

MAT230 - Geometria e Desenho Geométrico I - 2008

Prof. Francisco Rui¹

Instituto de Matemática e Estatística - USP

Lista Master

Postulado de Separação e convidados

Veja as notas de aula no endereço

<http://www.ime.usp.br/~gorodski/teaching/mat230-2007/bianconi.pdf>

Nas notas de aula, resolva os seguintes exercícios:

33 – 34	36 – 38	36 – 40
42 – 45	47 – 48	53
55 – 63	69	71 – 73
77 – 78	80 – 86	88 – 89

e mais,

Exercício 1 *São dados um triângulo $\triangle ABC$, e uma reta ℓ no mesmo plano. Mostre que se ℓ não contém um vértice do triângulo, então ℓ não pode intersectar os três lados.*

Exercício 2 *Mostre que se cada vértice de um quadrilátero pertence ao interior do ângulo oposto, então o quadrilátero é convexo.*

Exercício 3 *Mostre que todo quadrilátero possui um lado $\overline{XY}$ tal que os outros dois vértices pertencem a um mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{XY}$.*

Exercício 4 *Qual é a medida do ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca*

(a) *13 horas e 25 minutos?*

(b) *2 horas e 19 minutos?*

¹Todos os alunos estão, gentilmente, convidados a comparecer nas monitorias, caso tenham dificuldades em resolver os exercícios:

Monitor: **Arlane**, segunda-feira às 18h na sala B-09, arlane@ime.usp.br

(c) 13 horas e 42 minutos?

Exercício 5 Um ponto é chamado ponto interior de um polígono convexo se estiver na intersecção dos interiores dos ângulos do polígono. A união de um polígono convexo com o conjunto de seus pontos interiores é chamada de região poligonal convexa. Prove que uma região poligonal convexa é um conjunto convexo.

Exercício 6 Quantas diagonais possui um polígono de 3 lados? E de 5 lados? E de n lados?

Exercício 7 Mostre que para qualquer quadrilátero (convexo ou não), as retas contendo as diagonais sempre se intersectam.

Exercício 8 Prove que se duas retas, que se intersectam, formam um ângulo reto, então elas formam quatro ângulos retos.

Exercício 9 Seja $\square ABCD$ um quadrilátero onde todos os seus lados são congruentes. Mostre que este quadrilátero é convexo.

Exercício 10 Mostre LLA não implica em congruência. (Justifique a sua construção.)

Exercício 11 Dado o quadrilátero convexo $\square ABCD$ tal que $AB = CD = BC = DA$ e $AC = BD$ mostre que $\angle DAB \equiv \angle BCD \equiv \angle ABC \equiv \angle CDA$.

Exercício 12 Dados A e B dois pontos distintos e r, s duas retas perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{AB}$ com $A \in r$, $B \in s$. Mostre que $r \cap s = \emptyset$.

Exercício 13 Mostre que num triângulo isósceles, as três medianas se encontram num ponto.

Exercício 14 Mostre que se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os dois ângulos opostos não são congruentes. Mostre, ainda, que o maior dentre estes dois ângulos é oposto ao maior entre os dois lados.

Exercício 15 No $\triangle ABC$, $\angle C$ é um ângulo reto e M é um ponto da hipotenusa tal que $AM = CM$. Demonstre que M é equidistante de A , B e C .

Exercício 16 No triângulo $\triangle ABC$, $AC = BC$, D é um ponto de $\overleftrightarrow{BC}$ com $C - B - D$ e E é um ponto de $\overline{AB}$ com $A - E - B$ tal que $BD = BE$ e $\overleftrightarrow{DE}$ intersecta $\overline{AC}$ em F . Demonstre que $m(\angle CFE) = 3m(\angle D)$.

