PREFÁCIO

O objetivo destas notas é apresentar o conteúdo do programa da disciplina MAT419 - Geometria Projetiva e Desenho, que é oferecida aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IME-USP. Pretendemos, com isto, facilitar o aprendizado desta disciplina, uma vez que o material aqui apresentado está disperso em vários livros e artigos sobre Geometria Projetiva, Desenho e Arte. Desta forma, os alunos terão um livro texto e poderão melhor se organizar, tendo um roteiro mais simples e seguro. Boa parte do material aqui contido, pode ser encontrado nos seguintes livros:

1) Michael A. Penna e Richard R. Patterson - Projective Geometry and its Applications to Computer Graphics

2) C. R. Wylie Jr - Introduction to Projective Geometry

INTRODUÇÃO

Ao se buscar as origens da Geometria Projetiva, encontramos na arte e na pintura as motivações principais do aparecimento e do desenvolvimento desta ciência matemática. Assim, iniciamos estas notas com um resumo histórico de fatos fundamentais para a Geometria Projetiva. Neste enfoque, a perspectiva aparece fortemente como fundamento principal e por isto dedicamos grande parte de nosso tempo à perspectiva. Através da perspectiva e da reta de pontos de fuga, motivamos a definição de pontos ideais ou pontos no infinito. São estes pontos ideais que unidos aos pontos do plano euclidiano irão definir o plano projetivo. Apresentamos um modelo topológico do plano projetivo e mostramos que este modelo é simplesmente uma faixa de Möebius com um disco colado ao longo de seu bordo. Dedicamos uma parte ao desenho em perspectiva. Aqui é importante observar o papel fundamental dos pontos de fuga e do emprego de algumas técnicas de perspectiva para se obter profundidade no desenho. Tendo um sistema de perspectiva, que é formado por um plano objeto, um plano imagem e um centro de perspectiva, usamos a técnica do rebatimento para obter as perspectivas planas. É através dessa noção que definimos as transformações projetivas do plano. A restrição de uma transformação projetiva do plano a uma reta projetiva contida neste plano define uma transformação projetiva de reta em reta. Podemos então desenvolver toda parte clássica da Geometria Projetiva para retas. Enunciamos os Teoremas de Desargues, de Pappus e o Fundamental da Geometria Projetiva para Retas. Salientamos também a importância da Razão Cruzada para Geometria Projetiva e para o Desenho. Enunciamos também o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva para o plano projetivo. A segunda parte é dedicada ao estudo analítico da Geometria Projetiva. Definimos o plano projetivo Standard e o conjunto algébrico RP^2. Estabelecemos uma relação natural entre o plano projetivo Standard e o conjunto algébrico RP^2 que chamaremos de coordenadas homogêneas do plano projetivo. Estudamos as retas projetivas através de suas equações em coordenadas homogêneas e as transformações projetivas de retas em retas. Teoremas fundamentais da Geometria Projetiva enunciados na primeira parte são demonstrados de maneira analítica. Finalmente, dedicamos uma parte do nosso tempo para mostrar que todas as isometrias do plano euclidiano são restrições, ao plano euclidiano, de transformações projetivas do plano projetivo.

CAPÍTULO 1

A Arte, A Pintura e A Perspectiva

Este breve resumo histórico visa buscar as origens da Geometria Projetiva na arte e na pintura, colocando os pintores como seus contribuintes iniciais. Desta forma, uma ciência que foi inspirada na arte e criada por grandes gênios só poderia vir a ser uma verdadeira arte.

Na Idade Média, as pinturas eram, na sua maioria, planas e chapadas, sem conexão com o mundo real. Os temas tratados eram religiosos e simbólicos, como pode ser visto na obra abaixo.

Figura 1: *Curved Throne*

A partir do final do século XIII, os pintores começaram a tomar consciência deste problema e procuraram tornar as suas obras mais naturais e fieis à realidade.

Citamos aqui Duccio di Buoninsegna (1255-1319) e Giotto di Bondone (1267-1337), dois pintores em cujas pinturas já começa a aparecer a relação dos objetos pintados com o tridimensional, o que pode ser observado nas figuras 2 e 3.

Duccio e Giotto desenvolveram uma teoria intuitiva da perspectiva que influenciou outros pintores. Citamos como exemplo Pietro Lorenzetti (1300-1348), Paolo Ucello (1397-1475) e Filippo Bruneleschi(1379 -1476). Este

Figura 2: Duccio,The Annunciation

Figura 3: Giotto, L'ultima cena

último, por volta de 1425, desenvolveu um sistema de perspectiva que ele usava em suas pinturas e ensinava a outros pintores.

O primeiro texto sobre perspectiva, *De Pictura*, apareceu em 1435, escrito por Leon Battista Alberti(1404-1472). Seu trabalho foi aprimorado e estendido pelo pintor e matemático Piero della Francesca (1418 - 1492), autor de *De prospectiva pingendi*. Neste documento ele fez uma elaboração rigorosa da perspectiva, influenciando a cultura plástica ocidental, até o cubismo.

No auge da Renascença, Leonardo da Vinci (1452-1519) e Albrecht Dürer (1471-1528) escreveram tratados sobre perspectiva em que apresentavam a Teoria Matemática da Perspectiva e colocavam a sua importância para a pintura.

No século XVII, enquanto os artistas continuavam desenvolvendo o uso da perspectiva, Gerard Desargues e Blaise Pascal iniciaram um estudo sistemático da perspectiva e este estudo contribuiu significativamente para o desenvolvimento da Geometria Projetiva.

É importante também salientar que, durante este período, o astrônomo Johann Kepler fez várias contribuições à Geometria Projetiva, sendo atribuído a ele a invenção do Ponto Ideal.

No século XVIII, Gaspard Monge, motivado por aplicações à engenharia, escreveu um texto de introdução à Perspectiva e à Geometria Projetiva e posteriormente no século XIX, Jean Victor Poncelet iniciou um estudo sistemático desta geometria.

Figura 4: Lorenzetti, *Entrada de Jesucristo en Jerusalén*

Figura 5: Lorenzetti, *Un pannello della beata Umiltà*

Figura 6: Ucello, *Battle of San Romano*

Figura 7: Ucello, *Il miracolo dell'óstia profanata*

Figura 8: Brunelleschi, Basilica di San Lorenzo

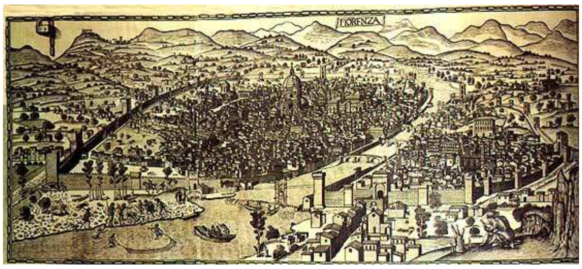


Figura 9: Brunelleschi, Fiorenza

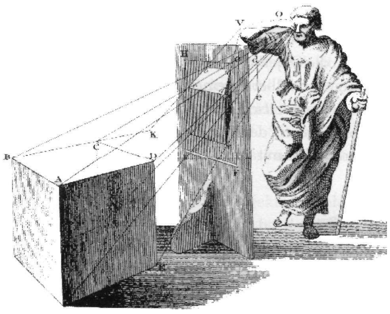


Figura 10: Alberti, O Prncípio da Perspectiva Central

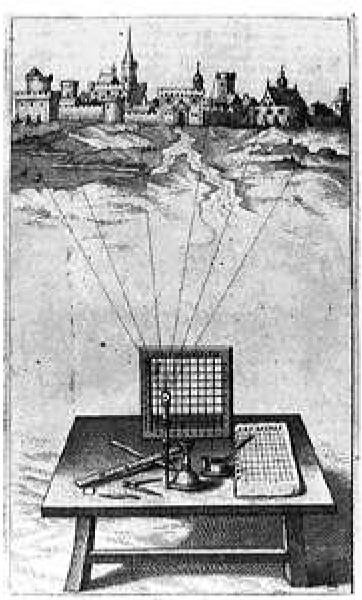


Figura 11: Alberti, Drawing Model

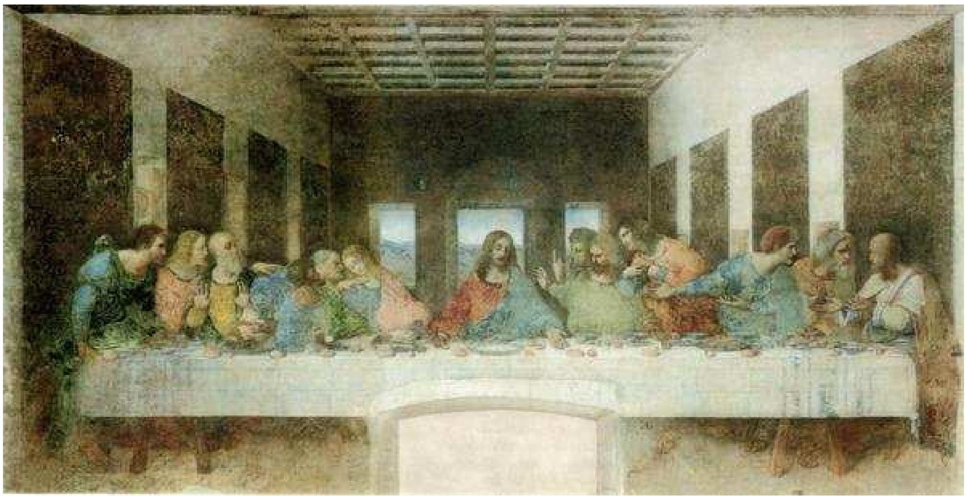


Figura 12: Da Vinci, *A Santa Ceia*

Figura 13: Dürer,*Perspectivador*

Algumas Pinturas Contemporâneas

As seguintes obras de Hogarth, Escher e Dali salientam a importância da perspectiva na pintura.

O quadro de Hogarth apresenta uma falsa perspectiva que pode ser observada em várias partes da obra. Veja por exemplo o homem em cima do morro que possui mesmo tamanho da senhora na janela, apesar de estar muito mais distante do observador.

Figura 14: Hogarth, *False Perspective*

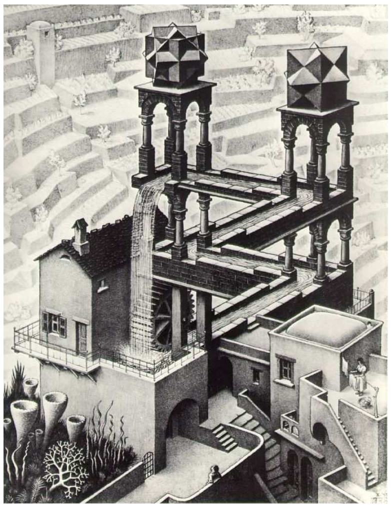


Figura 15: Escher, *The waterfall*

No quadro de Escher, uma faixa de Möebius inserida na pintura dá a falsa impressão de que a água sobe. Como veremos posteriormente, a faixa de Möebius é uma parte substancial do plano projetivo, que foi criado a partir da perspectiva com seus pontos de fuga associados aos pontos ideais.

O quadro de Salvador Dalí (Figura 16) foi escolhido por sua incrível beleza realçada pela perspectiva e pela simetria empregadas de forma genial. É interessante observar que, neste quadro, Cristo é apresentado como um espírito.

Exercícios:

1. No resumo histórico apresentado, foram citados alguns pintores que foram importantes no desenvolvimento da perspectiva e, como conseqüência, no desenvolvimento da Geometria Projetiva. Faça uma

Figura 16: Dalí, *O Último Sacramento*

pesquisa para incluir outros nomes que na sua opinião deveriam constar neste resumo. Justifique as possíveis inclusões.

2. Faça uma pesquisa sobre o arquiteto francês Girard Desargues (1591-1661) e suas contribuições à Geometria Projetiva. Faça o mesmo sobre J.V. Poncelet (1788-1867).

