Xx_2 - Xx_1} \frac{DC_x - DC_1}{DC_2 - DC_1} \\
&: \frac{\partial d2}{\partial \sigma_1} = \left(-\sqrt{T} - \frac{d2}{\sigma^2 \sqrt{T}} \right) \frac{Xx_2 - X_x}{Xx_2 - Xx_1} \frac{DC_2 - DC_x}{DC_2 - DC_1} \\
&: \frac{\partial d2}{\partial \sigma_2} = \left(-\sqrt{T} - \frac{d2}{\sigma^2 \sqrt{T}} \right) \frac{Xx_2 - X_x}{Xx_2 - Xx_1} \frac{DC_x - DC_1}{DC_2 - DC_1} \\
&: \frac{\partial d2}{\partial \sigma_3} = \left(-\sqrt{T} - \frac{d2}{\sigma^2 \sqrt{T}} \right) \frac{X_x - Xx_1}{Xx_2 - Xx_1} \frac{DC_2 - DC_x}{DC_2 - DC_1} \\
&: \frac{\partial d2}{\partial \sigma_4} = \left(-\sqrt{T} - \frac{d2}{\sigma^2 \sqrt{T}} \right) \frac{X_x - Xx_1}{Xx_2 - Xx_1} \frac{DC_x - DC_1}{DC_2 - DC_1}
\end{aligned}$$

Na codificação deve-se tomar cuidado especial quando a interpolação da volatilidade for feita entre dois ou três fatores.

Cálculo do delta pré r

$$\begin{aligned}
\frac{\partial PV_{Call}}{\partial r} &= \frac{F_1 N'(d1)}{df_{cpm} df_{pre} F_1} \frac{\partial d1}{\partial r} - \frac{X N'(d2)}{df_{pre}} \frac{\partial d2}{\partial r} + \frac{X N(d2)}{df_{pre}^2} \frac{\partial df_{pre}}{\partial r} \\
&: \frac{\partial d1}{\partial r} = \frac{\partial d2}{\partial r} = \frac{1}{df_{pre} \sigma \sqrt{T}} \frac{\partial df_{pre}}{\partial r}
\end{aligned}$$

Cálculo do delta cupom q

$$\begin{aligned} \frac{\partial PV_{Call}}{\partial q} &= \frac{F_1 N'(d1)}{df_{cpm} df_{preF1}} \frac{\partial d1}{\partial q} - \frac{F_1 N(d1)}{df_{cpm}^2 df_{preF1}} \frac{\partial d1}{\partial q} - \frac{X N'(d2)}{df_{pre}} \frac{\partial d2}{\partial q} \\ &: \frac{\partial d1}{\partial q} = \frac{\partial d2}{\partial q} = -\frac{1}{df_{cpm} \sigma \sqrt{T}} \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q} \end{aligned}$$

Cálculo do gamma dólar F_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 PV_{Call}}{\partial F_1^2} &= \frac{2N'(d1)}{df_{cpm} df_{preF1}} \frac{\partial d1}{\partial F_1} + \frac{F_1 N''(d1)}{df_{cpm} df_{preF1}} \left(\frac{\partial d1}{\partial F_1} \right)^2 + \frac{F_1 N'(d1)}{df_{cpm} df_{preF1}} \frac{\partial^2 d1}{\partial F_1^2} \\ &\quad - \frac{X N''(d2)}{df_{pre}} \left(\frac{\partial d2}{\partial F_1} \right)^2 - \frac{X N'(d2)}{df_{pre}} \frac{\partial^2 d2}{\partial F_1^2} \\ &: \frac{\partial d1}{\partial F_1} = \frac{\partial d2}{\partial F_1} = \frac{1}{F_1 \sigma \sqrt{T}} \\ &: \frac{\partial^2 d1}{\partial F_1^2} = \frac{\partial^2 d2}{\partial F_1^2} = -\frac{1}{F_1^2 \sigma \sqrt{T}} \end{aligned}$$

3.1.2 Derivativos de Hedge

Futuro de Dólar

O contrato futuro de dólar será utilizado nessa implementação para fornecer um instrumento de hedge da exposição cambial. Na lista de instrumentos será utilizado apenas o primeiro vencimento. Seu valor presente é dado pela diferença entre a cotação de abertura e a cotação observada no pregão F_1 . Esse contrato corresponde ao fator de risco F_1 , portanto seu único de risco é o delta sobre a variação de F_1 .

Cabe observar que o valor presente de todos os contratos futuros serão considerados como zero na abertura do pregão e a carteira de hedge será feita no instante de abertura, isto é, todas as operações serão feitas na taxa de abertura.

A quantidade da operação é definida em número de contratos e cada contrato tem um valor futuro em dólar de U\$50.000,00, isto é $FV_{dolar} = 50.000$

Todos os cálculos de risco de futuros serão feitos por unidade de contrato e o risco da carteira será obtido multiplicando-se o risco de um contrato pela quantidade de contratos.

Cálculo do delta dólar F_1

$$\frac{\partial F_1}{\partial F_1} = 1$$

Futuro de DI

O contrato futuro de DI será utilizado em vários vencimentos, todos no primeiro dia útil de cada mês. Será utilizado inclusive no dia do vencimento do primeiro dólar futuro, para o hedge da taxa pré mais curta r_{F1} . Esses contratos serão utilizados para construir a curva de taxa de juros em reais na abertura do mercado e portanto seus vencimentos serão utilizados como os fatores de risco r_{F1} e r .

Cada contrato tem um valor futuro fixo em reais de R\$100.000,00, isto é $FV_{pre} = 100.000$

O risco do contrato será apenas o delta da taxa pré e seu cálculo é o mesmo feito para o swap pré x cdi, com um fator.

Cálculo do delta pré r

$$\frac{\partial PV_{pre}}{\partial df_{pre}} = -\frac{FV_{pre}}{df_{pre}^2} \frac{\partial df_{pre}}{\partial r_1}$$

$$\begin{aligned} \text{1 fator} & : df_{pre} = (1 + r_1)^{\frac{DU_1}{252}} \\ & : \frac{\partial df_{pre}}{\partial r_1} = \frac{DU_1}{252} \frac{df_{pre}}{1 + r_1} \end{aligned}$$

Futuro de DDI

O contrato futuro de DDI será utilizado em vários vencimentos, todos no primeiro dia útil de cada mês. Apesar desse contrato ter risco de taxa de juros em dólar, o cenário de cupom será obtido do instrumento FRC.

No futuro de DDI, cada contrato tem um valor futuro fixo em dólares de U\$50.000,00, isto é $FV_{dolar} = 50.000$

Esse tipo de contrato é tem equivalente a um swap dólar x cdi, portanto o risco do contrato será o delta em relação ao dólar F_1 , o delta da taxa pré no primeiro vencimento do dólar r_{F1} , o delta da taxa cupom q com apenas um fator e os gammas de cada um desses fatores, calculados da mesma forma que no swap dólar x cdi.

