MAT 121 - 1ª Lista de Exercícios

1. Faça o gráfico de $F(t) = \int_0^t f(x)dx$. Calcule F' nos pontos onde a derivada existe, para as seguintes funções:
   (a) $f(x) = 1$, se $x > 0$ e $f(x) = -1$, se $x \leq 0$
   (b) $f(x) = -x$, se $x > 0$ e $f(x) = 2$, se $x \leq 0$
   (c) $f(x) = x^2$, se $x \leq 1$ e $f(x) = 2x - 1$, se $x > 0$

2. Calcule F'(x), onde existir a derivada.
   (a) $\int_{2x}^{x} cost^2 dt$
   (b) $F(x) = \int_{\sqrt{x^2+1}}^{x^3} x^3 e^{t^2} dt$

3. Calcule $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3}dt$.

4. Sendo $xsen(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$, f contínua, calcule f(4).

5. A regra do ponto médio diz que:

$$\int_b^a f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(c_1) + f(c_2) + ... + f(c_n))$$

   onde $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ e $c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$.

   Use esta regra para calcular um valor aproximado de $\int_2^1 e^{x^2} dx$, tome:
   (a) $n = 5$.
   (b) $n = 10$.

6. A regra do trapézio diz que

$$\frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

   onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x$ é uma boa aproximação para $\int_a^b f(x)dx$ se n for suficientemente grande.
   (a) Explique o motivo dessa regra ser chamada de regra do trapézio.
   (b) Use a regra acima com n=10 para aproximar a $\int_0^{20} cos(\pi x)dx$. Compare seu resultado com o valor real. Explique a diferença.

7. Em uma corrida de 1500 metros, o corredor A tem velocidade maior do que o corredor B no intervalo de 0 a 60 segundos. Neste instante, o corredor B iguala sua velocidade à do corredor A. Qual a interpretação física para a área entre as curvas de velocidade dos corredores no primeiro minuto?

8. Uma mola tem 45 cm de comprimento e é preciso uma força de 50N para comprimí-la até 40 cm. Pela lei de Hook, a força é dada por $F(x) = kx$, onde k é uma constante. Calcule o valor da constante elástica dessa mola. Qual o valor do trabalho realizado ao comprimir a mola de 40cm para 30cm?

   Admitindo agora que $F(x) = k.sen(\frac{\pi x}{18})$, responda as duas perguntas anteriores.

9. Use a Lei de Newton da Gravitação Universal ($F = G\frac{M.m}{d^2}$)para calcular o trabalho necessário para lançar verticalmente um satélite de 1000kg a uma órbita de 1000 km de altura.

   Dados: massa da Terra=$5,98.10^{24}kg$, raio da Terra=$6,37.10^6m$ e $G = 6,67.10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}$.

10. Encontre o número a tal que a reta $x = a$ bissecta a área sob a curva $y = \frac{1}{x^2}$, com $1 \leq x \leq 4$.

11. Esboçe a curva de equação $y^2 = x^2(x + 3)$. Parte desta curva forma um laço. Determine a área dentro deste laço.

12. Encontre a área da região limitada pela parábola $y^2 = 9x$ e pela reta que passa pelos pontos $A = (16, 12)$ e $B = (4, -6)$.

13. Calcular a área limitada pelas curvas $y = \frac{sen2x}{2}$ e $y = senx + \frac{sen2x}{2}$ entre $x = 0$ e $x = \pi$.

14. Calcular a área limitada pela curva $y(x^2 + 4) = 4(2 - x)$, o eixo dos x e o eixo dos y.

15. Calcular a área limitada pela hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, o eixo dos x e uma reta traçada da origem ao ponto (x,y) da curva.

16. Calcular a área limitada pela circunferência $r = 3cos\theta$ e os raios vetores de ângulos polares $\theta = 0$ e $\theta = 60°$.

17. Calcular a área limitada pela parábola $r(1+cos\theta) = a$ e os raios vetores de de ângulos polares $\theta = 0$ e $\theta = 60°$.

18. A curva de equação $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ delimita uma região. Determine a área desta região.

19. Calcule a área da região delimitada pelas curvas:

    (a) $r = 2 - cos\theta$

    (b) $r = 2 - cos2\theta$

20. Calcule a área da região limitada pela curva $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$, eixo x, reta x=1 e reta x=4.