CAPÍTULO 2

Introdução à Geometria Projetiva

Existem, tradicionalmente, duas maneiras distintas de se abordar a Geometria Projetiva. A primeira é tomar a geometria euclidiana como base, utilizar e estender seus conceitos para se chegar à Geometria Projetiva. A segunda é a sintética, onde simplesmente colocamos todos os axiomas que regem esta geometria. A maneira que nos parece mais simples e mais adequada à nossa proposta de ligar a Geometria Projetiva a Arte e a Pintura é a primeira e, com a finalidade de motivar este estudo, damos algumas definições informais: a geometria dos objetos reais é a geometria euclidiana; a geometria projetiva estende esta geometria e passa a estudar também a forma de como estes objetos são vistos.

Uma questão natural é "qual a relação que existe entre um objeto que vemos (i.é. sua imagem) e o objeto real ? Vemos um objeto exatamente como ele é ?". Alguns exemplos simples respondem a estas questões. Apesar da geometria euclidiana afirmar que dois trilhos de trem são paralelos, não é assim que eles se apresentam na nossa visão. O tampo de uma mesa, apesar de retangular, pode ser visto como um trapézio ou um outro quadrilátero qualquer. O canto de uma sala é formado na realidade por três ângulos retos e sua soma é 270°. O que vemos, no entanto, é um ponto planar cuja soma de ângulos é 360°. A imagem de uma circunferência projetada sobre um plano que não esteja paralelo ao plano da circunferência pode resultar numa elipse, numa parábola ou mesmo numa hipérbole.

Assim, comprimento, ângulo, paralelismo e forma podem ser destorcidos quando olhamos um objeto. Para melhor entender esses fatos, vamos iniciar o estudo da perspectiva, aquela usada na pintura. Na prática, usamos um vidro plano e transparente que servirá como o plano imagem. Fixamos este vidro de modo que ele fique na posição vertical e ao alcance da mão. Tomamos um pincel atômico e transferimos para o vidro plano a imagem de um objeto que está sendo visto por nosso olho que é, neste caso, o centro da perspectiva.

Elementos de Perspectiva

O modelo de perspectiva que vamos usar consiste de dois planos perpendiculares entre si e de um ponto O que não pertence a nenhum dos dois planos. O plano horizontal será chamado de plano do objeto e notado por

π_0 (este plano é também denominado plano geometral ou plano de terra). O plano vertical será chamado plano imagem e é notado por π_i (este plano recebe também o nome de quadro) e o ponto O é chamado de centro da perspectiva ou de olho.

Alguns elementos da perspectiva que merecem destaque são os seguintes:

- A reta $\pi_0 \cap \pi_i$ é chamada de linha de terra e é notada por L.T.
- A reta que une o centro da perspectiva O a qualquer ponto P de π_0 é chamada de linha de projeção (ou linha de vista). Esta linha intersecta o plano π_i em um ponto P' que é imagem do ponto P.
- Traçando por O um plano paralelo a π_0 e fazendo a interseção deste plano com plano π_i , determinamos a reta *f*. Esta reta é chamada de linha de fuga (ou linha do horizonte). Ela é formada por pontos do plano imagem, mas que não são imagens de nenhum ponto do plano objeto.
- Traçando por O uma reta perpendicular à reta *f*, obtemos um ponto F_p na reta *f* que é chamado de ponto de fuga principal.
- Traçando por O um plano paralelo a π_i determinamos uma reta v, interseção deste plano com o plano π_0 . A reta v é a reta dos pontos do plano objeto que não têm imagem no plano π_i . Esta reta terá um papel muito importante no estudo posterior de perspectiva plana.

Para determinar a imagem de uma reta r situada no plano objeto, procedemos da seguinte maneira: traçamos por O uma reta s paralela à reta r. Estas duas retas definem um plano. A interseção deste plano com o plano π_i será a imagem da reta r no plano π_i . Observe que se a reta s não for paralela a π_i, ela intersecta π_i em um ponto de fuga F e este é o ponto de fuga da reta r . Tomando outra reta t paralela à reta r, temos novamente que a reta que passa em O e é paralela à t é a própria reta s. Desta forma, r e t terão o mesmo ponto de fuga. No caso em que r e t são retas perpendiculares ao plano π_i , o seu ponto de fuga é o ponto de fuga principal F_p. Desta forma vale o seguinte resultado:

As retas de uma família qualquer de retas paralelas do plano objeto terão como imagem uma família de retas no plano imagem

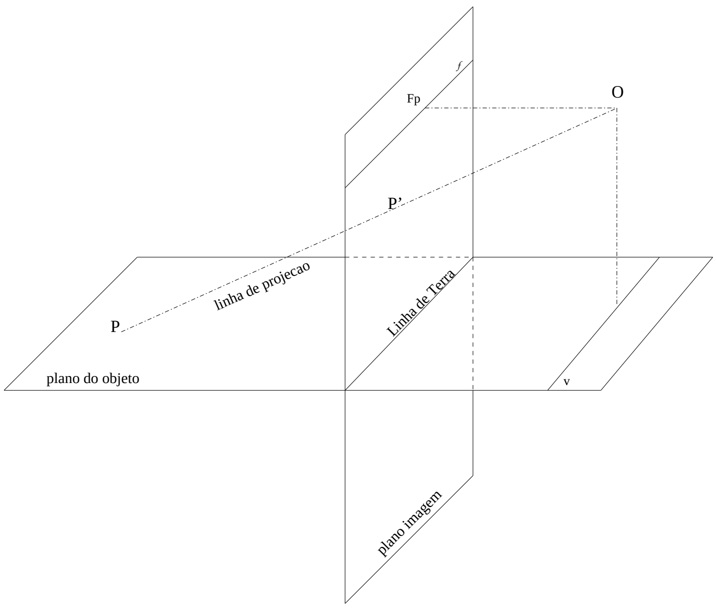


Figura 17: Elementos de perspectiva

com um único ponto de fuga. Além disto, se esta família de retas é formada por retas perpendiculares ao plano imagem, o ponto de fuga é o ponto de fuga principal.

Exemplos interessantes de sistemas de perspectiva são obtidos considerando o espaço euclidiano com coordenadas (x,y,z). Lembramos que dados dois pontos do espaço euclidiano $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, a equação da reta que passa pelos pontos P_0 e P_1 é

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Exemplo: Vamos considerar o plano objeto, π_0 , como sendo o plano $z = 0$, o plano imagem, π_i ,como sendo o plano $y = 0$ e o centro da perspectiva é o ponto O = (0,2,3), veja figura 19. Desta forma, a linha de terra é o eixo dos x, a linha de fuga f é a reta $y = 0, z = 3$. O ponto de fuga principal é o ponto $F_p = (0, 0, 3)$. A reta dos pontos do plano objeto que não têm imagem é a reta $y = 2, z = 0$. Finalmente, notando as coordenadas de um ponto P do plano objeto por $P = (X, Y, 0)$, obtemos a equação da linha de projeção

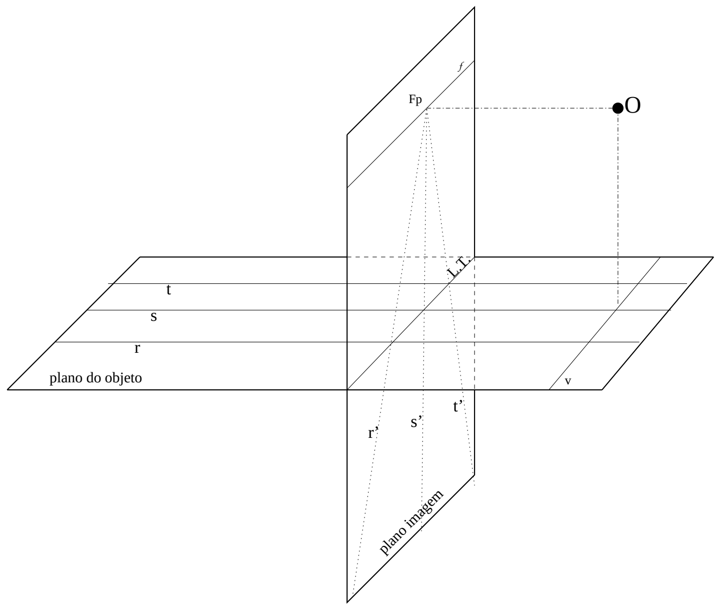


Figura 18:

$\overleftrightarrow{OP}$ como sendo:

$$\frac{x-0}{X-0} = \frac{y-2}{Y-2} = \frac{z-3}{0-3}$$

Para determinar as coordenadas do ponto imagem P', basta encontrar o ponto de interseção da linha de projeção, $\overleftrightarrow{OP}$ com o plano π_i . Para fazer isto notamos as coordenadas dos pontos que pertencem a π_i por (X',0,Z'). Fazendo y = 0 na equação da linha de projeção $\overleftrightarrow{OP}$, obtemos $X' = \frac{-2X}{Y-2}$ e $Z' = \frac{3Y}{Y-2}$, ou seja, $P' = (\frac{-2X}{Y-2}, 0, \frac{3Y}{Y-2})$ é o ponto imagem do ponto objeto P=(X,Y,0). Como foi afirmado anteriormente, a reta dos pontos objetos que não têm imagem é a reta de equação Y=2, o que é confirmado pelas coordenadas de P', que não aceita pontos objetos com coordenadas (X,2,0).

Note que cada reta de equação Y=k tem como imagem a reta de equação $Z' = \frac{3k}{k-2}$, formando uma família de retas paralelas à linha de terra.

Para obter a imagem de uma reta ou de curvas definidas por equações no plano objeto, é importante obter X e Y em função de X' e de Z'. Desta forma, usando as equações $X' = \frac{-2X}{Y-2}$ e $Z' = \frac{3Y}{Y-2}$, obtemos que $X = \frac{-3X'}{Z'-3}$, $Y = \frac{2Z'}{Z'-3}$.

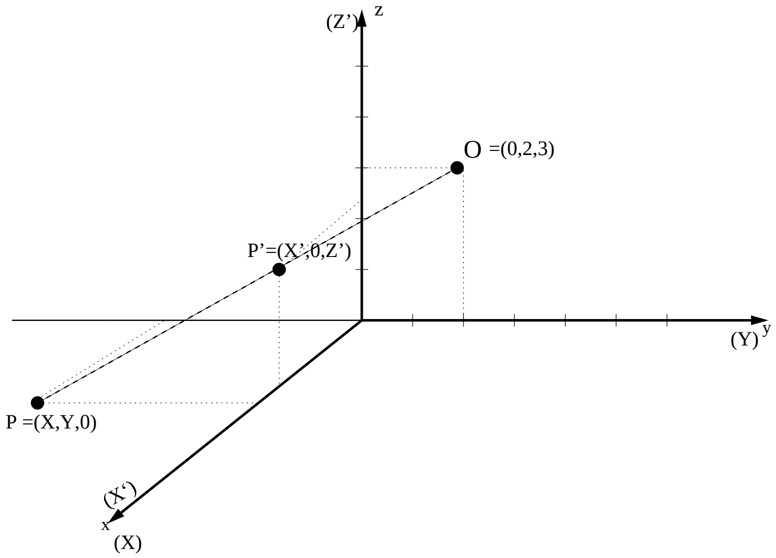


Figura 19:

Assim, cada reta X=k tem como imagem a reta de equação $3X' + kZ' = 3k$. É fácil ver que independente do k escolhido, o ponto de fuga principal (0,0,3) satisfaz a equação $3X' + kZ' = 3k$.

Vamos analisar o que acontece nessa perspectiva com a reta $X = 0$ (que corresponde a fazer k=0). Pelo que vimos anteriormente, sua imagem tem equação X'=0. Esta reta contém o ponto de coordenada (0,2,0), que é um ponto do plano objeto que não tem imagem. Os pontos que têm imagem estão contidos em duas semi-retas determinadas por (0,2,0). A semi-reta dos pontos com $Y > 2$ é projetada na semi-reta X'=0, $Z' > 3$ e a semi-reta dos pontos com $Y < 2$ é projetada na semi-reta X'=0, $Z' < 3$. Além disto, se $Y \longrightarrow \infty$, temos que $Z' \longrightarrow 3$ (com $Z' > 3$) e, também, $Y \longrightarrow -\infty$ temos que $Z' \longrightarrow 3$ (com $Z' < 3$).