Cálculo do delta dólar F_1

$$\frac{\partial PV_{dolar}}{\partial F_1} = \frac{FV_{dolar}}{df_{cpm} \cdot df_{preF1}}$$

Cálculo do delta pré r_{F1}

$$\begin{aligned} \frac{\partial PV_{dolar}}{\partial df_{preF1}} &= - \frac{FV_{dolar} \cdot F_1}{df_{cpm} \cdot df_{preF1}^2} \frac{\partial df_{preF1}}{\partial r_{F1}} \\ &: df_{preF1} = (1 + r_{F1})^{\frac{DU_{F1}}{252}} \\ &: \frac{\partial df_{preF1}}{\partial r_{F1}} = \frac{DU_{F1}}{252} \frac{df_{preF1}}{1 + r_{F1}} \end{aligned}$$

Cálculo do delta cupom q

$$\begin{aligned} \frac{\partial PV_{dolar}}{\partial df_{cpm}} &= - \frac{FV_{dolar} \cdot F_1}{df_{cpm}^2 \cdot df_{preF1}} \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1} \\ \text{1 fator} &: df_{cpm} = (1 + q_1 \frac{DC_1}{360}) \\ &: \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1} = \frac{DC_1}{360} \end{aligned}$$

Cálculo do gamma cupom q

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 PV_{dolar}}{\partial df_{cpm}^2} &= \frac{FV_{dolar} \cdot F_1}{df_{preF1}} \left[\frac{2}{df_{cpm}^3} \left(\frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1} \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_2} \right) - \frac{1}{df_{preF1}^2} \frac{\partial^2 df_{cpm}}{\partial q_1^2} \right] \\ \text{1 fator} &: \frac{\partial^2 df_{cpm}}{\partial q_1^2} = 0 \end{aligned}$$

Cálculo do gamma dólar F_1 x pré r_{F1}

$$\frac{\partial^2 PV_{dolar}}{\partial df_{preF1} \partial F_1} = - \frac{FV_{dolar}}{df_{cpm} \cdot df_{preF1}^2} \frac{\partial df_{preF1}}{\partial r_{F1}}$$

Cálculo do gamma dólar F_1 x cupom q

$$\frac{\partial^2 PV_{dolar}}{\partial df_{cpm} \partial F_1} = - \frac{FV_{dolar}}{df_{cpm}^2 \cdot df_{preF1}} \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1}$$

Cálculo do gamma pré r_{F1} x cupom q

$$\frac{\partial PV_{dolar}}{\partial df_{cpm}} = - \frac{FV_{dolar} \cdot F_1}{df_{cpm}^2 \cdot df_{preF1}^2} \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1} \frac{\partial df_{preF1}}{\partial r_{F1}}$$

Futuro de FRC

O contrato futuro de FRC será utilizado em vários vencimentos, todos no primeiro dia útil de cada mês, exceto no dia do vencimento do primeiro dólar futuro. Esses contratos serão utilizados para construir a curva de taxa de juros em dólar na abertura do mercado e portanto seus vencimentos serão utilizados como os fatores de risco q .

Cada contrato tem um valor futuro fixo em dólares de U\$50.000,00, isto é $FV_{dolar} = 50.000$

Esse tipo de contrato, formado pela composição de duas operações de futuro de DDI, tem seu risco composto por dois fluxos em dólar, um no vencimento do contrato e um no vencimento do primeiro dólar futuro, com sentido oposto. O objetivo desse fluxo mais curto é o anulamento da exposição cambial, isto é, o risco em relação à variação do dólar é zero, permanecendo somente o risco em relação à taxa de juros em dólar a termo.

O risco do contrato será apenas o delta da taxa cupom e seu cálculo é o mesmo feito para o swap dólar x cdi, com um fator.

Cálculo do delta cupom q

$$\frac{\partial PV_{dolar}}{\partial df_{cpm}} = - \frac{FV_{dolar} \cdot F_1}{df_{cpm}^2 \cdot df_{preF1}} \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1}$$

$$1 \text{ fator} : df_{cpm} = \left(1 + q_1 \frac{DC_1}{360}\right)$$

$$: \frac{\partial df_{cpm}}{\partial q_1} = \frac{DC_1}{360}$$

Opção listada de dólar

Esse contrato correspondem aos contratos de opção de dólar negociados no pregão na BM&F. Os vencimentos e preços de exercício são padronizados, de acordo com as séries autorizadas para negociação. Esses contratos serão utilizados para o cálculo da volatilidade implícita e seus prazos e preços de exercícios serão considerados como fatores de risco na superfície de volatilidade. Os cálculos dos riscos são os mesmos já mostrados para as opções flexíveis de dólar.

3.2 Arquitetura orientada a objetos

3.2.1 Visão geral

O sistema foi desenvolvido de forma a aproveitar os recursos da orientação a objeto no sentido de permitir a fácil adição de novas classes na arquitetura, isto é, uma modelagem

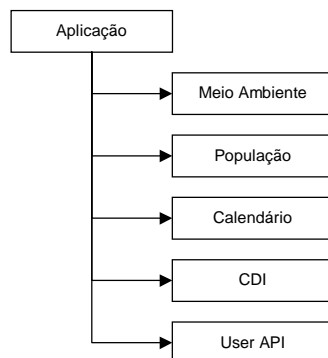
escalável. Dessa forma, pode-se adicionar facilmente novos produtos, com novos fatores de risco.

Também foi desenvolvido de forma a facilitar a implementação de processamento paralelo, com a evolução de populações em máquinas diferentes e possível migração de indivíduo entre as populações.

Toda a interface com o usuário foi implementada em Excel. As entradas e saídas de dados são feitas através de APIs ("Application Programming Interface") disponibilizadas pela DLL ("Dynamic Linked Library") do sistema.

A seguir serão descritas as funcionalidades de cada um dos objetos da arquitetura.

3.2.2 Aplicação



A aplicação é o componente principal da arquitetura é o módulo responsável pela inicialização do programa. Seu construtor contém a criação da instância da classe UserAPI, que é a interface com o usuário.

Essa classe contém os seguintes métodos de entrada de dados:

1) InputFeriados: entrada da lista de feriados que cria uma instância da classe Calendário, usada no cálculo do número de dias úteis entre duas datas.

2) InputCDI: entrada da base histórica de taxas do CDI. Cria uma instância da classe CDI para cálculo do fator acumulado entre duas datas.

3) InputCenárioAtual: entrada das taxas de mercados atuais, usadas para o cálculo do valor a mercado, dos deltas e dos gammas. Cria uma instância do MeioAmbiente se ainda não existir uma.

4) InputCenáriosEstresse: conjunto de variações do cenário atual usado para avaliar o risco das carteiras. Cria uma instância do MeioAmbiente se ainda não existir uma.

5) InputCarteiraCliente: lista de operações feitas com o clientes e que geram o risco a ser minimizado. Cria uma instância do MeioAmbiente se ainda não existir uma.

6) InputConfiguraçãoPopulação: entrada dos parâmetros de calibração do algoritmo genético, tais como tamanho inicial da população, taxa de redução, taxa de sobrevivência, taxa de mutação e número de gerações para a convergência da solução. A entrada desses dados cria uma instância da classe População. Não foi desenvolvido o suporte para várias populações simultâneas.

7) InputInstrumentosHedge: lista dos instrumentos disponíveis na População para fazer o hedge do risco da carteira de clientes. A entrada desses dados também pode criar uma instância da classe População, se ainda não existir uma.

8) InputSoluçãoInicial: entrada opcional de uma solução obtida para uma carteira anterior, que pode conter sequências úteis para a nova solução a ser encontrada. Só funciona se a classe População já estiver configurada e com os instrumentos.

A classe UserAPI possui dois métodos de comando de execução:

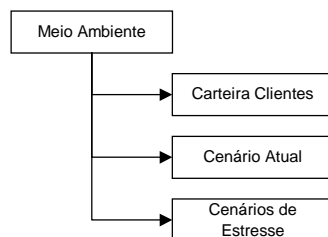
1) PreparaAmbiente: verifica se todos os dados do ambiente estão corretos e calcula os deltas e gammas da carteira de clientes. Caso tenham sido adicionadas novas operações com clientes, esse comando tem que ser executado novamente.