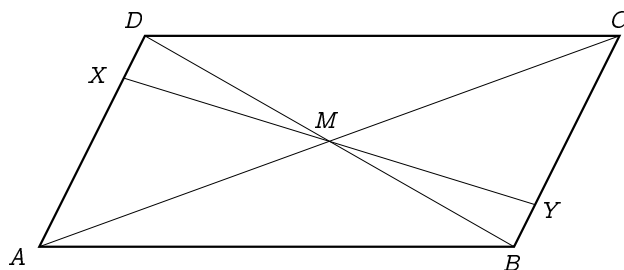
Exercício 17 No triângulo $\triangle PQR$, A e B são os pontos médios de $\overline{PQ}$ e $\overline{RQ}$, respectivamente. Se $RP = 16$, $m(\angle P) = 58$ e $m(\angle Q) = 38$, quanto valem AB e $m(\angle ABR)$?

Exercício 18 Mostre que se dois ângulos consecutivos de um trapézio são congruentes, mas não suplementares, então o trapézio é isósceles.

Exercício 19 Mostre que as diagonais de um retângulo são congruentes.

Exercício 20 Mostre que as diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos do losango.

Exercício 21 As diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do paralelogramo $\square ABCD$ se intersectam em M . Demonstre que se os pontos X e Y estão em lados opostos do paralelogramo, de tal forma que $\overline{XY}$ contém M , então M divide $\overline{XY}$ ao meio.



Exercício 22 Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles com $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e D um ponto tal que $D - B - C$. Mostre que $AD > AB$.

Exercício 23 Dados $A - B - C$ e $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AC}$, mostre que $AD > BD > CD$.

Exercício 24 Dados um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto D entre B e C , mostre que $AD < AB$ ou $AD < AC$. (Sugestão: Considere os casos $AB < AC$, $AB = AC$ e $AB > AC$.)

Exercício 25 Dados um triângulo equilátero $\triangle ABC$ e um ponto D entre B e C , mostre que $AD > BD$.

Exercício 26 Prove que cada lado de um triângulo tem medida menor que o seu semi-perímetro.

Exercício 27 Se O é um ponto pertencente ao interior do $\triangle ABC$, mostre que:

$$(a) \quad OA + OB < AC + BC \text{ e } m(\angle AOB) > m(\angle ACB).$$

$$(b) \quad OA + OB + OC < AB + BC + CA < 2(OA + OB + OC).$$

Exercício 28 Seja $\overline{AD}$ a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ do $\triangle ABC$. Mostre que:

(a) Os segmentos perpendiculares à $\overleftrightarrow{AD}$ por B e C são congruentes.

$$(b) \quad \frac{1}{2}(AB + AC - BC) < AD < \frac{1}{2}(AB + AC).$$

Exercício 29 Sendo M a soma dos comprimentos das três medianas de um triângulo e P o seu perímetro, mostre que

$$\frac{P}{2} < M < P.$$

(Sugestão: Utilize o item (b) do exercício anterior.)

O que podemos dizer a respeito da soma dos comprimentos das três alturas de um triângulo?

Exercício 30 Dado um triângulo $\triangle ABC$, sejam $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Demonstre que $|a - b| = c$.

Exercício 31 Num triângulo $\triangle ABC$ com $AB > AC$, sejam $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ e $\overline{AF}$ a mediana, a bissetriz e a altura, respectivamente, relativas ao lado $\overline{BC}$. Mostre que:

$$(a) \quad m(\angle ADB) > m(\angle ADC) \text{ e } m(\angle BAD) < m(\angle CAD).$$

$$(b) \quad CE < BE < AB.$$

$$(c) \quad CF < BF \text{ e } m(\angle BAF) > m(\angle CAF).$$

(d) D , E e F são tais que vale $D - E - F$.

Exercício 32 Dado um triângulo retângulo $\triangle ABC$ com hipotenusa $\overline{BC}$ e sendo $\overline{BD}$ a bissetriz relativa ao lado $\overline{AC}$, mostre que $DA < DC$.