Desta forma, imaginar, para uma reta qualquer no plano, que suas duas pontas se afastam indefinidamente, não corresponde à realidade. De fato, no nosso exemplo, as imagens das duas pontas de cada uma das semi-retas da reta X = 0 definidas por (0,2,0), se aproximam indefinidamente do ponto de fuga principal. Desta forma é mais real supor que as duas pontas da reta se aproximam (de um ponto no infinito?). Além disto, fazendo a mesma análise para a reta X=1, teremos que suas duas pontas se fecham no mesmo ponto que a reta X=0. Observando as imagens destas duas retas vemos que, apesar da reta objeto X=1 estar contida em apenas um dos semi-planos determinados pela reta X=0, a sua imagem (de equação 3X'+Z'=3) aparece contida nos dois semi-planos determinados pela reta imagem X'=0 (reta imagem da reta X=0) e isto sugere que a imagem da faixa do plano objeto determinada pelas retas X=0 e X=1 teve uma de suas pontas girada em 180° e depois colada na outra ponta, exatamente no ponto (do infinito ?), que deveria corresponder ao ponto de fuga principal.

Voltando ao sistema geral de perspectiva, observamos que a reta v divide π_0 em dois semi-planos, $(\pi_0)_1$ e $(\pi_0)_2$ e também a reta f divide o plano o plano π_i em dois semi-planos, $(\pi_i)_1$ e $(\pi_i)_2$ de tal forma que a perspectiva estabelece uma bijeção entre $(\pi_0)_1$ e $(\pi_i)_1$ e outra bijeção entre $(\pi_0)_2$ e $(\pi_i)_2$. Os pontos da reta v e também os pontos da reta f ficam sem correspondentes euclidianos nesta perspectiva.

Para sanar este problema, completamos cada um dos planos objeto e imagem com uma reta de pontos ideais. A reta de pontos ideais do plano objeto ficará em correspondência biunívoca com os pontos da reta f completada com seu ponto ideal e a reta de pontos ideais do plano imagem ficará em correspondência biunívoca com os pontos da reta v completada com seu ponto ideal.

Vale a pena enfatizar que ao se adicionar um ponto ideal, uma reta e todas as outras que, no plano euclidiano, eram paralelas a esta reta, passaram a ter este ponto ideal como ponto comum e portanto deixaram de ser paralelas. Ao se adicionar a reta de pontos ideais ao plano euclidiano, sempre que forem dadas duas retas elas terão um ponto em comum.

Para melhor entender o que foi dito acima, vamos contrair o plano euclidiano a um disco centrado na origem e de raio 1. Para isto, usamos a aplicação:

$$f : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2,$$

definida por:

$$f(x, y) = (\frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}})$$

Exercício Resolvido: Na figura 20, verifique que a imagem da reta $x = 1$, por f, é a parábola $Y^2 = 1 - 2X$, com $-1 < Y < 1$.

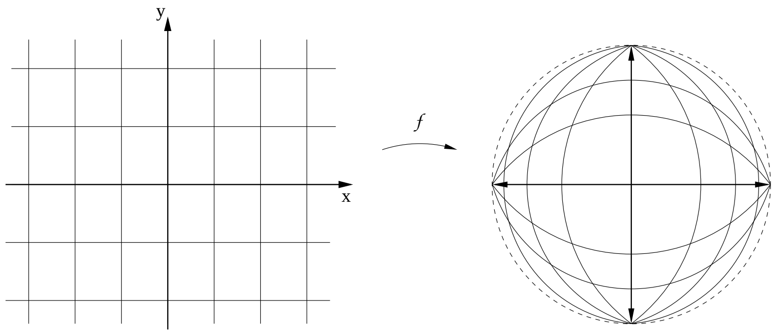
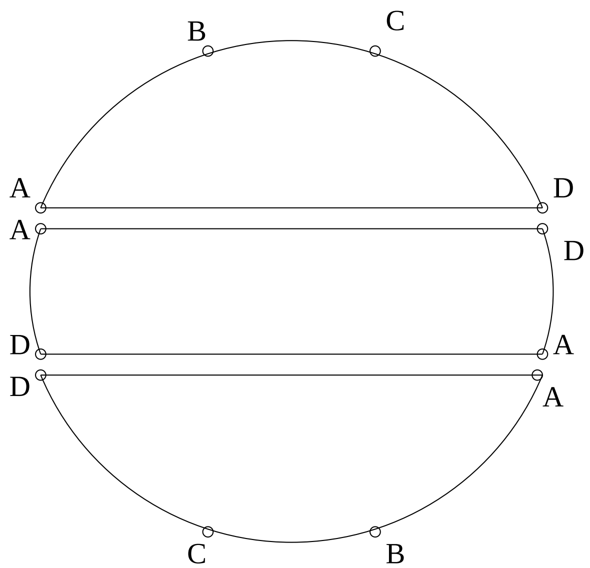


Figura 20:

Solução: Substituindo na equação anterior x=1, temos: $f(1,y) = (\frac{1}{1+\sqrt{1+y^2}}, \frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}})$. Portanto, $X = \frac{1}{1+\sqrt{1+y^2}}$ e $Y = \frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}}$. Desta forma, $Y = yX \Longrightarrow Y^2 = y^2X^2$ e, por fim, $y^2 = \frac{1-2X}{X^2} \Longrightarrow Y^2 = 1 - 2X$.

Usando a fórmula polar de f, ou seja, $f(r,\theta) = (\frac{r}{1+r}, \theta)$ mostramos facilmente que f é injetora, e, desta forma, f transforma o plano euclidiano $I\!R^2$ no disco aberto de centro na origem e raio 1. Observamos que quando um ponto (x,y) do plano $I\!R^2$ tem uma ou ambas coordenadas tendendo ao infinito, seu ponto imagem tende para o bordo do disco. As retas paralelas ao eixo y tem como imagem no disco curvas que apontam para os pontos de coordenadas (0,1) e (0,-1). As retas paralelas ao eixo x têm como imagem curvas que apontam para os pontos de coordenada (1,0) e (-1,0). Este fato se repete para toda família de retas paralelas, que apontarão para dois pontos antípodas do disco de raio 1. De acordo com o que foi mostrado no modelo de perspectiva onde o plano objeto tinha sua imagem refletida no plano imagem, as duas pontas de uma reta têm sua imagem, no plano imagem, se aproximando do ponto de fuga. Desta forma, para se ter uma boa descrição do plano projetivo, devemos acrescentar ao disco aberto, de centro na origem e raio 1, a circunferência de raio 1 e identificar os seus pontos antípodas. Lembramos aqui que o plano projetivo foi definido como o plano euclidiano completado com uma reta de pontos ideais. Pelo que foi feito acima, o plano euclidiano está em correspondência biunívoca com o disco aberto centrado em (0,0) e de raio 1. Assim, a circunferência de raio 1 e centro em (0,0), com seus pontos antípodas identificados, estará em correspondência biunívoca com os pontos ideais do plano projetivo. Este será um modelo topológico do plano projetivo.

Como se pode observar na figura abaixo, o disco fechado está separado em tres partes. A parte central é uma faixa, que ao ter seus pontos antípodas identificados, resultará numa faixa de Möebius. As outras duas partes, ao ter seus pontos antípodas identificados, resultará em um disco. Lembrando que o disco foi inicialmente separado em tres partes, devemos agora fazer a colagem dos pontos separados e ao fazer esta colagem estaremos colando o bordo da faixa de Möebius ao bordo do disco, obtendo assim o modelo topológico do plano projetivo, como descrito anteriormente.



Exercicios :

1. Qual é a diferença entre ponto ideal e ponto de fuga?

2. A imagem de uma reta por uma perspectiva é sempre uma reta. A imagem de um segmento por uma perspectiva é sempre um segmento? A imagem de um triângulo por uma perspectiva é sempre um triângulo? A imagem de uma circunferência por uma perspectiva é sempre uma circunferência?

3. Em uma perspectiva, um ponto objeto P está entre os pontos objetos Q e R. É verdade que o ponto imagem P' está entre os pontos imagem Q' e R'?

4. Dado um par de retas concorrentes no ponto objeto P, formando um ângulo de trinta graus, é possível construir uma perspectiva que tem como imagem um par de retas perpendiculares? E que tem como imagem um par de retas paralelas?

5. Um sistema de perspectiva tem como plano objeto, o plano z=0 e como plano imagem o plano y=0. Determine um dos possíveis centros da perspectiva que transforma o triângulo de vértices A = (2,3,0), B = (-2,3,0) e C = (5,4,0) em um triângulo A'B'C':

   a) retângulo em A'

   b) retângulo em C'

6. Considere o sistema de perspectiva que tem como plano objeto, o plano z=0, como plano imagem x=0 e tem como centro da perspectiva o ponto O = (1,1,1).

   a) Determine a imagem do ponto P = (2,3,0).

   b) Determine as imagens das retas de equações X = Y e X = Y+1.

   c) Dada a circunferência de equação $(X-1)^2+(Y-1)^2 = 4$, determine a sua imagem.

7. Considerando o sistema de perspectiva dado no exercício 6, prove que dados quatro pontos objetos colineares, P_1, P_2, P_3, P_4 e suas imagens P_1', P_2', P_3', P_4', vale a seguinte relação:

$$\frac{(P_1P_3)(P_2P_4)}{(P_1P_4)(P_2P_3)} = \frac{(P_1'P_3')(P_2'P_4')}{(P_1'P_4')(P_2'P_3')}$$

teste este resultado para o caso particular, $P_1 = (0.1.0), P_2 = (-1, 2, 0), P_3 = (-3, 4, 0) e P_4 = (-7, 8, 0)$. A razão acima é chamada de razão cruzada e tem um papel fundamental na Geometria Projetiva e no desenho.

8. Vimos que a aplicação:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

definida por:

$$f(x, y) = (\frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}})$$

leva o plano euclidiano dentro do disco de raio 1. Prove que a reta de equação $x = 1$ é transformada na parábola de equação $Y^2 = 1 - 2X$ sendo $X = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$ e $Y = \frac{y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$). O que acontece com as outras retas de equações $x = c$, $c \neq 1$?

9. **O Espaço Projetivo**: Para definir o espaço projetivo procedemos de maneira análoga ao que foi feito para definir o plano projetivo: Tomamos inicialmente o espaço euclidiano e adicionamos a cada família de retas paralelas o seu ponto ideal. Ao fazer isto, juntamos ao espaço euclidiano um plano de pontos ideais, que notaremos por π. Representando o espaço euclidiano por $\mathbb{R}^3$ temos que o espaço projetivo é $\mathbb{R}^3 \cup \pi$. Para se ter o modelo topológico do espaço projetivo tomamos a bola aberta de raio 1 e centrada na origem, $B_1(0)$ e definimos a aplicação

$$f : \mathbb{R}^3 \to B_1(0)$$

definida por:

$$f(x, y, z) = (\frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}})$$

Prove que f transforma $\mathbb{R}^3$ em $B_1(0)$ de maneira biunívoca. Se uma ou mais coordenadas de um ponto (x,y,z) tende a infinito, então sua imagem tende ao bordo da bola de raio 1. Além disto se (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) são pontos contidos em retas paralelas e uma ou mais coordenadas desses pontos tende a infinito, suas imagens tendem ou ao mesmo ponto ou a pontos antípodas. Acrescentando a $B_1(0)$ a esfera de raio 1 e identificando os pontos antípodas obtemos o espaço projetivo. Observamos que, neste caso, a esfera bidimensional de raio 1 com seus pontos antípodas identificados representa o plano de pontos ideais π.