2) EvoluiPopulação: verifica se as configurações da população estão corretas, calcula os deltas e gammas dos instrumentos e gera a população inicial. Caso a população já tenha sido criada, evolui mais uma geração dos indivíduos.

3) IniciaPopulação: verifica se as configurações da população estão corretas, calcula os deltas e gammas dos instrumentos e gera a população inicial. Caso a população já tenha sido criada, ela será substituída por uma nova.

A classe UserAPI também tem todas as funções que retornam a situação da população, tais como geração atual, cromossomo de cada indivíduo, deltas e gammas das carteiras, valor do risco de cada indivíduo, etc.

3.2.3 MeioAmbiente

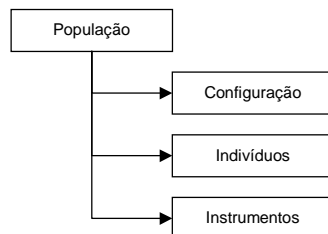


A classe MeioAmbiente é formada pelas informações estáticas do sistema. Possui o cenário de mercado atual, a carteira de operações com clientes e os cenários de estresse. Dentro do algoritmo genético, essa classe é aquela que simboliza todas as adversidades

do ecossistema às quais os organismos estão expostos e que vão determinar quais são os organismos mais aptos que sobreviverão a cada nova geração.

Nessa classe está a importante função "AvaliaIndivíduo". Essa é a função objetivo do problema, responsável por classificar o grau de adaptação de cada indivíduo ("fitness"). Em termos de risco de mercado, essa função agregará a carteira de clientes com a carteira de hedge e aplicará os cenários de estresse, retornando qual a perda ou ganho esperado da carteira total. Quanto menor o valor retornado, em módulo, melhor é a solução, melhor é a carteira de hedge e portanto, mais apto é o indivíduo.

3.2.4 População

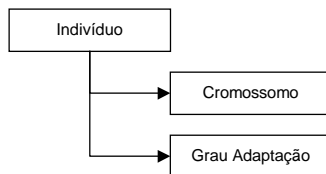


Essa é a classe que implementa efetivamente o algoritmo genético. Ela contém a rotina de geração dos indivíduos iniciais, dada a configuração desejada. Também contém as rotinas de evolução, através dos operadores de seleção, recombinação e mutação. A seleção é feita através de torneio, após a ordenação dos indivíduos por grau de adaptação. A recombinação e a mutação são feitas através dos métodos para variáveis numéricas, mostrados no capítulo 2, com truncamento para números inteiros, devido à restrição dos contratos de futuros e opções listadas.

Cromossomo		Instrumentos
1000	=>	FUT DOL AGO3
-40	=>	FUT FRC SET3
30	=>	FUT FRC OUT3
57	=>	FUT FRC JAN4
200	=>	FUT FRC ABR4
-1300	=>	FUT FRC JUL4
900	=>	FUT DI AGO3
110	=>	FUT DI SET3
0	=>	FUT DI OUT3
0	=>	FUT DI JAN4
340	=>	FUT DI ABR4
57	=>	FUT DI JUL4
-73	=>	OPC DOL AGO3 X3.0
0	=>	OPC DOL AGO3 X3.2

Fig. 3.12.

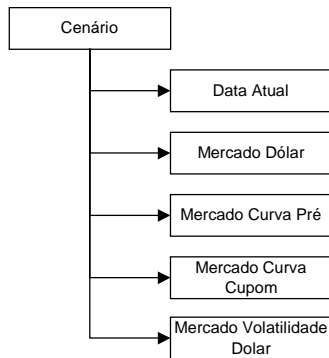
3.2.5 Indivíduo



A classe *Indivíduo* representa uma solução do problema de otimização. É formada pelo cromossomo, que nesse caso foi modelado como um vetor definindo a quantidade de contratos de cada instrumento de hedge disponível. O significado de cada posição do cromossomo é dinâmico, dependente dos instrumentos que foram disponibilizados na configuração.

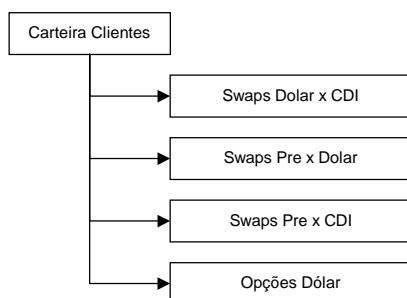
A classe *Indivíduo* também guarda o grau de adaptação do indivíduo, retornado na função de avaliação do *MeioAmbiente*.

3.2.6 Cenário



O cenário é a classe contida no MeioAmbiente e que armazena todas as taxas de mercado e a data atual. Foi definida uma classe genérica Mercado e dela derivada, por herança, as classes específicas de cada mercado. Nessa classe são definidos os fatores de risco, através de cada vencimento e preço de exercício existente nas curvas configuradas. Também é essa classe que fornece os métodos para que as classes de produtos e instrumentos obtenham as taxas para cálculo do valor a mercado e dos deltas e gammas.

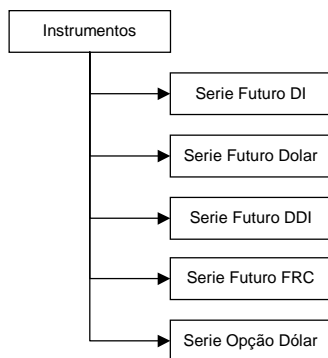
3.2.7 CarteiraClientes



Essa classe contém a lista de operações com os clientes configurada pelo usuário. Consiste numa coleção de instâncias do objeto genérico Carteira, que foi derivado por

herança nos diferentes produtos mostrados na seção anterior. Todos os cálculos de valor a mercado, deltas e gammas estão nessas classes específicas de cada produto.

3.2.8 Instrumentos



Essa classe contém a lista de vencimentos e preços de exercícios disponíveis para se fazer o hedge da carteira de clientes. Esses instrumentos são definidos pelo usuário e têm o importante papel de definir o modelo do cromossomo utilizado para gerar cada indivíduo da população.

3.2.9 Interface com o usuário

Geração Atual	383
Sem evolução	99
Tamanho População	100

Tempo de execução	
Reprodução	00:00.0
Avaliação	00:00.0

Evolui uma geração

Evolui até convergência

Grau Adaptação	
1	516,139.87
2	516,139.87
3	516,139.87
4	516,139.87
5	516,139.87
6	516,139.87
7	516,139.87
8	516,139.87
9	516,139.87
10	516,139.87
11	516,139.87
12	516,139.87
13	516,139.87
14	516,139.87
15	516,139.87
16	516,139.87
17	516,139.87
18	516,139.87
19	516,139.87
20	516,139.87
21	516,139.87
22	516,139.87
23	...
24	...

