

# MAT230 - Geometria e Desenho Geométrico I - 2008

Prof. Francisco Rui<sup>1</sup>

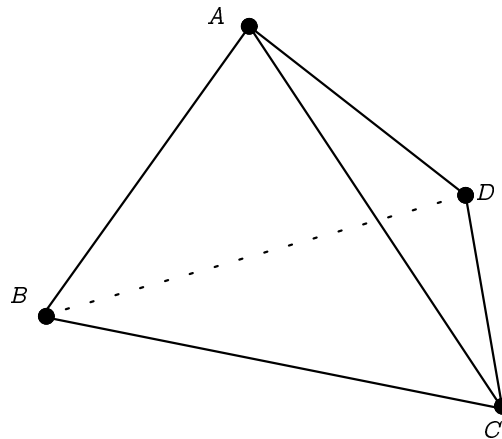
Instituto de Matemática e Estatística - USP

## Lista Olímpica

---

### Postulados de Incidência e consequências

0. Resolver os exercícios 1.1 até 1.7 das Notas de Aula, disponível no endereço  
[www.ime.usp.br/piccione/Downloads/geo-paolo.pdf](http://www.ime.usp.br/piccione/Downloads/geo-paolo.pdf),  
e estudar a seção 1.2 (Plano Projetivo).
1. Dados uma reta  $\ell$  e um ponto  $P \notin \ell$ , mostre que existe um único plano  $\pi$  tal que  $\ell \subset \pi$  e  $P \in \pi$ .
2. Considere o sistema  $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$ , onde  $S$  contém exatamente quatro pontos  $A, B, C$ , e  $D$ , as retas são os conjuntos com exatamente dois pontos, e os planos são os conjuntos com exatamente três pontos. Esse “espaço” está ilustrado na figura abaixo (figura ):



Nota.: Na tripla  $[S, \mathcal{L}, \mathcal{P}]$ , os elementos de  $S$ ,  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{P}$  são chamados pontos, retas e planos, respectivamente.

Verifique que esse sistema satisfaz todos os postulados de incidência.

---

<sup>1</sup>Monitor: Arlane, segunda-feira às 18h na sala B-09, [arlane@ime.usp.br](mailto:arlane@ime.usp.br)

3. Sejam  $P_1, P_2, \dots, P_5$  cinco pontos, dentre os quais não existem três pontos colineares. Quantas retas contém dois destes cinco pontos?
4. Se não existem quatro pontos coplanares, dentre cinco pontos dados, quantos planos contém três destes cinco pontos?
5. Dados  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , todos diferentes tais que não existem três deles colineares e quatro deles coplanares. Quantas retas contém dois destes pontos? Quantos planos contém três deles?
6. Mostre que, com os postulados de incidência  $S$  não pode ser uma reta.
7. Mostre que existem pelo menos dois planos.
8. O plano  $\pi$  da Geometria Analítica é o conjunto  $\mathbb{R}^2$  dos pares ordenados de números reais. As retas são dadas por:

$$\ell_{a,b,c} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\},$$

onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Mostre que esta é uma geometria de incidência.

9. Seja  $\mathbb{S}^2$  uma esfera e suponha que só podemos andar sobre ela (conforme figura 1). Então a distância entre dois pontos  $P$  e  $Q$  sobre a esfera é medida ao longo de um círculo máximo da esfera que passa por esses dois pontos. Um círculo máximo é uma circunferência sobre a esfera cujo centro é o centro da esfera. Sobre uma esfera de raio 13, determine a distância entre os pontos  $(0, 0, 13)$  e  $(3, 4, 12)$ . Deduza uma expressão para dois pontos genéricos.

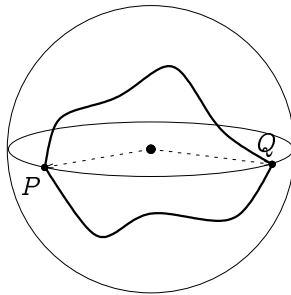


Figura 1:

10. Se  $A$  e  $B$  são pontos distintos e  $C \in \ell_{A,B}$  então  $\ell_{A,C} = \ell_{A,B}$ . A notação  $\ell_{P,Q}$  indica a linha que passa pelos pontos  $P$  e  $Q$ .
11. Se  $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$  é um conjunto de pontos sobre uma linha  $\ell$  então  $\ell = \ell_{A_i,A_j}$ , para todo  $i \neq j$  com  $i, j \in \mathbb{N}$ .
12. Se  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , onde  $n \geq 3$ , é uma sequência finita ou infinita de pontos, e quaisquer três pontos consecutivos  $A_i, A_{i+1}, A_{i+2}$ , onde  $i = 1, 2, \dots, n-2$  (e se for infinita,  $i = 1, 2, \dots, n-2, \dots$ ) são colineares, mostre todos desta sequência estão na mesma linha.
13. Mostre que se um ponto  $P$  não pertence ao plano  $\pi$  então nenhuma linha  $\ell \subset \pi$  contém este ponto.  
Obs.: Dizemos que uma linha  $\ell_1$  é *paralela* a uma linha  $\ell_2$ , se elas estão num mesmo plano e  $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ .
14. Mostre que se as linhas  $\ell_{A,B}$  e  $\ell_{C,D}$  são paralelas, então quaisquer três pontos dentre  $A, B, C$  e  $D$  não são colineares, e conclua que nenhum deles pertence à reta formada por dois outros pontos do conjunto  $\{A, B, C, D\}$ .
15. Dadas duas linhas paralelas, mostre que existe um único plano que as contém.
16. Se as linhas  $\ell_1, \ell_2$  e  $\ell_2, \ell_3$  são paralelas e os pontos  $A \in \ell_1, B \in \ell_2, C \in \ell_3$  são colineares, mostre que as linhas  $\ell_1, \ell_2$  e  $\ell_3$  estão num mesmo plano.  
Obs.: Considere duas linhas distintas  $\ell_1$  e  $\ell_2$ . Caso não exista um plano que as contenha, diremos que  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são linhas reversas.
17. Mostre que, se  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são linhas reversas então elas não são paralelas e  $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ .
18. Se quatro pontos distintos  $A, B, C$  e  $D$  não são coplanares, mostre que as linhas  $\ell_{A,B}$  e  $\ell_{C,D}$  são reversas.
19. Sejam  $\pi$  um plano e  $P$  um ponto, tal que  $P \notin \pi$ . Se  $\pi$  contém uma linha  $\ell$  e um ponto  $Q$  fora de  $\ell$ , mostre que as linhas  $\ell$  e  $\ell_{P,Q}$  são reversas.
20. Mostre que um plano contém pelo menos três pontos não colineares.