O Desenho em Perspectiva

Para se obter um desenho em perspectiva usamos o plano imagem (ou o quadro). Aqui é importante observar o papel fundamental dos pontos de fuga e da reta de fuga. Em geral, muitas técnicas do desenho em perspectiva são simples conseqüência do fato de todas as retas paralelas a uma reta escolhida terem o mesmo ponto de fuga que a reta escolhida. Na escolha dos pontos de fuga e de sua localização, o desenhista obterá a profundidade e o efeito que ele deseja para o seu desenho. Definindo um único ponto de fuga, ele terá uma perspectiva chamada de perspectiva frontal. Escolhendo dois pontos de fuga, o desenho estará em perspectiva oblíqua. Se o desenho tiver três pontos de fuga não colineares, a perspectiva é dita aérea. Observamos que, na perspectiva aérea, apesar do quadro ser único, existem pelo menos dois planos objeto ou seja pelo menos duas perspectivas, como descritas no início deste capítulo. Um exemplo interessante é fazer o desenho de um cubo com tres faces visíveis. Neste caso, teremos um único quadro e tres planos objeto, cada um contendo uma face do cubo. Assim, o desenho de um cubo em perspectiva é feito pela combinação de tres perspectivas. Cada uma tem o mesmo plano imagem e o mesmo centro, mas os planos objetos serão os planos que contêm as faces do cubo. Cada plano do objeto determina uma linha de fuga no plano imagem e as tres perspectivas devem ser consistentes no sentido que, se um lado é comum a duas faces visíveis , então os pontos de fuga correspondentes são os mesmos.

Exercicios :

1. Encontre em revistas ou em jornais, fotografias ou desenhos que ilustrem as distorções do objeto pela perspectiva. Use uma régua para localizar os possíveis pontos de fuga.

2. Desenhe, em perspectiva frontal, dois trilhos de trem com quatro dormentes.

Sugestão: Trace a linha de fuga e escolha um ponto de fuga. Trace o primeiro dormente como um segmento paralelo à linha de fuga e depois ligue os pontos finais do segmento ao ponto de fuga escolhido. Você ainda tem a liberdade de escolher o segundo dormente. Tendo o segundo, trace uma das diagonais e obtenha o ponto de fuga, que é o ponto de interseção desta diagonal com a reta de fuga. Este é o ponto de fuga de todas as diagonais. Trace uma nova diagonal passando neste ponto de fuga e no outro extremo do segundo dormente. O terceiro trilho é obtido traçando o segmento paralelo ao segundo e que passa no ponto de interseção do trilho com esta nova diagonal. Para encontrar os próximos dormentes, proceda da mesma maneira.

3. Desenhe, em perspectiva oblíqua, dois trilhos de trem com quatro dormentes.

   Sugestão: Trace a linha de fuga e escolha dois pontos de fuga. O primeiro será o ponto de fuga dos trilhos e o segundo, o ponto de fuga dos dormentes. Continue como no exercicio 2.

4. Um desenhista usa a seguinte técnica para desenhar um quadrado em perspectiva frontal: Traça a L.H. e toma um ponto F desta reta como ponto de fuga principal.Traça um segmento $\overline{AB}$, paralelo a L.H., de comprimento a e a uma distância h de L.H.. Traça linhas pontilhadas $\overline{AF}$ e $\overline{BF}$. Toma F_1, em L.H., à esquerda de F, distante a+h e traça $\overline{F_1B}$ determinando o ponto $D = \overline{AF} \cap \overline{F_1B}$. Usa D como um dos vértices do quadrado e completa o desenho. Use a técnica descrita para desenhar um quadrado em perspectiva frontal. No caso em que F está na perpendicular a L.H. que passa por B, mostre que a distância do quadro até o observador é a+h.

5. Desenhe um tabuleiro de xadrez em perspectiva:

   a) frontal.

   b) oblíqua.

   Sugestão: Use os exercícios 2 e 3.

6. Desenhe um cubo em perspectiva:

   a) frontal.

   b) oblíqua.

c) aérea.

7. Faça o desenho do interior da sala de sua casa em perspectiva frontal. Inicie o desenho com um retângulo que representa a parede do fundo da sala.

   a) Trace a linha de fuga interceptando este retângulo e escolha o ponto de fuga no interior do retângulo.

   b) Trace a linha de fuga acima do retângulo, escolhendo qualquer ponto da reta como ponto de fuga.

   c) Trace a linha de fuga abaixo do retângulo, escolhendo qualquer ponto da reta como ponto de fuga.

   No item a) tem-se a visão de quem está dentro da sala, e, no item b) tem-se a visão de quem está acima da sala, e no item (c) tem-se a visão de quem está abaixo da sala.

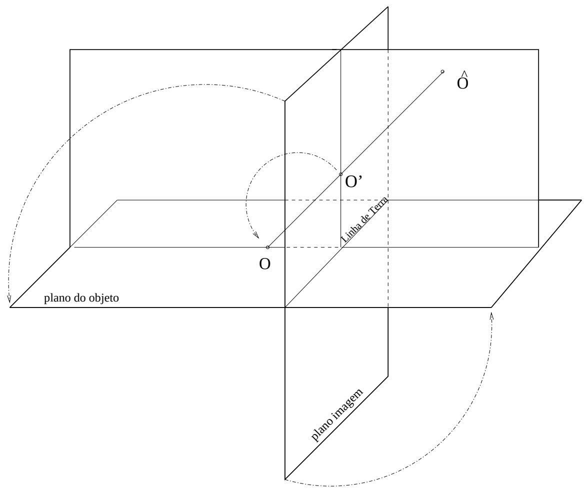
8. Faça o exercício acima usando um programa de computação dinâmica tipo GSP ou Cabri. Observe que usando tal ferramenta você pode, a partir do desenho do item (a), deslocar a reta de fuga de tal forma que ela fique acima do retângulo ou abaixo do mesmo e com isto você terá uma dinâmica do seu desenho.

CAPÍTULO 3

A Perspectiva Plana

A maneira como está sendo apresentada a perspectiva até o presente momento, apesar de ter uma ligação muito forte com a pintura e com o desenho, é insuficiente para se obter resultados mais profundos na Geometria Projetiva. Desta forma, usamos a técnica de rebater o plano imagem sobre o plano objeto. A perspectiva tridimensional define agora uma transformação do plano que chamaremos de perspectiva plana. Como veremos posteriormente, tendo uma perspectiva plana podemos facilmente reobter a perspectiva tridimensional que a gerou e assim não existe nenhuma perda conceitual ao se usar a perspectiva plana. Pelo contrário, através do conceito de perspectiva plana, obteremos todas as transformações projetivas do plano e conseqüentemente obteremos os resultados importantes da geometria projetiva. Ao fazer o rebatimento, os planos objeto e imagem ficarão coincidentes. Teremos num mesmo plano,tanto o objeto como a sua imagem. Enfatizamos ainda que as perspectivas planas que iremos definir servirão de base em todo o estudo a ser feito na Geometria Projetiva plana. É interessante observar que todas as isometrias do plano euclidiano, bem como todas as semelhanças do plano euclidiano, são obtidas como restrições de compostas de perspectivas planas.

Vamos, então,considerar um sistema de perspectiva (π_0 ,π_i , Ô) onde o plano objeto é perpendicular ao plano imagem. Observe que mudamos ligeiramente a notação do centro da perspectiva para Ô. Reservamos o O para ser o centro da perspectiva plana que iremos definir. É importante, aqui, tomar o seguinte cuidado sobre a posição de Ô. A exigência inicial era a de que o ponto Ô não poderia pertencer a nenhum dos dois planos, objeto e imagem. Faremos a exigência adicional de que Ô não pertença tambem ao plano que contém a linha de terra e forme um ângulo de 45° com o plano objeto. Tendo o sistema de perspectiva, tomamos o plano π que passa em Ô e é perpendicular ao plano objeto e ao plano imagem. Traçamos neste plano, a linha de projeção que forma um ângulo de 45° com a reta $\pi_0 \cap \pi$. Observe que esta linha de projeção intersecta o plano objeto num ponto que notaremos por O e que terá como imagem o ponto O'. Rebater o plano imagem sobre o plano objeto, consiste em rotacionar o plano imagem de 90°, tendo a linha de terra como eixo da rotação. O sentido da rotação deve fazer com que o ponto imgem O' seja rebatido exatamente sobre o ponto objeto O.



Feito isto, temos agora o plano imagem coincidente com o plano objeto. Observamos, entretanto, que é sempre possível fazer a distinção, neste plano, entre um objeto e sua imagem. Ao fazer o rebatimento do plano imagem sobre o plano objeto, temos de início dois elementos que merecem destaque. Temos a linha de terra e temos o ponto objeto O, que coincide com sua imagem rebatida O' e que não pertence à linha de terra. A partir destes dois elementos podemos obter resultados básicos e interessantes sobre a perpectiva plana. No que se segue, se P é um ponto do plano objeto e se P' é sua imagem rebatida, diremos apenas que P' é a imagem de P. Faremos o mesmo para as retas.

Resultado 1: Seja r uma reta que passa no ponto O , então a sua imagem r' coincide com a reta r.

Prova : Já sabemos que a imagem de r é uma reta. Desta forma, basta conhecer a imagem de dois pontos distintos de r. Temos dois casos a considerar. No primeiro, a reta r intersecta a linha de terra no ponto L. Portanto, r contem dois pontos O e L tais que O' = O e L' = L. Desta forma a imagem r' da reta r contem os pontos O e L e r' só pode ser a reta r. No segundo, a reta r é paralela à linha de terra. Neste caso, a sua imagem r' contem o ponto O e não pode ser nehuma das outras retas não paralelas à linha de terra, já que estas retas são imagens de si próprias. Assim, resta apenas a reta r para ser a reta imagem.

Resultado 2: Seja P um ponto do plano,com $P \neq O$, então a sua imagem P' pertence à reta $\overleftrightarrow{OP}$.

Prova : É conseqüência imediata do resultado 1.

Resultado 3: Os únicos pontos fixos são os pontos da linha de terra e o ponto O (um ponto P é dito ponto fixo pela perpectiva se sua imagem (rebatida) P' coincide com P).

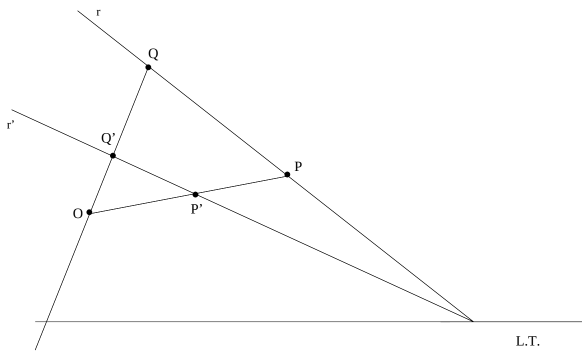
Prova : A suposição da existência de um ponto P, distinto de O e que não pertença à linha de terra nos conduz ao absurdo de que todos os pontos do plano são fixos.Pois, dado um ponto Q qualquer do plano, usamos o resultado 2 para afimar que sua imagem Q' está na reta $\overleftrightarrow{OQ}$ e analogamente está tambem na reta $\overleftrightarrow{PQ}$, sendo portanto o próprio Q.

Lembramos que iniciamos este estudo com um sistema de perspectiva formado por dois planos perpendiculares entre si e um centro de perspectiva Ô. A partir do rebatimento, ficamos com um único plano e neste plano ficou definida a linha de terra e o ponto O obtido a partir da posição do centro da perspectiva Ô. A questão básica agora é saber se é possível, a partir dos dois elementos, ponto O e linha de terra, reobter a perspectiva inicial. Ao tentar reobter a perspectiva inicial, podemos reconstruir o plano objeto e o plano imagem. Com relação ao centro da perspectiva, a única informação que temos é a de que ele está na reta $\overleftrightarrow{OO'}$. Desta forma,estes dois elementos são insuficientes para se reobter a perspectiva inicial e precisamos de mais um elemento. Por exemplo, escolhemos um ponto P diferente de O e fora da linha de terra e definimos a sua imagem P', tomando o cuidado de respeitar o resultado 2. Tendo estes tres elementos, podemos encontrar a imagem de qualquer ponto do plano e enclusive de reobter a posição do ponto Ô e desta forma reconstruir a perspectiva inicial.