Cromossomo	
FuturoDI 1/8/2003 0	0 0
FuturoDI 1/9/2003 0	0 0
FuturoDI 1/1/2004 0	0 0
FuturoDI 1/4/2004 0	0 -10
FuturoDI 1/7/2004 0	-154 -28
FuturoDI 1/10/2004 0	48 -7
FuturoDI 1/1/2005 0	32 26
FuturoDI 1/4/2005 0	15 46
FuturoDI 1/7/2005 0	0 -39
FuturoDolar 1/8/2003 0	0 0
FuturoFRC 1/9/2003 0	0 0
FuturoFRC 1/10/2003 0	-2 0
FuturoFRC 1/1/2004 0	0 0
FuturoFRC 1/4/2004 0	0 8
FuturoFRC 1/7/2004 0	264 0
FuturoFRC 1/10/2004 0	-281 -29
FuturoFRC 1/1/2005 0	-195 -3
FuturoFRC 1/4/2005 0	67 214
FuturoFRC 1/7/2005 0	126 72

Delta Carteira			
Mercado	Vencto	Strike	Delta
CurvaCupom	01-set-03	0	-
CurvaCupom	01-out-03	0	-
CurvaCupom	01-jan-04	0	-
CurvaCupom	01-abr-04	0	-
CurvaCupom	01-jul-04	0	-
CurvaCupom	01-out-04	0	-
CurvaCupom	01-jan-05	0	-
CurvaCupom	01-abr-05	0	-
CurvaCupom	01-jul-05	0	-
CurvaCupom	01-out-05	0	-
CurvaCupom	01-jan-06	0	-
CurvaPre	01-ago-03	0	-
CurvaPre	01-set-03	0	-
CurvaPre	01-out-03	0	-
CurvaPre	01-nov-03	0	-
CurvaPre	01-jan-04	0	-
CurvaPre	01-abr-04	0	-
CurvaPre	01-jul-04	0	(61,817.68)
CurvaPre	01-out-04	0	(7,900.03)
CurvaPre	01-jan-05	0	-
CurvaPre	01-abr-05	0	-
CurvaPre	01-jul-05	0	-
CurvaPre	01-out-05	0	-
CurvaPre	01-jan-06	0	-
Dolar	00-jan-00	0	-

Delta Carteira Inicial			
Mercado	Vencto	Strike	Delta
CurvaCupom	01-set-03	0	-
CurvaCupom	01-out-03	0	483.92
CurvaCupom	01-jan-04	0	-
CurvaCupom	01-abr-04	0	-
CurvaCupom	01-jul-04	0	(326,078.60)
CurvaCupom	01-out-04	0	426,921.03
CurvaCupom	01-jan-05	0	346,051.49
CurvaCupom	01-abr-05	0	(134,038.43)
CurvaCupom	01-jul-05	0	(278,407.61)
CurvaCupom	01-out-05	0	(296,185.50)
CurvaCupom	01-jan-06	0	287,179.90
CurvaPre	01-ago-03	0	-
CurvaPre	01-set-03	0	-
CurvaPre	01-out-03	0	-
CurvaPre	01-nov-03	0	-
CurvaPre	01-jan-04	0	-
CurvaPre	01-abr-04	0	-
CurvaPre	01-jul-04	0	105,004.39
CurvaPre	01-out-04	0	(39,168.31)
CurvaPre	01-jan-05	0	(29,729.95)
CurvaPre	01-abr-05	0	(15,472.78)
CurvaPre	01-jul-05	0	-
CurvaPre	01-out-05	0	-
CurvaPre	01-jan-06	0	-
Dolar	00-jan-00	0	-

Essa parte da interface mostra a situação atual da população. Podemos visualizar qual a geração atual, quantas gerações evoluíram desde a última melhora na solução e qual o tamanho atual da população.

Nas colunas de grau de adaptação, podemos ver o valor em risco de acordo com o cenário de estresse aplicado, para cada indivíduo, de forma ordenada do melhor para o pior.

Nas colunas de cromossomo, podemos ver a composição da carteira de hedge para a melhor solução, de número 1 e para a pior solução, a de número 100. Com essa comparação pode-se ter também uma idéia da diversificação da população.

Nos dois quadros da direita, pode-se visualizar o delta por fator de risco, tanto da carteira inicial, quanto da carteira atual com hedge. Na parte abaixo da interface pode-se visualizar o gamma da carteira.

Swaps Pre x CDI							
OK	Data Operação (DO)	Data Vencimento (DV)	Principal (P)	Ativo	Passivo	Taxa Pré (txoppre)	Percentual CDI
x	3/6/2003	1/7/2004	2.500.000.00	PRE	CDI	15.00%	100.00%

Fig. 3.13.

com mesmo vencimento. A solução ótima foi encontrada após 110 iterações, com uma população inicial de 200 organismos e um cromossomo com 5 vencimentos diferentes de DI. O valor em risco ótimo foi de R\$53,64.

Esse primeiro teste também serviu para perceber a importância da definição dos cenários de estresse. Os cenários que havia sido escolhido inicialmente, eram compostos de curvas deslocamentos paralelos, rotações e alteração de convexidade. O algoritmo conseguiu evoluir para uma solução com risco menor do que a solução ótima teórica através de uma combinação de contratos em vários vencimentos. A solução encontrada apresentou um valor em risco de R\$52,72 e convergiu após 54 iterações. A carteira obtida foi a seguinte:

FuturoDI, vencimento 1/1/2004, -544 contratos

FuturoDI, vencimento 1/4/2004 0 -95 contratos

FuturoDI, vencimento 1/7/2004 0 1008 contratos

FuturoDI, vencimento 1/10/2004 0 -968 contratos

FuturoDI, vencimento 1/1/2005 0 323 contratos

A combinação de cenários que conseguiu produzir a convergência para a solução ótima teórica foi um conjunto de cenários onde cada curva foi gerada com um deslocamento em apenas um dos fatores de risco. Esse novo conjunto foi acrescentado ao cenário inicial.

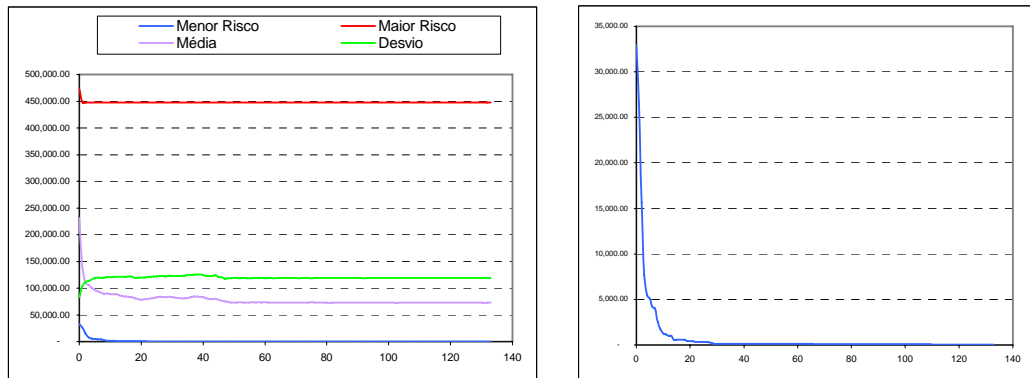


Fig. 3.14.

Swaps Pré x CDI							
OK	Data Operação (DO)	Data Vencimento (DV)	Principal (P)	Ativo	Passivo	Taxa Pré (txoppre)	Percentual CDI
x	3/6/2003	17/10/2003	1.200.000.00	PRE	CDI	16.70%	100.00%

Fig. 3.15.

3.3.3 Hedge de um swap pré x cdi com vencimento diferente da série de futuros de DI

Esse teste também foi executado satisfatoriamente, com a solução sendo encontrada após 169 iterações. Nessa situação pode ser comprovado o problema que o algoritmo genético tem para conseguir um refinamento da solução quando atinge um ponto perto do ótimo. Para convergir do valor em risco de R\$28.422,32 para R\$40,13 foram necessárias 109 iterações. Para evoluir de R\$40,13 para R\$4,67, que foi o valor ótimo encontrado, o algoritmo levou 60 iterações, isto é, 35% do processamento total.