21. Calcule a área da região situada no primeiro quadrante limitada acima pela curva $x^4 - y^4 = 2xy$ e abaixo pela curva $r^2 = 2sen2\theta$, com $r > 0$.

22. Encontre a área da região limitada pela hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ e a reta $y = 5$.

23. A região sob a curva $y = cos^2x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, é rotacionada ao redor do eixo x. Calcule o volume do sólido obtido.

24. Achar o volume do cone de altura h e raio da base r, obtido pela rotação, em torno do eixo dos x, de uma reta que passa pela origem.

25. Encontre o volume do sólido obtido quando a região sob a curva $\frac{1}{(1+5x)^2}$ de 0 a 1 é girada ao redor do eixo y.

26. A região sob a curva $y = tg^2x$ de 0 a $\frac{\pi}{4}$ é girada ao redor do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

27. Achar os volumes dos sólidos obtidos pela rotação, em torno do eixo dos x, das regiões indicadas:

    (a) $y = \frac{4}{x+1}$, $x = -5$, $x = -2$, $y = 0$.

    (b) $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.

    (c) A elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$.

    (d) $y = logx$, entre $x = 1$ e $x = 2$.

    (e) $y = tgx$, $x = \frac{\pi}{3}$ e o eixo dos x.

28. Calcule a área da superfície gerada pela rotação em torno da reta $y = 5$ do gráfico da função:

    (a) $y = senhx$, $-1 \leq x \leq 1$;

    (b) $y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$

29. Use o Teorema de Pappus para calcular o volume do sólido obtido pela rotação do disco $x^2 + x + y^2 + y \leq 4$ em torno da reta $y = 3x + 10$.

30. Determine o centro de massa da região:

    (a) $R = \{(x, y) \in R^2 \; x^2 + 4y^2 \leq 1, \; y \geq 0\}$

    (b) $R = \{(x, y) \in R^2 \; x^2 \leq y \leq x\}$

31. Determine o centro de massa da região dada por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0ey \geq 0$.

32. Determine o centro de massa da região definida por $-1 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq (x + 1)^2$.

33. Determine se cada integral é convergente ou divergente. Avalie aquelas que são convergentes.

    (a) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2x-5} dx$

    (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(w-5)}} dw$

    (c) $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{(x+2)(x+3)} dx$

    (d) $\int_{1}^{\infty} \frac{lnx}{x^3} dx$

    (e) $\int_{0}^{1} \frac{lnx}{\sqrt{x}} dx$

34. Esboce a região e encontre sua área (se a área for finita).

    (a) $S = \{(x, y) \; 0 \leq x \leq \pi, \; 0 \leq y \leq tgxsecx\}$,

    (b) $S = \{(x, y) \; 3 \leq x \leq 7, \; 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x-3}}\}$.

35. Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral é convergente ou divergente.

    (a) $\int_{1}^{\infty} \frac{cos^2x}{1+x^2} dx$

(b) $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$

36. A integral $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$ é imprópria por duas razões: o intervalo $[0,\infty[$ é infinito, e o integrando tem uma descontinuidade infinita em 0. Avalie-a expressando-a como uma soma de integrais impróprias do Tipo 1 e do Tipo 2, como a seguir:
$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx.$

37. Encontre os valores de p para os quais a integral converge e avalie a integral para aqueles valores de p.
    (a) $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx,$
    (b) $\int_e^\infty \frac{1}{x(lnx)^p} dx.$

38. A velocidade média das moléculas em gás ideal é

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}} dv$$

onde M é o peso molecular do gás, R é a constante do gás, T é a temeratura do gás, v é a velocidade molécula. Mostre que $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$.

39. Determine o quão grande tem que ser o número a de tal modo que $\int_a^\infty \frac{1}{x^2+2} dx < 0,001$.

40. Se f(t) é contínua para $t \leq 0$, a Transformada de Laplace de f é a função F definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$$

e o domínio de F é o conjunto de todos os números s para os quais a integral converge. Calcule a Transformada de Laplace das seguintes funções:
    (a) $f(t) = e^t$
    (b) $f(t) = t$