

MAT 121 - 2ª Lista de Exercícios

- Determine o domínio de F e esboce a sua imagem:

(a) $F(t) = (t^2, t^2)$

(b) $F(t) = (5 - t^2, \ln(5 - t^2), t)$

(c) $F(t) = (\frac{1}{t}, \sqrt[4]{2 - t^2}, 2)$

- Calcule as expressões de $F \wedge G$ e de $F.G$, onde $F(t) = (t, t^2, \sin(t))$ e $G(t) = (3, \cos(t), t^4)$

- Seja $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ contínua. Prove que existe $M > 0$ tal que $\|F(t)\| \leq M$, qualquer que seja o t em $[a, b]$.

- Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)$, onde $F(t) = (\frac{\tan(5t)}{4t}, \frac{e^{3t}-1}{t}, \frac{\sin(t)}{t})$

- Determine a equação da reta tangente à trajetória da função dada no ponto dado:

(a) $F(t) = (t^2 + 1, t^3)$ em $t = 1$;

(b) $F(t) = (t, t^2, t^3)$ em $t = 1$;

- Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ derivável até segunda ordem. Suponha $\|F'(t)\| \neq 0$ para todo t . Faça $T(t) = \frac{F'(t)}{\|F'(t)\|}$. Prove que:

(a) T e T' são ortogonais.

(b) $F''(t) = \|F'(t)\| T' + \frac{d}{dt}(\|F'(t)\|).T$

- Seja $F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivável em $t_0 \in I$ e seja $E(\Delta t)$ o erro que se comete na aproximação do acréscimo " $F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)$ " por " $F'(t_0)\Delta t$ ". Prove que $E(\Delta t)$ tende a $\vec{0}$ mais rapidamente do que Δt , quando Δt tende a zero, isto é, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E(\Delta t)}{\Delta t} = \vec{0}$. Prove, ainda, que para todo $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, com $\vec{a} \neq F'(t_0)$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)] - \vec{a}\Delta t}{\Delta t} \neq \vec{0}$.

- Suponha que $\vec{F}(t)$ é a força resultante que atua, no instante t , sobre uma partícula de massa m que se move no espaço.

Mostre que $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1$ onde $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1$ são respectivamente as velocidades da partícula nos instantes t_1 e t_2 .

9. Ache o comprimento de arco de cada uma das seguintes curvas:
- (a) $F(t) = (t, \ln(1 - t^2))$, $t = 0$ a $t = \frac{1}{2}$;
 - (b) $F(t) = (\frac{t^2}{4} - \frac{\ln(t)}{2}, t)$ de $t = 1$ a $t = 2$;
 - (c) $F(t) = (t, \ln(\operatorname{cosec}(t)))$, de $t = \frac{\pi}{6}$ a $t = \frac{\pi}{2}$.
10. Ache o comprimento da curva dada pela equação $3x^2 = y^3$ de $y = 1$ a $y = 20$.
11. Ache o comprimento da hipociclóide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
12. Ache o comprimento da espiral de Arquimedes $r = a\theta$, desde a origem até o fim da primeira revolução.
13. Um fio de telefone pendurado entre dois postes em $x = -b$ e $x = b$ tem o formato de uma catenária com equação $y = c + a \cosh(\frac{x}{a})$.
- (a) Faça o esboço dos postes com o fio entre eles.
 - (b) Calcule o comprimento do fio.
 - (c) Suponha que os dois postes estejam separados por uma distância de 5 metros e que o comprimento do fio entre os postes seja 5,1 metros. Se o ponto mais baixo do fio estiver a 2 metros do solo, a que altura o fio deve ser preso no poste?
14. As curvas com equações $x^n + y^n = 1$, $n=4,6,8,\dots$ são chamados de círculos gordos. Use o WINPLOT para obter o gráfico desses círculos. Monte uma integral para $n = 2k$ e, sem avaliar esta integral, calcule o limite quando k tende a infinito.
15. Reparametrize pelo comprimento de arco a curva $F(t)$ dada:
- (a) $F(t) = (2t + 1, 3t - 1)$, $t \geq 0$.
 - (b) $F(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$, $t \geq 0$.
 - (c) $F(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \geq 0$.
 - (d) $F(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$, $t \geq 0$.
16. Seja $A \subset [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto com infinitos pontos. Prove que A tem pelo menos um ponto de acumulação.

17. Prove que uma bola aberta é um conjunto aberto.

18. Calcule, caso exista.

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$

19. Calcule $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - 2xh - k}{\|(h,k)\|}$, onde $f(x,y) = x^2 + y$.

20. Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique sua resposta.