A carteira de hedge ficou da seguinte forma:

FuturoDI, vencimento 1/10/2003, -6 contratos

FuturoDI, vencimento 1/11/2003, -7 contratos

Outro ponto interessante foi observado através da execução do mesmo teste, mas mudando-se a calibração do algoritmo. Diminui a taxa de sobrevivência de 40% para 20% e aumentei a taxa de mutação de 20% para 70%. A convergência nessa rodada foi muito mais rápida, atingindo o mesmo valor em risco de R\$4,67 após 55 gerações.

Isso mostra a sensibilidade do algoritmo em relação a calibração, mas também não podemos esquecer que o algoritmo é de busca aleatória e para uma análise efetiva da sen-

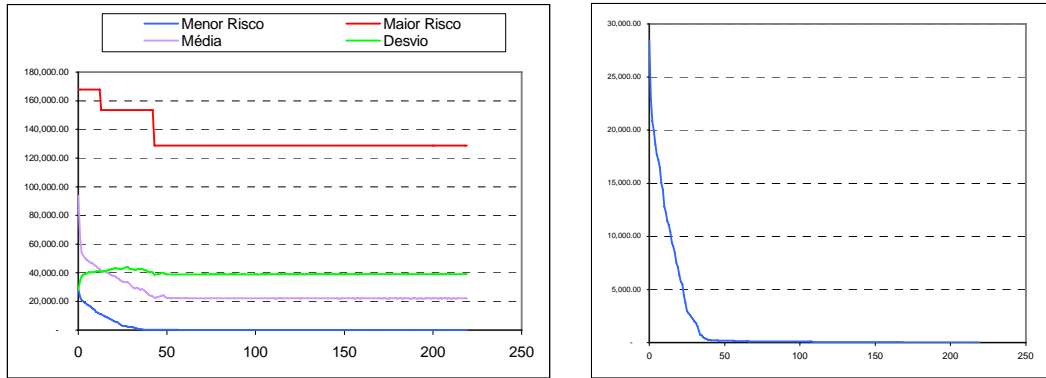


Fig. 3.16.

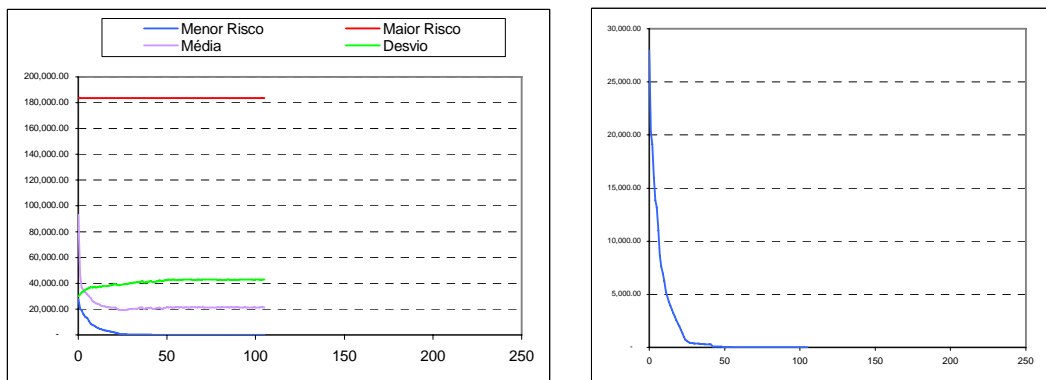


Fig. 3.17.

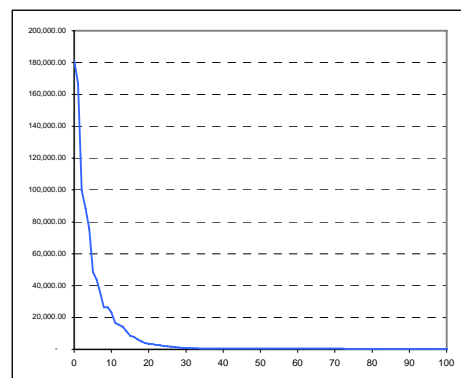
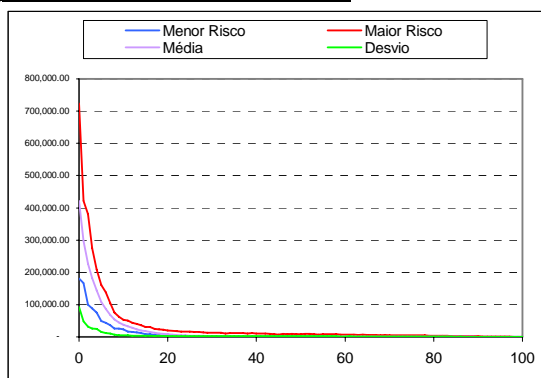
sibilidade de cada parâmetro, o teste deveria ser repetido muitas vezes de forma a obter-se uma análise estatística.

3.3.4 Hedge de uma carteira de 100 swaps pré x cdi

Esse teste mostra a velocidade de convergência do algoritmo para uma população inicial maior, com 1000 indivíduos, no lugar de 200. A carteira de swaps foi gerada com vencimentos por toda a extensão da curva de juros em reais. O valor em risco ótimo foi de R\$150,00 e a solução ótima foi encontrada após 93 gerações, com a seguinte composição:

Cromossomo

	1
FuturoDI 1/8/2003 0	345
FuturoDI 1/9/2003 0	425
FuturoDI 1/10/2003 0	595
FuturoDI 1/11/2003 0	307
FuturoDI 1/1/2004 0	-129
FuturoDI 1/4/2004 0	-803
FuturoDI 1/7/2004 0	-587
FuturoDI 1/10/2004 0	839
FuturoDI 1/1/2005 0	82
FuturoDI 1/4/2005 0	-18
FuturoDI 1/7/2005 0	991
FuturoDI 1/10/2005 0	376
FuturoDI 1/1/2006 0	-412



Nesse teste percebe-se uma grande redução do risco de todas as soluções da população, comparativamente com os testes anteriores. Isso ocorre porque o risco inicial de uma

carteira de muitos swpas sem hedge é muito alto comparado com a carteira ótima. O valor em risco partiu de mais de R\$700.000,00 para terminar com R\$150,00.

3.3.5 Hedge de um swap dólar x cdi com vencimento coincidente com série de futuro de DDI

Para realizar esse teste, foram disponibilizados os futuros de DDI, de DI e o primeiro vencimento do dólar Futuro. A carteira ótima obtida, foi a seguinte:

Swaps Dolar x CDI

OK	Data Operação (DO)	Data Vencimento (DV)	Principal (P)	Ativo	Passivo	Taxa Dólar (txopdol)	Percentual CDI	Partida Dolar (PD)
x	3/6/2003	1/7/2004	2,000,000.00	CDI	USD	6.00%	100%	2.3

FuturoDDI, vencimento 1/7/2004, 19 contratos

FuturoDDI, vencimento 1/8/2003, -338 contratos

FuturoDI, vencimento 1/8/2003, 496 contratos

FuturoDolar, vencimento 1/8/2003, 331 contratos

Essa solução foi obtida na geração 120, com um valor em risco de R\$46,58. Um ponto importante de se notar nessa solução foi o grande número de contratos de DI, DDI e dólar no vencimento 1/8/2003. Isso acontece porque os três produtos possuem fatores de risco que se anulam mutuamente. Dessa forma, o algoritmo encontra várias combinações lineares entre esses três instrumentos que produzem o mesmo risco, possibilitando mais de uma solução ótima.

