

MAT 121 - Complemento da 3ª Lista de Exercícios

1. Estude com relação a máximos e mínimos locais a função $f(x, y) =$

(a) $x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$

(b) $\sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$

2. Seja $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, onde a, b, c, d, e e l são constantes. Prove que se (x_0, y_0) for extremante local de f , então será extremante global.

(Sugestão: Observe que o gráfico $g(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$, (h e k constantes) é uma parábola.)

3. Estude com relação a extremantes globais a função $f(x, y) =$

(a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y$

(b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y$

4. *Método dos mínimos quadrados.* Dados n pares de números $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$, com $n \geq 3$, em geral não existirá uma função afim $f(x) = \alpha x + \beta$ cujo gráfico passe por todos os n pontos. Entretanto, podemos determinar f de modo que a soma dos quadrados dos erros $f(a_i) - b_i$ seja mínima. Pois bem, determine α e β para que a soma

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n [f(a_i) - b_i]^2$$

seja mínima.

5. Determine, pelo método dos mínimos quadrados, a reta que melhor se ajusta aos dados:

(a) $(1, 3), (2, 7), (3, 8)$

(b) $(0, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4)$

6. Considere as retas reversas r e s de equações $(x, y, z) = (0, 0, 2) + \lambda(1, 2, 0)$, $\lambda \in R$ e $(x, y, z) = (0, 0, 4) + \mu(1, 2, 0)$, $\mu \in R$, respectivamente. Determine P e Q , com $P \in r$ e $Q \in s$ de modo que a distância entre P e Q seja a menor possível.

7. Determinada empresa produz dois produtos cujas quantidades são indicadas por x e y . Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2 que dependem de x e y conforme as equações: $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$. Admitindo que toda produção da empresa seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.
8. Seja $f(x, y, z)$ de classe C^2 e seja (x_0, y_0, z_0) ponto interior de D_f . Suponha que (x_0, y_0, z_0) seja ponto crítico de f . Prove:
- (a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) \geq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) \geq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \geq 0$ é uma condição necessária para o ponto crítico (x_0, y_0, z_0) ser ponto de mínimo local de f .
- (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) \leq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, z_0) \leq 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_0, y_0, z_0) \leq 0$ é uma condição necessária para o ponto crítico (x_0, y_0, z_0) ser ponto de máximo local de f .
9. A função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 5x + 2y - z + 8$ admite extremante local? Por quê?
10. Seja $f(x, y)$ definida e de classe C^2 no aberto A de R^2 . Suponha que, para todo $(x, y) \in A$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > 0.$$

Prove que f não admite ponto de máximo local.