Resultado 4 : Dados a linha de terra, o ponto O , um ponto P e sua imagem P', determinamos a imagem de qualquer ponto Q da seguinte maneira. Traçamos a reta $\overleftrightarrow{OQ}$, pois sabemos que Q' pertence a esta reta. Traçamos a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ e obtemos a sua imagem. Se $\overleftrightarrow{PQ}$ intersecta a linha de terra num ponto L, a reta imagem é $\overleftrightarrow{LP'}$. Se $\overleftrightarrow{PQ}$ for paralela à linha de terra, a reta imagem é a reta que passa em P' e é paralela à linha de terra. O ponto imagem Q' é o ponto de interseção destas duas retas.

Resultado 5 : Dados a linha de terra, o ponto O , um ponto P e sua imagem P', determinamos os pontos da reta obtida pelo rebatimento da reta de fuga da seguinte maneira. Traçamos duas retas perpendiculares à linha de terra, a primeira passando no ponto O

e a segunda passando por P. Seja L o ponto de interseção desta segunda reta com a linha de terra. A primeira reta tem ela própria como imagem e a segunda tem a reta $\overleftrightarrow{LP'}$ como imagem. A interseção destas duas retas fornece um ponto da reta procurada. Basta, então, traçar por este ponto uma reta paralela à linha de terra.



Resultado 6 : Dados a linha de terra, o ponto O , um ponto P e sua imagem P', determinamos a posição da reta v da seguinte maneira. Traçamos a reta r perpendicular à linha de terra e que passa em P e determinamos a sua imagem r'. Traçamos por O a reta paralela a r' e determinamos o ponto $r \cap s = V$. Observe que este ponto está em v ou seja é um ponto do plano objeto que não tem imagem.

Com isto, conhecemos pelo resultado 5, a altura do observador e pelo resultado 6, a distância do observador ao plano imagem e assim é possível reconstruir a perspectiva inicial. Observamos ainda que os tres elementos que definiram a perspectiva plana, ou seja a linha de terra, o ponto O e um ponto P e sua imagem P', podem ser substituidos, como veremos nos exercícios, por outros elementos.

Exercicios :

1. Considere a perspectiva plana onde é dada a reta dos pontos do plano que não tem imagem v, o centro O e um ponto P e sua imagem P'. Encontre a linha de terra.

2. Dadas as linhas de terra, a reta v e o centro O, determine a imagem P' de um ponto dado P.

3. Numa perspectiva plana são dados: a reta v , o centro O e a reta f(reta de fuga rebatida). Determine a L.T.

4. Numa perspectiva plana são dados: a reta L.T.,a reta f e também um ponto P e sua imagem P'. Determine o centro O.

5. Considere tres retas paralelas, L.T., v, e f(reb). Trace uma perpendicular r a estas retas e suponha que o centro O da perspectiva plana está em r. Determine a posição exata de O. Existe uma posição na qual se as tres retas forem colocadas, não é possível obter O. Determine esta posição.

6. Desenhe duas retas paralelas r e s e tome P, P'dois pontos distintos que não estão nem em r e nem em s. Determine o centro da perspectiva plana que tem r como eixo da perspectiva (linha de terra) e s como reta dos pontos que não tem imagem, sendo P'a imagem de P.

7. Construa uma perpectiva plana que transforma um triângulo ABC em:

   a) Um triângulo retângulo.

   b) Um triângulo isósceles.

   Existe uma que transforma o triângulo ABC em um triângulo equilátero?

8. Construa uma perspectiva plana que transforma um quadrilátero ABCD em um:

   a)paralelogramo.

   b)retângulo.

   c)quadrado.

   Sugestão: a)Tome a reta v como sendo a reta que passa nos pontos $P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$ e $Q = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AD}$. Escolha o centro O e o ponto imagem A'.

   b)Proceda como no caso *a)* com relação à escolha da reta v, entretanto o centro da perspectiva O deve estar na circunferência de diâmetro PQ.

   c) Proceda como no caso *b)*, trace as diagonais $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ e determine pontos na reta v que interceptam as duas retas. O centro O da perspectiva deve estar também na circunferência que tem como diâmetro o segmento de reta definido por esses dois pontos.

9. Considere a perspectiva onde o olho é o ponto do $\mathbb{R}^3$ de coordenadas (3,0,3), o plano imagem é o plano $x = 0$ e o plano objeto, $z = 0$. Encontre:

   a) a imagem da reta $x = y, z = 0$.

   b)a imagem da circunferência $x^2 + y^2 = 25, z = 0$.

10. No plano euclidiano de coordenadas xy, determine as equações das retas L.T., v, f(reb), coordenadas do centro O e coordenadas do ponto Ô que gerou a perspectiva plana, sendo p a perspectiva plana dada por:

    a) $p(x, y) = (\frac{x}{y-3}, \frac{y}{y-3})$

    b) $p(x, y) = (\frac{-2x+y}{y-2}, \frac{-5y}{y-2})$

11. Considere a perspectiva que tem o ponto do observador Ô = (a,b,c), plano objeto z=o e plano imagem y=0. Prove que a perspectiva plana gerada por esta perspectiva é definida por $p(x, y) = (\frac{-bx+ay}{y-b}, \frac{cy}{y-b})$. (Observamos que com o modelo de perspectiva adotado, onde os planos objeto e imagem são perpendiculares, sempre podemos tomar coordenadas x, y, z tais que o plano objeto é x=0 e o plano imagem é y=0 e assim a forma obtida para p é geral, mas $b \neq 0, c \neq 0eb \neq c$).

12. Em uma perspectiva no plano xy, O é o ponto (0,2). A linha de terra é o eixo x. Se a imagem do ponto Q=(2,4) é Q'=(4,6), determine a forma analítica desta perspectiva.

13. Se G,G',H,H',J,J' são seis pontos de um plano tais que as retas $\overleftrightarrow{GG'}$, $\overleftrightarrow{HH'}$, $\overleftrightarrow{JJ'}$ são concorrentes, mostre que existe uma única perspectiva plana tal que G'é imagem de G, H' é imagem de H e J'é a imagem de J.

14. Use o exercício anterior para provar o seguinte resultado:

    Teorema de Desargues: Se dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$são tais que $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ são retas concorrentes, então os pontos $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{CB} \cap \overleftrightarrow{C'B'}$e $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$são colineares.

15. Dada uma perspectiva plana, cujo centro é a origem (0,0), cuja reta dos pontos que não têm imagem é v:y=2 e que leva G=(1,1) em G'=(-1,-1). Encontre a imagem:

a)do quadrado de vértices (0,0),(1,1),(1,-1),(2,0).

b)do círculo $x^2 + y^2 = 1$.

c)da hipérbole xy=1.

16. O quadrilátero ABCD, A=(2,4), $B = (\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$, $C = (\frac{2}{7}, \frac{24}{7})$, D=(2,6) é transformado por uma perspectiva plana, num retângulo A'B'C'D' onde A'=(-2,-8). Determine as coordenadas do centro O=(x,y) e as equações da linha de terra e da linha de fuga.

Como vimos, uma perspectiva plana é uma transformação do plano euclidiano π_0 (menos os pontos da reta v) no plano π_0 (já que o plano π_i foi rebatido sobre o plano π_0). Esta transformação tem como pontos fixos, os pontos da linha de terra e o centro da perspectiva O, e apenas estes. Podemos notar tal transformação por p:$\pi_0 - \{v\} \to \pi_0 - \{f(reb)\}$. A perspectiva plana p pode ser estendida de maneira única ao plano projetivo obtido pela união de π_0 com a reta de seus pontos ideais, que notaremos por $\mathbb{P}^2$, da seguinte maneira: Se V é um ponto da reta v, este ponto que sabemos não tem imagem em π_0, terá imagem em $\mathbb{P}^2$. De fato, a imagem de V é simplesmente o ponto ideal da reta determinada por V e por O. Por outro lado, se P é um ponto ideal, a sua imagem é o ponto de interseção da reta *f(reb)* (e seu ponto ideal), com a reta determinada por P e por O. Desta forma, cada perspectiva plana em π_0 se estende de maneira única a uma perspectiva em $\mathbb{P}^2$. A vantagem de se considerar esta extensão aparece de modo muito claro ao se fazer composição de perspectivas planas. Pois, dadas duas perspectivas planas p_1 e p_2, com centros O_1 e O_2, respectivamente, podemos compô-las e obter a transformação $p = p_2 \circ p_1$. Observamos que o domínio desta transformação é $\pi_0 - \left\{v_1, p_1^{-1}(v_2)\right\}$, ou seja, não podemos aplicar p nos pontos de v_1 já que eles não têm imagem por p_1 e se P é um ponto da reta $p_1^{-1}(v_2)$, então $p_1(P)$ não tem imagem por p_2 e precisa ser excluído. Assim teremos que ter sempre este cuidado ao fazer compostas. Entretanto,considerando as extensões de p_1 e de p_2 ao plano projetivo, a sua composta estará definida no plano projetivo. Tendo feito esta extensão, podemos agora, de modo natural, considerar um tipo de perspectiva plana que não tinha sido objeto de consideração até o presente momento. Este tipo, é dado por uma perspectiva plana, no plano projetivo, cujo centro é um ponto ideal. Este tipo de perspectiva é chamada de **perspectiva paralela**.Notamos que para definir uma perspectiva plana paralela, precisamos apenas de definir a linha de terra, escolher um ponto

P fora da linha de terra e definir a sua imagem P' escolhendo outro ponto fora da linha de terra. Observamos que neste caso, o centro da perspectiva é o ponto ideal da reta que contem P e P'.Convém ainda notar que, numa perspectiva plana paralela, a imagem de um ponto ideal é sempre um ponto ideal e que tanto a reta de fuga v, como reta f(reb), coincidem com a reta ideal.

Definição: Qualquer composta de perspectivas planas definidas no plano projetivo é chamada de transformação projetiva ou de projetividade do plano projetivo.

As transformações projetivas que são obtidas pela composta de somente perspectivas planas paralelas, formam uma classe particular de transformações projetivas que preservam a razão simples de segmentos e que estão relacionadas às transformações afins do plano.

Exercícios:

1. Prove que se p é uma transformação projetiva então p é injetora e sobrejetora.

2. Prove que o conjunto de todas as transformações projetivas do plano projetivo formam um grupo.

3. Seja p uma transformação projetiva e r uma reta no plano projetivo. Prove que $p\,(r)$ é uma reta do plano projetivo.

Vale a pena aqui enunciar o seguinte resultado:

Teorema Fundamental da Geometria Projetiva (para planos) Seja A, B, C, D quatro pontos do plano projetivo, três a três não colineares e A', B', C', D' quatro pontos do plano projetivo, três a três não colineares. Então existe uma **única** transformação projetiva que leva A em A', B em B', C em C' e D em D'.

A prova deste teorema será feita usando coordenadas homogêneas. Entretanto, é importante tecer algumas considerações sobre uma das razões deste teorema ser considerado **fundamental** em geometria projetiva. O plano projetivo foi obtido do plano euclidiano acrescentando um ponto ideal a cada família de retas paralelas. Além disto, como será mostrado posteriormente, todas as isometrias do plano euclidiano são restrições de transformações projetivas do plano projetivo ao plano euclidiano. Um resultado **fundamental** em geometria euclidiana é que uma isometria do plano euclidiano fica determinada quando se conhece as imagens de três pontos não colineares. Este fato permite classificar e ter o controle total de todas as isometrias do plano, simplificando de maneira essencial a teoria das isometrias do plano. Analogamente, o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva simplifica a teoria das transformações do plano projetivo e nos dá o controle dessas transformações.

CAPÍTULO 4

Perspectiva de Retas

Pelo que vimos no exercício 3, dada qualquer transformação projetiva, p, do plano projetivo, a imagem de qualquer reta é uma reta. Desta forma considerando uma reta do plano projetivo e a sua imagem por p teremos uma transformação projetiva da reta escolhida na outra reta. No caso em que p é uma perspectiva plana de centro O, teremos também uma perspectiva da reta escolhida na outra reta, pois, para encontrar a imagem de um ponto P da reta escolhida, devemos traçar a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e determinar sua interseçao com a outra reta.