O teste foi executado novamente, retirando o instrumento de futuro de DDI vencimento 1/8/2003 e a solução obtida foi a seguinte:

FuturoDDI, vencimento 1/7/2004, 19 contratos

FuturoDI, vencimento 1/8/2003, -1 contratos

Como era de se esperar, o hedge foi feito quase totalmente com o DDI de mesmo vencimento. Interessante notar que a diferença entre o valor futuro em dólares do swap USD-926.666.66 com o valor futuro do DDI USD 950.000,00 deixou um resíduo de USD23.333,00 de valor futuro que não pôde ser protegido devido ao tamanho do contrato. Entretanto, esse descasamento produziu um pequeno risco de taxa pré no vencimento do primeiro futuro que pôde ser protegido vendendo 1 contrato de futuro de DI.

Outro ponto interessante observado nesse teste foi a criticidade da definição dos cenários de estresse. Num teste inicial, o cenário para a variação do dólar estava com um aumento de 1 real numa taxa de 2.9385, enquanto que o cenário para a curva de cupom apresentava um aumento médio de 3%. Um aumento dessa magnitude no dólar produz uma variação no valor a mercado muito mais significativa do que a variação do cupom. Devido a isso, o algoritmo acabou desprezando o risco no cupom cambial e após encontrar uma composição de DDI futuro que anulava o delta sobre a cotação do dólar, as mutações não conseguiam gerar uma solução que diminuisse o risco do cupom, pois uma mínima variação nas posições de DDI desbalanceavam o delta em dólar e produzia uma solução muito pior. Após reduzir o cenário de estresse no dólar para uma variação de R\$0,01 o algoritmo conseguiu encontrar a carteira ótima.

3.3.6 Hedge de um swap dólar x cdi com vencimento coincidente com série de futuro de FRC

Rodando novamente o problema anterior com o contrato de FRC, conjugado com o primeiro dólar futuro, que é a forma normalmente feita na prática dia das mesas de operações, obtivemos a seguinte carteira:

Cromossomo

	1
FuturoDI 1/8/2003 0	26
FuturoDolar 1/8/2003 0	17
FuturoFRC 1/9/2003 0	0
FuturoFRC 1/10/2003 0	0
FuturoFRC 1/1/2004 0	0
FuturoFRC 1/4/2004 0	0
FuturoFRC 1/7/2004 0	19
FuturoFRC 1/10/2004 0	0
FuturoFRC 1/1/2005 0	0
FuturoFRC 1/4/2005 0	0

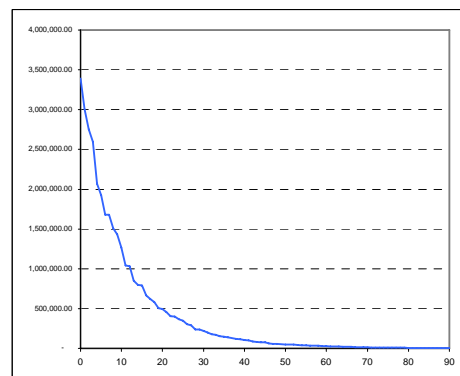
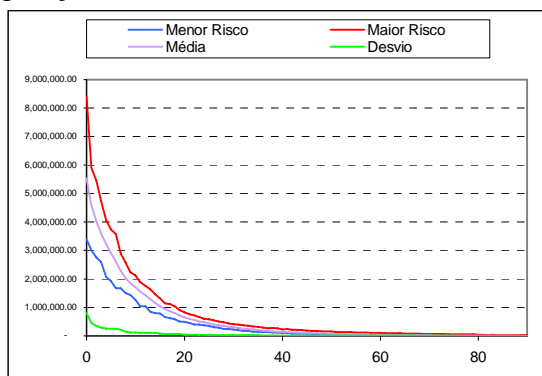
Como era de se esperar, não houve sobreposição de risco de delta de dólar no primeiro vencimento.

3.3.7 Hedge de uma carteira de 300 swaps

Esse foi o teste realizado com todos os instrumentos de swap e futuros implementados. A configuração do algoritmo genético, o grau de adaptação dos 25 primeiros organismos e a carteira ótima obtida podem ser vistos a seguir.

Configuração		Grau Adaptacao		Cromossomo	
		1	391.53		1
População		2	391.53	FuturoDI 01/08/2003 0	4124
		3	392.39	FuturoDI 01/09/2003 0	-1094
Tamanho	1000	4	392.39	FuturoDI 01/10/2003 0	-704
GeracoesParaConvergencia	50	5	392.39	FuturoDI 01/11/2003 0	-956
TaxaSobrevivencia	40%	6	392.44	FuturoDI 01/01/2004 0	89
TaxaMutacao	50%	7	392.44	FuturoDI 01/04/2004 0	-918
ValorMaximoGene	6000	8	393.30	FuturoDI 01/07/2004 0	177
TamanhoMinimo	100	9	393.88	FuturoDI 01/10/2004 0	55
TaxaReducaoTamanho	2	10	393.88	FuturoDI 01/01/2005 0	-46
IntervaloMutacao	1000	11	394.31	FuturoDI 01/04/2005 0	-412
TaxaReducaoIntervaloMutacao	10	12	394.31	FuturoDI 01/07/2005 0	847
		13	394.31	FuturoDI 01/10/2005 0	836
		14	394.31	FuturoDI 01/01/2006 0	1083
		15	394.74	FuturoDolar 01/08/2003 0	2550
		16	394.74	FuturoFRC 01/09/2003 0	-1221
		17	394.77	FuturoFRC 01/10/2003 0	-527
		18	394.79	FuturoFRC 01/01/2004 0	535
		19	395.17	FuturoFRC 01/04/2004 0	397
		20	395.17	FuturoFRC 01/07/2004 0	-140
		21	395.17	FuturoFRC 01/10/2004 0	-297
		22	395.22	FuturoFRC 01/01/2005 0	1772
		23	395.22	FuturoFRC 01/04/2005 0	1029
		24	395.63	FuturoFRC 01/07/2005 0	1011
		25	395.63	FuturoFRC 01/10/2005 0	472
				FuturoFRC 01/01/2006 0	-87

O valor em risco da carteira ótima foi de R\$391,53 e a solução ótima foi obtida na geração 126.



Novamente, percebe-se uma convergência rápida no início e uma demora no refinamento da solução. Uma alternativa para esse problema seria construir um algoritmo que permitisse uma configuração variável, que aumentasse a taxa de mutação à medida em que o grau de convergência se reduzisse. Mas deixar o intervalo de mutação pequeno, de forma a melhorar a convergência e não atrapalhar o direcionamento da solução.

3.3.8 Hedge de uma opção de compra flexível com opções de compra listadas e futuros

Opção flexível de dólar

OK	Data Operação (DO)	Data Vencimento (DV)	Principal (N)	Call/Put	Strike
x	3/6/2003	26/4/2004	(10,000,000.00)	Call	2.950

Esse teste mostrou-se muito interessante pela composição da carteira ótima obtida.