(a) $f(x,y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

21. Seja A um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ que goza da propriedade: quaisquer que sejam (x_0, y_0) e (x_1, y_1) em A , existe uma curva contínua $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ tal que $\gamma(a) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(b) = (x_1, y_1)$. Prove que se f for contínua em A e se $f(x_0, y_0) < m < f(x_1, y_1)$, então existirá $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ tal que $f(\bar{x}, \bar{y}) = m$.

Sugestão: Aplique o valor intermediário à função contínua $g(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$.

22. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto, uma função contínua e seja c um número real dado. Prove que o conjunto $\{(x, y) \in A \mid f(x, y) < c\}$ é aberto.

23. Seja $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

(a) Prove que existe $M > 0$; $|f(x, y)| < M, \forall (x, y)$ no retângulo.

(b) Prove que f assume um valor máximo e um valor mínimo no retângulo.

24. Determine as derivadas parciais.

(a) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

(b) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 3}$

(c) $z = \frac{x \operatorname{sen} y}{\cos(x^2 + y^2)}$

25. Considere a função $z = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$. Verifique que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

26. Sejam $z = e^{x^2 + y^2}$, $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \operatorname{sen} \theta$. Verifique que

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = e^{x^2 + y^2} (2x \cos \theta + 2y \operatorname{sen} \theta).$$

Conclua que $\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \operatorname{sen} \theta$.

27. Seja $f(x, y) = \int_0^{x^2 + y^2} e^{-t^2} dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

28. Seja $f(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2} dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

29. Seja $f(x, y) = x^3 y^2 - 6xy + \phi(y)$. Determine uma função ϕ de modo que $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1}$.

30. Determine uma função $f(x, y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 6y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1}$.

31. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$ e seja $\gamma(t) = (t, t, z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, uma curva cuja imagem está contida no gráfico de f .

(a) Determine $z(t)$.

(b) Esboce os gráficos de f e γ .

(c) Determine a reta tangente a γ no ponto $(1, 1, 2)$.

(d) Seja T a reta do item c.; mostre que T está contida no plano de equação $z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1)$.

32. Suponha que $z = f(x, y)$ admita derivadas parciais em (x_0, y_0) . Considere as curvas cujas imagens estão contidas no gráfico de f :

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \\ z = f(x_0, t) \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = y_0 \\ z = f(t, y_0) \end{cases}$$

Sejam T_1 e T_2 as retas tangentes a γ_1 e γ_2 nos pontos $\gamma_1(y_0)$ e $\gamma_2(x_0)$, respectivamente. Mostre que a equação do plano determinado pelas retas T_1 e T_2 é

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

33. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e suponha que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é constante.
34. Dê exemplo de uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in A$, mas que f não seja constante em A .
35. Determine o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável. Justifique.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

36. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado.
- (a) $f(x, y) = 2x^2$ em $(1, 1, f(1, 1))$.
- (b) $f(x, y) = 3x^3y - xy$ em $(1, -1, f(1, -1))$.
37. Determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.
38. Determine os planos tangentes ao gráfico de $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ e que contenham o eixo x .
39. Calcule a diferencial.
- (a) $z = x^3y^2$
- (b) $u = e^{s^2 - t^2}$
40. Calcule aproximadamente:
- (a) $(1, 01)^{2,03}$

(b) $\sqrt{(0, 01)^2 + (3, 02)^2 + (3, 97)^2}$

41. Calcule a diferencial.

(a) $w = xyz$

(b) $x = e^{2u+2v-t^2}$

(c) $w = \frac{x^2+y^2}{1+z^2}$

(d) $s = (1 + x^2)^{yz}$

42. Calcule $\nabla f(x, y)$ sendo $f(x, y) =$

(a) x^2y

(b) $\arctg \frac{x}{y}$

43. Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$, sendo $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

44. Seja $f(x, y) = xy$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t)), t \in I$, uma curva diferenciável cuja imagem está contida na curva de nível $f(x, y) = 2$. Mostre que para todo t em I , $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$. Dê exemplo de uma curva cuja imagem esteja contida na curva de nível $xy = 2$.

45. Considere a função $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva diferenciável qualquer, com imagem contida na superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$, e tal que $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

(a) Prove que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$.

(b) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível dada, no ponto (x_0, y_0, z_0) .

(c) Determine a equação do plano tangente à superfície de nível $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$, no ponto $(1, 1, 1)$.