Definição: Uma perspectiva de retas é uma transformação que leva pontos de uma reta fixada (reta objeto) em uma outra reta fixada (reta imagem) de tal forma que cada par de pontos correspondentes é colinear com o ponto fixo O, chamado centro da perspectiva que não está nem na reta objeto nem na reta imagem. Uma transformação projetiva de retas ou uma projetividade de retas é uma perspectiva de retas ou uma composta de perspectivas de retas.

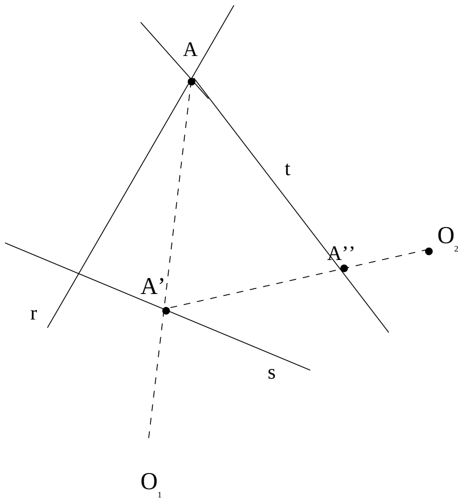
Vejamos agora alguns resultados interessantes sobre perspectiva de retas:

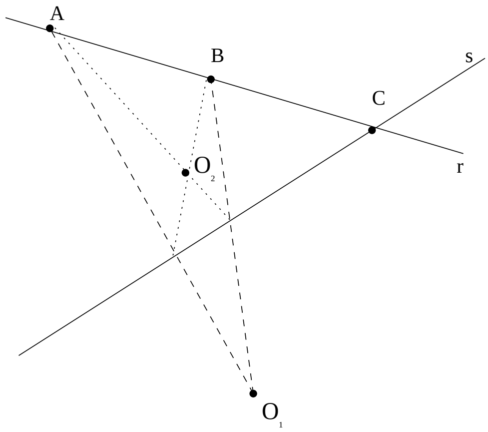
- Seja p: $r_1 \rightarrow r_2$ uma perspectiva de retas com centro O. Suponha que existe $P \in r_1$ tal que $p(P) \in r_1$. Então, temos necessariamente que p(P)=P, já que $p(P) \in r_1 \cap r_2$ e segue pela definição de p que p(P)=P.

- A composta de duas perspectivas de retas não é, em geral, uma perspectiva de retas. Como veremos a seguir, a composta de duas perspectivas $p_1 : r \rightarrow s$, de centro O_1 e $p_2 : s \rightarrow t$, de centro O_2 é uma perspectiva de retas somente nos casos em que $r \cap s \cap t = A$ ou $O_1, O_2, r \cap t$ são colineares. Isto justifica o fato de darmos o nome de projetividade a uma composta de perspectivas.

- Perspectivas e projetividades de retas são aplicações injetoras e sobrejetoras e, portanto, têm inversas.

- Dados três pontos distintos A, B e C de uma reta r, é possível construir uma projetividade que leva A em B, B em A e deixa o C fixo como mostramos na figura abaixo. A reta t que aparece na figura



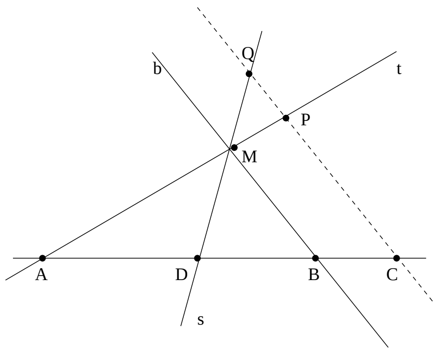


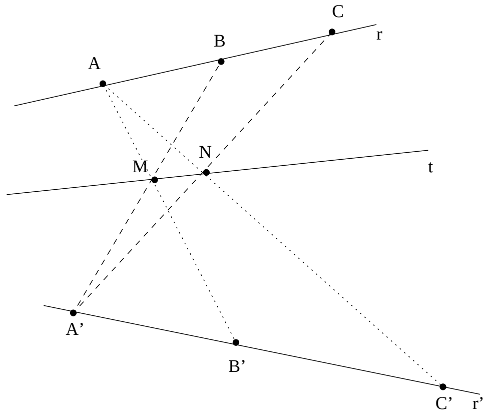
é chamada de reta auxiliar. A notação clássica para esta projetividade é $r(A,B,C)\bar{\wedge}r(B,A,C)$. No caso em que uma projetividade de uma reta *r* numa reta *r'* é uma perspectiva de centro O e esta perspectiva leva A em A', B em B' e C em C', a notação clássica é $r(A,B,C) \overset{O}{\bar{\wedge}} r'(A',B',C')$. O teorema fundamental da Geometria Projetiva para retas é essencial para justificar esta notação, principalmente no que se refere aos tres pontos.

- Dados quatro pontos distintos A, B, C e D de uma reta *r* é possível construir uma projetividade de *r* que leva A em D e deixa B e C fixos, como mostrado abaixo. A notação clássica para esta projetividade é $r(A,B,C)\bar{\wedge}r(D,B,C)$. Observamos que esta projetividade é a composta das seguintes perspectivas:$r(A,B,C) \overset{P}{\bar{\wedge}} b(M,B,C') \overset{Q}{\bar{\wedge}} r(D,B,C)$

Um método de se construir uma projetividade $p : r \longrightarrow r'$ tal que p(A)=A', p(B)=B' e p(C)=C', onde A, B, C são pontos distintos de *r* e A', B', C' são três pontos distintos de *r'*, pode ser visto na prova do seguinte teorema.

Teorema: Sejam *r* e *r'* duas retas do plano projetivo. Tomando A,B,C pontos distintos de *r* e A',B',C' pontos distintos de *r'*, existe uma projetividade $p : r \longrightarrow r'$ tal que p(A) = A', p(B) = B'e p(C) = C'.





Prova: Vamos supor inicialmente que $r \neq r'$. Temos três casos a considerar:

Caso 1: $A = A' = r \cap r'$. Então $r(A, B, C) \overset{O}{\wedge} r'(A', B', C')$, onde $O = \overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'}$ é a projetividade procurada.

Caso 2: A, B, C, A', B' e C' são todos distintos do ponto $r \cap r'$.

Seja $M = \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}$, $N = \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}$ e t a reta que passa em M e em N. Então $r(A, B, C) \overset{A'}{\wedge} t(\hat{A}, M, N) \overset{A}{\wedge} r'(A', B', C')$,é a projetividade procurada, onde $\hat{A} = \overleftrightarrow{AA'} \cap t$.

Caso 3: $A, B, C \neq r \cap r'$ e $A' = r \cap r'$

Usando uma reta auxiliar s tal que $s \cap r = A$, e um ponto O, define-se a perspectiva de centro O, $r(A, B, C) \overset{O}{\wedge} s(A, B_s, C_s)$ e caimos no caso 2 e assim $r(A, B, C) \overset{O}{\wedge} s(A, B_s, C_s) \overset{A'}{\wedge} t(\hat{A}, M, N) \overset{A}{\wedge} r'(A', B', C')$ é a projetividade para este caso.

Finalmente, se $r' = r$, usamos uma reta auxiliar m e um ponto O para definir uma perspectiva de centro O, de r em m, $r(A, B, C) \overset{O}{\wedge} m(A_m, B_m, C_m)$. Agora basta construir a perspectiva de m em r que leva A_m em A', B_m em B' e C_m em C', conforme feito nos casos anteriores.

Observamos que na escolha da reta m, é sempre possível evitar o caso 3 e, portanto, a projetividade $p : r \longrightarrow r'$ tal que p(A)=A', p(B)=B' e p(C)=C' pode ser construída usando no máximo três perspectivas de retas.

Uma questão essencial agora é a seguinte: suponhamos que o problema de construir uma projetividade $p : r \longrightarrow r'$ tal que p(A)=A', p(B)=B' e p(C)=C' é apresentado a duas pessoas distintas e que cada uma vai escolher o seu método, suas retas auxiliares, seus centros de perspectivas e, portanto, obtendo duas soluções distintas. Dado um quarto ponto D na reta r, as imagens de D nas duas soluções são diferentes? A resposta para esta questão é dada pelo teorema fundamental da geometria projetiva para retas, que afirma que apesar das soluções serem diferentes, a projetividade obtida é única.

Teorema Fundamental da Geometria Projetiva (para retas)
Sejam *r* e *r'* duas retas do plano projetivo. Dados A,B,C três pontos distintos em *r* e A',B',C' três pontos distintos em *r'*, existe uma **única** projetividade, p, da reta *r* na reta *r'* tal que p(A)=A', p(B)=B' e p(C)=C'.

A demonstração do Teorema Fundamental (para retas) será feita usando o conceito de Razão Cruzada, que será apresentado no próximo capítulo.

Aplicações do Teorema Fundamental:

1. Dadas duas retas distintas, *r* e *s* no plano projetivo e uma projetividade p:$r \to s$, então p pode ser obtida como a composta de apenas duas perspectivas de retas. Se $r = s$, são necessárias duas ou três perspectivas de retas.

2. Seja $p : r \to s$ uma projetividade de retas tal que $A = r \cap s$ é um ponto fixo de p. Então p é uma perspectiva de retas.

   Prova: Tomemos B e C dois pontos de r, distintos de A e B' e C', as suas imagens. Seja $O = \overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'}$. A perspectiva de retas $q : r \to s$ com centro O coincide com p nos pontos A, B e C e, desta forma, coincide com p em toda reta *r* como afirma o fundamental da geometria projetiva para retas.

3. Sejam $p_1 : r \to s$ e $p_2 : s \to t$, duas perspectivas de retas com centro O_1 e O_2, respectivamente. Então vale o seguinte:

   (a) Se $O_1 = O_2$, $p_3 = p_2 \circ p_1 : r \to t$ é perspectiva de retas de centro $O_1 = O_2$.

   (b) Se $O_1 \neq O_2$ e se $r \cap t = A \notin s$, então $p_2 \circ p_1 : r \to t$ é perspectiva de retas se, e somente se, O_1, O_2, A são colineares.

   (c) Se r, s, t forem concorrentes em A, então $p_2 \circ p_1 : r \to t$ é perspectiva de retas de centro O_3. Além disto O_1, O_2, O_3 são colineares.

Observamos que no caso b) O_1, O_2, O_3 não são , em geral, colineares.

Prova:
(a) Imediata.
(b) Se $p_2 \circ p_1$ é perspectiva de reta e $r \cap t = A \notin s$, então $p_1(A) = A' \in s$ e A,A',O_1 são colineares. Temos também que $p_2(A') = A$ e A', A, O_2 são colineares. Segue daí que A, O_1, O_2 são colineares.
Se A, O_1, O_2 são colineares, então $p_2 \circ p_1(A) = A$. Segue de 2 que $p_2 \circ p_1$ é perspectiva de retas.
(c) Por (2) já sabemos que $p_2 \circ p_1$ é perspectiva de retas de centro O_3. Resta mostrar que O_1, O_2, O_3 são colineares. Considere a reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$. Temos então duas alternativas: A primeira é que $\overleftrightarrow{O_1O_2} \cap r = B \neq A$. Neste caso, se $B' = p_1(B)$ e $B'' = p_2(B')$, então O_1, B, B', B'', O_2 são colineares. Sabemos também que B, B", O_3 são colineares e, portanto, O_1, O_2, O_3 são colineares. A segunda é que $\overleftrightarrow{O_1O_2} \cap r = A$. Suponhamos por absurdo que O_3 não é colinear com O_1 e O_2 e, desta forma, a reta $\overleftrightarrow{O_1O_3}$ não contém A. Observamos que $p_1^{-1} : s \longrightarrow r$ é uma perspectiva de centro O_1 e $p_2 = p_3 \circ p_1^{-1}$. Seja $C = s \cap \overleftrightarrow{O_1O_3}$, $C' = p_1^{-1}(C)$ e $C'' = p_3(C')$ então O_1, C, C', C'', O_3 são colineares. Observe que $p_2(C) = C''$ e, portanto, O_2, C, C'' são colineares. Isto é um absurdo, pois implica em O_1, O_2, O_3 colineares, contrário à suposicção inicial.
Outros dois teoremas importantes nesta teoria são os seguintes:
Teorema de Desargues: No plano projetivo sejam dados dois triângulos ABC e A'B'C' tais que as retas $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes no ponto O. Então os pontos $P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$, $Q = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$ e $R = \overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{C'A'}$ são colineares.
Prova: Seja r a reta $\overleftrightarrow{AA'}$, s a reta $\overleftrightarrow{BB'}$ e t a reta $\overleftrightarrow{CC'}$. Considere as perspectivas $p_1 : r \to s$ e $p_2 : s \to t$ tais que p_1(O)= O, p_1(A)= B, p_1(A')= B' e p_2(O)= O, p_2(B)= C, p_2(B')= C'. Então $p_2 \circ p_1$ é uma perspectiva, já que ela fixa o ponto O. O centro da perspectiva p_1 é $P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{AB'}$. O centro da perspectiva p_2 é $Q = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$ e o centro da perspectiva $p_2 \circ p_1$ é $R = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$. Segue do resultado 3 que estes pontos são colineares.
Teorema de Pappus: No plano projetivo são dadas duas retas r e r' e A, B, C, pontos distintos de r e, ainda, A', B', C', pontos distintos de r'. Suponha que nenhum destes pontos coincide com $r \cap r'$ então $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}$, $\overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$ e $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}$ são colineares.