Cromossomo

	1
FuturoDI 1/8/2003 0	-3
FuturoDI 1/1/2004 0	6
FuturoDI 1/4/2004 0	-12
FuturoDI 1/7/2004 0	9
FuturoDI 1/10/2004 0	0
FuturoDolar 1/8/2003 0	-2
FuturoFRC 1/1/2004 0	-4
FuturoFRC 1/4/2004 0	7
FuturoFRC 1/7/2004 0	-5
FuturoFRC 1/10/2004 0	0
OpcaoDolar 1/3/2004 2.9	9
OpcaoDolar 1/3/2004 3	8
OpcaoDolar 1/5/2004 2.9	98
OpcaoDolar 1/5/2004 3	87

As opções listadas escolhidas para o hedge do gamma do dólar foram em maior parte no vencimento de 1/5/2004, pois o vencimento da operação com o cliente é mais próximo a esta data, em 24/04/2004. Mas ainda sobrou um componente de risco no vencimento 1/3/2004 que também foi anulado satisfatoriamente. As quantidades das opções listadas dividiram-se entre os preços de exercício de 2.9 e 3.0, pois o exercício da opção flexível era exatamente a média em 2.95. Mesmo assim pode-se notar que a divisão não foi exata, devido ao efeito do "smile" de volatilidade do cenário de mercado.

Observa-se também que o algoritmo encontrou o hedge para a exposição cambial, dada pelo Delta sobre o dólar, como também para os riscos de taxa de juros. Esse é um resultado importante para o experimento, pois na prática, os operadores de mercado não

conseguem visualizar todos os riscos perfeitamente. Na maior parte dos casos, permanece uma exposição remanescente, pois quando o risco de taxa de juros não é ignorado, o hedge é feito com uma aproximação não muito precisa.

Os fatores de sensibilidade da carteira podem ser vistos abaixo. O valor em risco ficou em R\$459.29.

Delta

Mercado	Vencido	Strike	Delta Carteira Inicial	Delta Carteira Final
Cupom	01-jan-04	-	-	(8,783.75)
Cupom	01-abr-04	-	9,900,775.57	577.61
Cupom	01-jul-04	-	5,148,968.91	34,314.82
Dolar	01-ago-03	-	(7,061,200.48)	(11,934.78)
Pre	01-ago-03	-	1,510,587.52	2,554.43
Pre	01-jan-04	-	-	(2,982.43)
Pre	01-abr-04	-	(8,038,661.26)	(7,375.73)
Pre	01-jul-04	-	(3,400,276.15)	(29,112.23)
Vol	01-mar-04	2.90	(337,291.21)	(12,576.78)
Vol	01-mar-04	3.00	(337,291.21)	(10,888.71)
Vol	01-mai-04	2.90	(3,777,661.59)	15,994.99
Vol	01-mai-04	3.00	(3,777,661.59)	14,340.58

Gamma Dólar

Carteira Inicial		Carteira Final	
	12		12
12	(5,268,273.42)	12	23,221.57

Chapter 4

Conclusão

Esse trabalho teve seus objetivos atingidos com sucesso, pois conseguiu-se otimizar o hedge das operações de clientes com o uso do algoritmo genético. O trabalho foi a união de várias disciplinas contidas dentro do programa do mestrado profissionalizante: risco de mercado, cálculo estocástico, otimização e programação.

Durante a realização dos testes ficou evidenciado que a implementação de um algoritmo de otimização envolve um certo componente artístico, tanto na modelagem do problema, quanto na calibração do sistema.

O algoritmo genético mostrou-se muito poderoso em termos de flexibilidade de aplicação. Isso abre um leque de opções para futuros estudos, tais como alteração na função objetivo para incorporar penalidades como liquidez e custos operacionais, alteração na função objetivo para considerar um cálculo de risco estatístico, através do VaR ou simulação de Montecarlo. Através dos resultados observados percebe-se que a utilização de um modelo de risco por simulação de cenários reais, com análise de componentes principais, traria melhores resultados se utilizado em conjunto com penalidades de custo operacional, pois o algoritmo consegue achar combinações de carteiras, com posições muito vendidas e muito compradas em vencimentos adjacentes que produzem um hedge muito bom. Uma limitação do modelo implementado é a impossibilidade de proteger um risco de taxa de juros com uma série de futuro que não tenha o vencimento adjacente ao vencimento da operação

com cliente, justamente devido à ausência de uma análise de componentes principais da estrutura a termo de taxa de juros.

O sistema implementado também tem muito potencial a ser desenvolvido, como a aplicação para produtos adicionais e também o refinamento dos modelos de expansão Delta-Gamma, considerando alguns Gammas cruzados que nesse trabalho foram desprezados, tais como a derivada cruzada do preço em relação a volatilidade e ao dólar. Também podem ser refinados os critérios de interpolação tanto de curva quanto de superfície de volatilidade. Outro aspecto que deve ser melhor analisado é um estudo comparativo entre os diferentes métodos de otimização, usando por exemplo o "Simulated Annealing" ou o "Tabu Search".

A adição de diferentes fatores de risco combinada com uma análise estatística do risco poderia até mesmo fornecer uma ferramenta de hedge operações sem liquidez, utilizando ativos líquidos encontrados no mercado, mas cujas correlações com o ativo objeto não são óbvias. O sistema poderia também evoluir para uma ferramenta de cálculo de preços de derivativos.

Appendix A

Derivação da fórmula de Black-Scholes para opção de compra de dólar europeia

Nesse apêndice encontra-se a derivação da fórmula de Black-Scholes para o cálculo de uma opção de dólar europeia, adaptada de Hull (2000). O valor esperado do valor futuro do fluxo de caixa de uma opção de compra europeia é dado por:

$$FV_{CallBS}(t, T) = E[\max(S_T - X), 0]$$

$$E[\max(S_T - X), 0] = \int_X^{\infty} (S_T - X) g(S_T) dS_T$$

onde $g(S_T)$ é a distribuição lognormal de probabilidade da variável S_T .

Como o escopo desse trabalho são os derivativos cambiais no mercado brasileiro, consideramos S uma variável que segue o processo estocástico dado por $dS = (r - q) S dt + \sigma S dZ$, sendo r a taxa de juros livre de risco em reais e q a taxa de juros em dólar dada pelo cupom cambial. Aplicando o Lema de Itô para achar o processo de $\ln(S)$, temos:

$$d(\ln S) = \left(\frac{\partial(\ln S)}{\partial S} (r - q) S + \frac{\partial(\ln S)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\ln S)}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial(\ln S)}{\partial S} \sigma S dZ$$

$$d(\ln S) = \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dZ$$

Encontrado o processo de $\ln(S)$, podemos encontrar a distribuição de probabilidade de $\ln(S)$ no vencimento T da operação, isto é, a distribuição de $\ln(S_T)$:

$$\begin{aligned}\ln S_T - \ln S_0 &\sim \phi \left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma \sqrt{T - t} \right] \\ \ln S_T &\sim \phi \left[\ln S_0 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma \sqrt{T - t} \right] \\ \ln S_T &\sim \phi [m, s] \mid m = \ln S_0 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \mid s = \sigma \sqrt{T - t}\end{aligned}$$

A partir de $\ln(S_T)$ podemos definir uma nova variável V , com distribuição normal de média zero e variância 1 dada por

$$V = \frac{\ln(S_T) - m}{s}$$

Fazendo a mudança de variável na integral do valor esperado

$$\begin{aligned}S_T &= e^{sV+m} \\ FV_{CallBS}(t, T) &= \int_{\frac{\ln(X)-m}{s}}^{\infty} (e^{sV+m} - X) h(V) dV \\ FV_{CallBS}(t, T) &= \int_{\frac{\ln(X)-m}{s}}^{\infty} e^{sV+m} h(V) dV - \int_{\frac{\ln(X)-m}{s}}^{\infty} X h(V) dV\end{aligned}$$