Exercício 33 Dados dois triângulos retângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ com hipotenusas $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, respectivamente, mostre que se $AB < DE$ e $AC < DF$ então $BC < EF$.

Exercício 34 Num triângulo $\triangle ABC$ considere os pontos D e E tais que $A - B - D$, $A - C - E$ e $\overline{BD} \equiv \overline{CE}$. Mostre que $BC < DE$. Verifique ainda que $CD > BE$ se, e somente se, $AD > AE$.

Exercício 35 Dado um triângulo retângulo $\triangle ABC$ com hipotenusa $\overline{AB}$ e $m(\angle B) = 2 \cdot m(\angle A)$, mostre que $AB = 2 \cdot BC$. (Sugestão: Considere a bissetriz $\overline{BD}$ relativa ao lado $\overline{AC}$.)

Exercício 36 Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ são tais que $AC = AD$ com $C \in \text{int}\angle DAB$. Mostre que $BD > BC$.

Exercício 37 Sejam m_1 , m_2 e m_3 as mediatrizes dos três lados de um triângulo $\triangle ABC$. Mostre que se $D \in m_1 \cap m_2$ então $D \in m_3$ e, portanto, $m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{D\}$.

Exercício 38 Dado um triângulo $\triangle ABC$ e um ponto D entre A e B tal que $AD = BC$, demonstre que $AC > BD$.

Exercício 39 Mostre que a bissetriz do ângulo $\angle ABC$ é igual ao conjunto

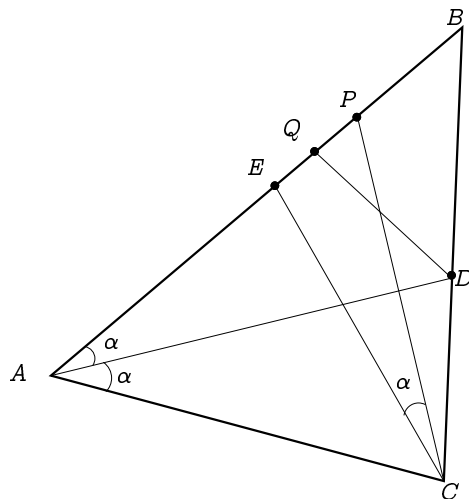
$$\{B\} \cup \{X \in \text{int}\angle ABC : \text{dist } X, \overleftrightarrow{BC} = \text{dist } X, \overleftrightarrow{BA}\}.$$

Exercício 40 Demonstre que duas bissetrizes de um triângulo se intersectam num ponto equidistante das retas que contém seus lados. Conclua que as três bissetrizes de um triângulo são concorrentes em um ponto, chamado incentro do triângulo.

Exercício 41 Sejam A e B dois pontos distintos do mesmo lado de uma reta r . Determine $P \in r$ de modo que $AP + PB$ seja o menor possível.

Exercício 42 Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos com $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$ e $\angle B \equiv \angle E$. Mostre que se $\angle C$ e $\angle F$ são ambos retos, ou ambos agudos, ou ambos obtusos então $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. A hipótese sobre $\angle E$ e $\angle F$ é essencial? O que acontece se um for agudo e o outro obtuso?

Exercício 43 Mostre que se duas bissetrizes de um triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles. (Sugestão: Na figura abaixo suponha, por absurdo, que $\overline{AD} \equiv \overline{CE}$ e $m(\angle A) < m(\angle C)$. Considere $\overline{AQ} \equiv \overline{CP}$ e relacione os ângulos $\angle AQD$ e $\angle CPE$.)



Exercício 44 Seja $\triangle ABC$ com $AC = AB$. Mostre que a bissetriz do ângulo $\angle BAC$ e as duas bissetrizes dos ângulos externos aos ângulos $\angle ABC$ e $\angle BCA$ se cortam em um ponto P . É possível afirmar que existe uma circunferência com centro em P e que tangencia as retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$?