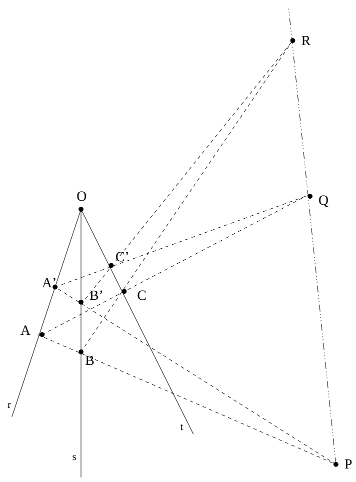


Figura 21: Teorema de Desargues

Prova: Seja k a reta $\overleftrightarrow{BA'}$ e m a reta $\overleftrightarrow{BC'}$ e $p_1 : k \to r'$ perspectiva de centro A e $p_2 : r' \to m$ perspectiva de centro C. A composta $p_2 \circ p_1$ fixa o ponto B e portanto é uma perspectiva. Notaremos por Q o centro desta nova perspectiva. Se $E = \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'B}$, então $p_2 \circ p_1(E) = p_2(C') = C'$ (pois $C' = m \cap r'$). Assim Q, A, C' são colineares. Se $M = \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}$ e $N = \overleftrightarrow{B'C} \cap \overleftrightarrow{BC'}$, então $p_2 \circ p_1(M) = p_2(B') = N$. Desta forma Q, M, N são colineares e isto implica que $Q = \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{AC'}$. Por outro lado, $p_2 \circ p_1(A') = p_2(A') = \overleftrightarrow{A'C} \cap \overleftrightarrow{BC'}$. Obtemos então que, A', p_2(A'), C são colineares. Este fato implica que A', Q, C são colineares, donde concluímos que $Q = \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{AC'} = \overleftrightarrow{MN} \cap \overleftrightarrow{A'C}$ e, finalmente, $\overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}$, $\overleftrightarrow{BC'} \cap \overleftrightarrow{B'C}$ e $\overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}$ são colineares.

Exercícios:

1. Falso ou Verdadeiro? Justifique. A involução $r(A,B,C,D) \overline{\wedge}\, r(D,C,B,A)$ pode ser obtida como composta das seguintes perspectivas, onde t e s são retas auxiliares e o ponto O não está nem em r e nem em t:

$$r(A,B,C,D) \overset{O}{\wedge} t(A',B,C',D') \overset{D}{\wedge} s(A'',C,C',O) \overset{A'}{\wedge} r(D,C,B,A)$$

Sugestão: Interprete geometricamente a expressão acima.

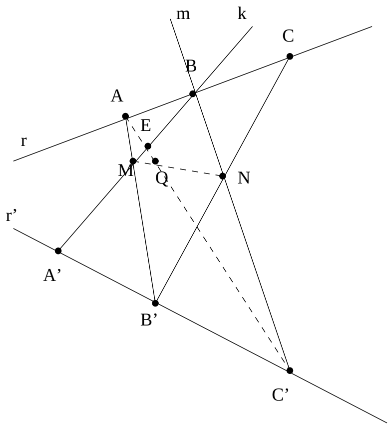


Figura 22: Teorema de Pappus

2. Dados quatro pontos A,B,C,D em uma reta r, exiba projetividade $r(A,B,C,D) \bar{\wedge}\, r(C,D,A,B)$.

   Sugestão: Proceda como no exercício anterior.

3. Numa reta r, marque três pontos distintos A,B,C e nesta mesma reta marque outros três pontos distintos A',B',C'. Encontre uma projetividade $p : r \longrightarrow r$ tal que p(A)=A', p(B)=B'e p(C)=C'.

4. Seja A,B,C três pontos distintos em uma reta r e $p : r \longrightarrow r$, uma projetividade tal que p(A)=A, p(B)=C e p(C)=B. Verifique que:

   (a) $p \circ p = identidade$

   (b) Existe $D \neq A$ tal que p(D)=D (o ponto D é chamado de conjugado harmônico de A, relativamente a B e C).

CAPÍTULO 5

A Razão Cruzada e o Princípio da Dualidade

Como foi observado no início do Capítulo 2, conceitos métricos da geometria euclidiana como comprimento de segmento e medida de ângulo não são preservados pela perspectiva e desta forma não serão preservados por uma transformação projetiva, tanto do plano projetivo, como por uma projetividade de retas. Entretanto, existe um conceito métrico que é preservado por qualquer projetividade de retas. Este conceito, como veremos posteriormente, é básico em Geometria Projetiva e tem profundas aplicações no desenho, uma vez que ele define uma escala no desenho em perspectiva. Este conceito,que passaremos a definir em seguida é chamado de **Razão Cruzada**. Observamos que a razão cruzada é definida em termos de distância euclidiana ou seja os 4 pontos da reta escolhidos inicialmente são euclidianos, mas a razão cruzada se estende naturalmente a pontos ideais, sendo portanto um conceito da geometria projetiva.

Dados dois pontos P e Q do plano euclidiano, a notação PQ é tradicionalmente usada para denotar a distância de P a Q. Existe também a distância orientada relativa aos pontos P e Q. Seja r a reta que contém P e Q e vamos colocar em r um sentido de orientação. Se o segmento $\overline{PQ}$ tiver a mesma orientação que a reta r, diremos que a distância orientada de P para Q é positiva, caso contrário ela será negativa. Faremos então a seguinte convenção. Na definição que daremos de razão cruzada, PQ denota a distância orientada de P para Q e assim $PQ = -QP$. Observamos ainda que se R é outro ponto de r então $PQ + QR + RP = 0$.Temos também que $AB \times CD + AC \times DB + AD \times BC = 0$. Para provar esta última igualdade basta usar que $AB + BC = AC$ quaisquer que sejam os três pontos A, B e C dados.

Definição: Em uma reta projetiva tomamos quatro pontos distintos A, B, C e D. Considere os números reais

$$R(A, B, C, D) = \frac{AC}{BC} \times \frac{BD}{AD}$$

, se A, B, C, D são todos euclidianos.

$$R(A, B, C, D) = \frac{BD}{BC}$$

, se B, C, D são euclidianos e A ponto ideal.

$$R(A,B,C,D)=\frac{AC}{AD}$$

, se A, C, D são euclidianos e B ponto ideal.

$$R(A,B,C,D)=\frac{BD}{AD}$$

, se A, B, D são euclidianos e C ponto ideal.

$$R(A,B,C,D)=\frac{AC}{BC}$$

, se A, B, C são euclidianos e D é ponto ideal.

R(A,B,C,D) é chamado de razão cruzada associada aos pontos A, B, C, D.

É importante observar que a definição acima independe da orientação escolhida para reta que contém os pontos A, B, C, D uma vez que mudando a orientação da reta, todos os sinais das distâncias orientadas dos segmentos são trocados, o que mantem o sinal da razão cruzada.

Notamos também que, no caso em que A, B, C, D são pontos euclidianos da reta,

$$\frac{AC}{BC}\times\frac{BD}{AD}=\frac{BD}{AD}\times\frac{AC}{BC}=\frac{DB}{CB}\times\frac{CA}{DA}=\frac{CA}{DA}\times\frac{DB}{CB}$$

.

Assim,

$$R(A,B,C,D)=R(B,A,D,C)=R(D,C,B,A)=R(C,D,A,B)=x$$

.

Por outro lado, fazendo a simples troca da posição do C com o D obtemos que

$$R(A,B,D,C)=\frac{AD}{BD}\times\frac{BC}{AC}$$

e como pode ser visto facilmente, temos $R(A,B,D,C)=\frac{1}{x}$.

Novamente,mudando a posição dos termos que compoem a razão cruzada R(A,B,D,C) obtemos

$$R(A,B,D,C)=R(B,A,C,D)=R(C,D,B,A)=R(D,C,A,B)=\frac{1}{x}$$

.

Com relação a posição dos pontos A, B, C, D temos ainda as seguintes razões cruzadas.

$$R(A,C,B,D) = R(C,A,D,B) = R(D,B,C,A) = R(B,D,A,C) = 1-x$$

$$R(A,C,D,B) = R(C,A,B,D) = R(B,D,C,A) = R(D,B,A,C) = \frac{1}{1-x}$$

$$R(A,D,C,B) = R(D,A,B,C) = R(B,C,D,A) = R(C,B,A,D) = \frac{x}{x-1}$$

$$R(A,D,B,C) = R(D,A,C,B) = R(C,B,D,A) = R(B,C,A,D) = \frac{x-1}{x}$$

Quando um dos pontos é ideal, a razão cruzada é mais simples e o que foi feito acima pode ser repetido como exercício.

A Invariância da Razão Cruzada

Em vista dos resultados expostos sobre as várias relações existentes entre as 24 possíveis razões cruzadas quando são escolhidos quatro pontos A, B, C e D, podemos, sem perda de generalidade, supor na próxima proposição que os números AC, AD, BC e BD que aparecem na razão cruzada R(A,B,C,D) são todos positivos.Esta suposição é feita apenas para facilitar a prova da citada proposição.

Lema: Sejam r e r' retas projetivas e $p : r \longrightarrow r'$ uma perspectiva de centro O. Então $R(A,B,C,D) = R(A',B',C',D')$, onde A'=p(A), B'=p(B), C'=p(C) e D'=p(D).