Como $h(V)$ é a função Gaussiana com média zero e variância 1, podemos simplificar a primeira integral completando quadrados:

$$\begin{aligned}
 e^{sV+m}h(V) &= e^{sV+m} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{V^2}{2}} \\
 e^{sV+m}h(V) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{V^2+2sV+2m}{2}} \\
 e^{sV+m}h(V) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{V^2-2sV+s^2-2m-s^2}{2}} \\
 e^{sV+m}h(V) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(V-s)^2}{2} + \frac{2m+s^2}{2}} \\
 e^{sV+m}h(V) &= e^{\frac{2m+s^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(V-s)^2}{2}} \\
 e^{sV+m}h(V) &= e^{\frac{2m+s^2}{2}} h(V-s) \\
 FV_{CallBS}(t, T) &= e^{\frac{2m+s^2}{2}} \int_{\frac{\ln(X)-m}{s}}^{\infty} h(V-s) dV - X \int_{\frac{\ln(X)-m}{s}}^{\infty} h(V) dV
 \end{aligned}$$

Definindo como $N(x)$ a função densidade de probabilidade acumulada, isto é, a probabilidade da variável com distribuição normal de média zero e variância 1 assumir valor menor do que x , temos:

$$FV_{CallBS}(t, T) = e^{\frac{2m+s^2}{2}} \left(1 - N\left(\frac{\ln(X) - m}{s} - s\right) \right) - X \left(1 - N\left(\frac{\ln(X) - m}{s}\right) \right)$$

Substituindo o valor de m e s

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{2m+s^2}{2}} &= e^{\frac{2\left(\ln S_0 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right) + (\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}} \\
 e^{\frac{2m+s^2}{2}} &= e^{\ln S_0 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}} \\
 e^{\frac{2m+s^2}{2}} &= S_0 e^{(r-q)(T-t)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(1 - N\left(\frac{\ln(X) - m}{s} - s\right)\right) &= \left(1 - N\left(\frac{\ln(X) - \left(\ln S_0 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)\right)}{\sigma\sqrt{T - t}} - \sigma\sqrt{T - t}\right)\right) \\
 \left(1 - N\left(\frac{\ln(X) - m}{s} - s\right)\right) &= \left(1 - N\left(\frac{\ln\left(\frac{X}{S_0}\right) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) - \sigma^2(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)\right) \\
 \left(1 - N\left(\frac{\ln(X) - m}{s} - s\right)\right) &= \left(1 - N\left(\frac{\ln\left(\frac{X}{S_0}\right) - (r - q)(T - t) - \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)\right) \\
 \left(1 - N\left(\frac{\ln(X) - m}{s} - s\right)\right) &= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + (r - q)(T - t) + \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(1 - N\left(\frac{\ln(X) - m}{s}\right)\right) &= \left(1 - N\left(\frac{\ln(X) - \left(\ln S_0 + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)\right)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)\right) \\
 \left(1 - N\left(\frac{\ln(X) - m}{s}\right)\right) &= \left(1 - N\left(\frac{\ln\left(\frac{X}{S_0}\right) - \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)\right) \\
 \left(1 - N\left(\frac{\ln(X) - m}{s}\right)\right) &= \left(1 - N\left(\frac{\ln\left(\frac{X}{S_0}\right) - (r - q)(T - t) + \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)\right) \\
 \left(1 - N\left(\frac{\ln(X) - m}{s}\right)\right) &= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + (r - q)(T - t) - \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 FV_{CallBS}(t, T) &= S_0 e^{rT} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + (r - q)(T - t) + \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) \\
 &\quad - X N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + (r - q)(T - t) - \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}\right)
 \end{aligned}$$

Fazendo $d1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + (r - q)(T - t) + \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$, $d2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + (r - q)(T - t) - \frac{\sigma^2}{2}(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$ e considerando

r e q como função de t

$$FV_{CallBS}(t, T) = S_0 e^{\left(\int_t^T r(u) du - \int_t^T q(u) du\right)} N(d1) - X N(d2)$$

Calculado o valor futuro, chegamos ao valor presente:

$$\begin{aligned}
 PV_{CallBS}(t, T) &= \frac{FV_{CallBS}(t, T)}{df_{pre}(t, T)} \\
 PV_{CallBS}(t, T) &= \frac{S_0 e^{\left(\int_t^T r(u) du - \int_t^T q(u) du\right)} N(d1) - X N(d2)}{e^{\int_t^T r(u) du}} \\
 PV_{CallBS}(t, T) &= S_0 e^{-\int_t^T q(u) du} N(d1) - X e^{-\int_t^T r(u) du} N(d2)
 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões de fator de desconto temos:

$$\begin{aligned}
 PV_{CallBS}(t, T) &= \frac{S_0 N(d1)}{df_{cpm}(t, T)} - \frac{X N(d2)}{df_{pre}(t, T)} \\
 d1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \ln\left(\frac{df_{pre}(t, T)}{df_{cpm}(t, T)}\right) + \frac{\sigma^2}{2} (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \\
 d2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \ln\left(\frac{df_{pre}(t, T)}{df_{cpm}(t, T)}\right) - \frac{\sigma^2}{2} (T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}
 \end{aligned}$$

E assim, encontramos as fórmulas de Black-Scholes para calcular o valor presente de uma opção de compra de dólar europeia.

Chapter 5

Bibliografia

Luenberger, David G. (1984); "Linear and Nonlinear programming", Addison Wesley, 1-2, 11-288

Papadimitriou (1982), Christos H.; Steiglitz, Kenneth; "Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity", Prentice Hall, 6, 117-135

Birge, R. John; Louveaux, François (1997); "Introduction to Stochastic Programming", Springer, II, 83-128

Elton, E. J.; M.J.Gruber (1981): "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", John Wiley & Sons Inc, 2, 45-400

Copeland, Thomas E.; Weston, J. Fred (1983); "Financial Theory and Corporate Policy", Addison-Wesley, 1, 142-225

Hull, John C. (2000); "Options, Futures & Other Derivatives", Prentice Hall, 10-13, 218-341

Wilmott, Paul; Howison, Sam; Dewynne, Jeff (1995); "The Mathematics of Financial Derivatives", Cambridge, 4, 263-290

Jorion, Philippe (2001); "Financial Risk Manager Handbook 2001-2002", John Wiley & Sons Inc, 1-3, 89-430

Reuters; JP Morgan, "RiskMetrics™ - Technical Document", 1996, 3, 41-102

Goldberg, David E. (1989); "Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning"; Addison-Wesley, 2-5, 27-214

Chelouah, R.; Siarry, P. (2000); "A Continuous Genetic Algorithm Designed for the Global Optimization of Multimodal Functions", Journal of Heuristics, Kluwer Academic Publishers, 196-204

Chidambaran, N.K.; Lee, Chi-Wen Jevons; Trigueros, Joaquim R. (1998); "An Adaptive Evolutionary Approach to Option Pricing via Genetic Programming", artigo encontrado na internet.

Holland J. H. (1975); "Adaptation in natural and artificial systems", MIT Press

Avellaneda, Marco; Freidman Craig; Holmes, Richard; Samperi Dominick (1997); "Calibrating Volatility Surfaces Via Relative Entropy Minimization", artigo encontrado na internet.

Contratos dos produtos de derivativos financeiros da BM&F