Prova: Caso 1: Começamos a prova supondo que A, B, C, D são pontos euclidianos da reta r e que suas imagens A', B', C', D' são também euclidianos. Trace por O a perpendicular à reta r, que passa no ponto H. Então vale o seguinte:

$$R(A,B,C,D) = \frac{AC}{BC} \times \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}HO \times AC}{\frac{1}{2}HO \times BC} \times \frac{\frac{1}{2}HO \times BD}{\frac{1}{2}HO \times AD} =$$

$$\frac{area\Delta AOC}{area\Delta BOC} \times \frac{area\Delta BOD}{area\Delta AOD} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}AO \times COsen(< AOC)}{\frac{1}{2}BO \times COsen(< BOC)} \times \frac{\frac{1}{2}BO \times DOsen(< BOD)}{\frac{1}{2}AO \times DOsen(< AOD)} =$$

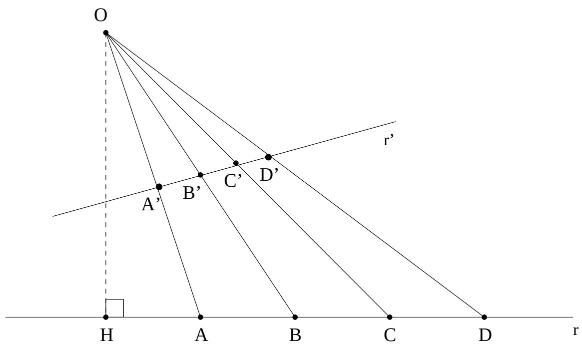
$$\frac{sen(< AOC)}{sen(< BOC)} \times \frac{sen(< BOD)}{sen(< AOD)}$$

Trace por O a perpendicular à reta *r'* e repita o processo que foi feito acima. Obtemos analogamente que

$$R(A', B'C'D') = \frac{sen(< AOC)}{sen(< BOC)} \times \frac{sen(< BOD)}{sen(< AOD)}$$

e desta forma,

$$R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$$



Caso 2: Consideremos o caso em que o ponto A é ponto ideal e todos os outros pontos B, C, D, A', B', C', D' são pontos euclidianos. Procedemos de maneira análoga ao caso 1, obtendo que

$$R(A, B, C, D) = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{1}{2}HO \times BD}{\frac{1}{2}HO \times BC}$$

$$\frac{area\Delta BOD}{area\Delta BOC}$$

$$\frac{\frac{1}{2}BO \times DOsen(< BOD)}{\frac{1}{2}BO \times COsen(< BOC)}$$

$$\frac{DOsen(< BOD)}{COsen(< BOC)}$$

e que

$$R(A', B,' C', D') = \frac{sen(< A'OC)}{sen(< BOC)} \times \frac{sen(< BOD)}{sen(< A'OD)}$$

. Temos que

$$R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$$

se e somente se

$$\frac{OD}{OC} = \frac{sen(< A'OC)}{sen(< A'OD)}$$

.

Mas, $ODsen(< A'OD) = OH$ e $OCsen(< A'OC) = OH$, já que a reta que contém O e A' é paralela a r .

Caso 3: A é ponto ideal e um dos pontos imagem é também ponto ideal.Vamos supor que o ponto imagem ideal é o ponto B' Reduzimos este caso ao caso 2, tomando uma reta auxiliar s , diferente de r' , que passa por A'. Além disto s não pode ser paralela nem à reta que contém O e C e nem à reta que contém O e D. A projetividade

$$r(A, B, C, D) \overset{O}{\wedge} s(A', B_s, C_s, D_s) \overset{O}{\wedge} r'(A', B', C', D')$$

é composta de duas perspectivas de retas que satisfazem o caso 2 e portanto preserva a razão cruzada.

Segue deste lema que a razão cruzada é preservada por qualquer composta de perspectivas de retas.

Teorema: Seja $p : r \longrightarrow r'$ uma projetividade de retas. Então $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$, onde A'=p(A), B'=p(B), C'=p(C) e D'=p(D).

Além disto vale a pena observar que se $p : r \longrightarrow s$ for uma aplicação injetora que preserva a razão cruzada, então p é necessariamente uma projetividade. A demonstração deste fato usa o teorema de existência de projetividade, provado no capítulo 4. Para ver isto, tome três pontos distintos A, B, C em r e suas imagens A', B' e C' em s e construa uma projetividade $p_1 : r \longrightarrow s$ tal que $A' = p_1(A), B' = p_1(B), C' = p_1(C)$. Considere agora um ponto qualquer D em r diferente de A, B e C e seja D'=p(D) e $D'_1 = p_1(D)$. Sabemos que tanto p quanto p_1 preservam a razão cruzada. Assim, $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D') = R(A', B', C', D'_1)$. Segue daí que $D' = D'_1$ e portanto $p = p_1$.

Podemos então enunciar o seguinte resultado :

Teorema : Seja $p : r \longrightarrow s$ uma aplicação injetora de retas no plano projetivo. Dados A, B, C e D pontos distintos de r e $A' = p(A), B' = p(B), C' = p(C) e D' = p(D)$, temos que p é uma projetividade de retas se e somente se $R(A, B, C, D) = R(A', B', C', D')$.

Uma demonstração do Teorema Fundamental da Geometria Projetiva para retas, pode agora ser obtida, usando, para existência, o teorema de existência de projetividade, provado no capítulo 4 e, para unicidade, o teorema acima.

Teorema Fundamental da Geometria Projetiva (para retas)

Sejam *r* e *r'* duas retas do plano projetivo. Dados A,B,C três pontos distintos em *r* e A',B',C' três pontos distintos em *r'*, existe uma **única** projetividade, p, da reta *r* na reta *r'* tal que p(A)=A', p(B)=B' e p(C)=C'.

Observamos também que a força deste resultado está exatamente na unicidade da projetividade, p.

Como dito inicialmente, a razão cruzada fornece uma escala no desenho em perspectiva. Junto com o teorema fundamental, a razão cruzada define o desenho a partir de três posições escolhidas pelo desenhista, ou seja, este tem apenas a liberdade de fazer três escolhas de posição no desenho e o resto decorre dessas escolhas. Para exemplificar, consideremos o caso mais simples que é o desenho de um trilho de trem em perspectiva frontal e vamos supor que o desenhista colocou os três primeiros dormentes em posição horizontal de tal forma que o segundo dista do primeiro de uma unidade e o terceiro dista do segundo de meia unidade. Ao fazer isto, a posição dos outros dormentes e também a posição da reta de fuga ficam determinadas por causa da razão cruzada. Uma conta simples usando razão cruzada resulta que a distância do quarto dormente para o terceiro é $\frac{3}{10}$ de unidade e a distância do primeiro dormente até a linha de fuga é 3 unidades.

Exercícios:

1. Prove que $AB \times CD + AC \times DB + AD \times BC = 0$
2. Seja x=R(A,B,C,D). Prove que:
   (a) $R(A, C, B, D) = 1 - x$
   (b) $R(A, D, C, B) = \frac{x}{1-x}$

3. Um desenhista quer fazer o desenho de uma estrada de ferro em perspectiva frontal que tenha os cinco primeiros dormentes. Se o desenhista fizer o desenho dos três primeiros dormentes de tal forma que a distância do primeiro para o segundo seja de uma unidade e do segundo para o terceiro seja $\frac{2}{3}$ de unidade, calcule a distância do terceiro para o quarto e do quarto para o quinto. Determine a posição da linha de fuga.

4. O desenho inicial de uma estrada de ferro em perspectiva frontal apresenta os três primeiros dormentes. A distância do primeiro para o segundo vale 1 e do segundo para o terceiro vale $\frac{1}{2}$.Determine a distância do terceiro para o quarto dormente e a posição da linha de fuga.

5. Trace um quadrado ABCD de lado de comprimento igual a 3. Seja M o ponto médio da base $\overline{AB}$. Trace a diagonal $\overline{AC}$ e o segmento $\overline{DM}$. Seja $E = \overline{AC} \cap \overline{DM}$ e F o ponto de $\overline{AD}$ tal que $\overline{EF}$ é paralela a $\overline{AB}$. Tome ainda $G = \overline{FC} \cap \overline{DM}$ e H o ponto de $\overline{AD}$ tal que $\overline{GH}$ é paralelo a $\overline{AB}$.Determine o valor de FH.

   Sugestão: Use razão cruzada para determinar o valor de FH. Resolva o problema usando geometria elementar e compare as dificuldades.

6. Prove que se A, B, C, D são quatro pontos distintos de uma reta r, não existe, em geral, projetividade $p : r \longrightarrow r$ tal que p(A)=A, p(B)=B, p(C)=D e p(D)=C. Analise o caso em que existe tal projetividade.

7. Prove que se A, B, C, D são quatro pontos distintos de uma reta r, não existe, em geral, projetividade $p : r \longrightarrow r$ tal que p(A)=A, p(B)=C, p(C)=B e p(D)=D. Analise o caso em que existe tal projetividade.

8. Prove que se A, B, C, D são quatro pontos distintos de uma reta r, não existe projetividade $p : r \longrightarrow r$ tal que p(A)=A, p(B)=C, p(C)=D e p(D)=B.

9. Use a razão cruzada para determinar conjugado harmônico de A relativamente a B e C, sabendo que AB=1 e BC=3.

10. Considere, no plano euclidiano, duas retas distintas e não paralelas r e r' e um ponto O que não pertence a nenhuma destas retas. Trace por O uma reta paralela a r que intercecta r' no ponto A'. Trace por O outra reta paralela a r' que intesecta r no ponto B. Tome dois pontos

C e D em r e sejam C' e D' os pontos de interseção de r' com as retas definidas por O e C e por O e D respectivamente. Prove que $\frac{BD}{BC} = \frac{A'C'}{A'D'}$

O Princípio da Dualidade

Quando fazemos geometria no plano projetivo observamos que os conceitos mais básicos desta geometria são ponto, reta contem e está contido. Esses conceitos podem ser dualizados, ou seja, para cada um destes conceitos, escolhemos um outro conceito que será o seu dualizado. Desta forma definiremos no plano projetivo que o conceito dual de ponto é reta, o conceito dual de reta é ponto, o conceito dual de contem é está contido e o conceito dual de está contido é contem. Desta forma, se tivermos uma definição ou uma proposição qualquer, é possível, usando os conceitos duais, enunciar uma outra definição ou uma outra proposição, que será chamada de definição dual ou de proposição dual.

Como um simples exemplo, vamos considerar o seguinte axioma:

Dois pontos distintos no plano projetivo determinam uma única reta

A proposição dual deste axioma, trocando ponto por reta e reta por ponto e notando que a frase "determinam uma única reta´´ significa "estão contidos em uma única reta", será:

Duas retas distintas no plano projetivo contêm (se intersectam em) um único ponto

Essa proposição dual é certamente verdadeira no plano projetivo, entretanto ela é falsa no plano euclidiano.

De fato, existe em geometria projetiva um princípio, chamado de princípio da dualidade, que afirma o seguinte:

Princípio da Dualidade: Em geometria projetiva o dual de todo resultado válido é válido.

Assim, o seguinte resultado é verdadeiro:

No plano projetivo, sejam *r, s, t* três retas distintas e concorrentes em P, *r', s', t'* três retas distintas e concorrentes em P', onde $P \neq P'$ e nenhuma destas retas é $\overleftrightarrow{PP'}$. Considere os pontos $A = r \cap s', A' = r' \cap s, B = s \cap t', B' = s' \cap t, C = r \cap t', C' = r' \cap t$. Então $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ são retas concorrentes.

Voltando ao Teorema de Pappus, vemos que a proposição acima é exatamente a proposição dual do Teorema de Pappus.

Exercícios:

1. Enuncie o dual do Teorema Fundamental da Geometria Projetiva para retas.

Sugestão: Observe inicialmente que toda perspectiva de retas é a restrição à reta domínio de uma perspectiva plana. Segue daí que toda projetividade de retas é a restrição à reta domínio de uma projetividade do plano projetivo. Desta forma, a palavra projetividade de reta deve ser mudada para projetividade do plano projetivo.

2. Enuncie o dual do Teorema de Desargues.

3. No espaço projetivo vale também o princípio da dualidade. Entretanto, existe diferenças com relação aos conceitos duais de ponto, reta e plano. Nas duas proposições abaixo, uma é a proposição dual da outra. Analise as duas e estabeleça quais são os conceitos duais de ponto, reta e plano.

   "Três planos distintos que não contêm uma reta comum aos três, se intersectam em um único ponto".

   "Três pontos distintos não colineares estão contidos em um único plano".

4. Qual a proposição dual da seguinte proposição:

   "Dois pontos distintos determinam uma única reta".

   (a) No plano projetivo.
   (b) No espaço projetivo.

5. Enuncie a proposição dual da seguinte proposição: "Dados uma reta e um ponto fora desta reta, duas retas distintas que passam neste ponto, intersectam a reta dada em pontos distintos".

   (a) No plano projetivo
   (b) No espaço projetivo

CAPÍTULO 6

Geometria Projetiva Analítica

Ao se iniciar o estudo da geometria euclidiana, colocamos as suas bases, estabelecendo os conceitos primitivos de ponto, reta e plano e os postulados que regem esta geometria. A partir daí, proposições e teoremas são obtidos, figuras são desenhadas usando régua e compasso e resultados práticos são construídos. Costuma-se chamar a esse tipo de geometria, de "Geometria Elementar". Entretanto, a geometria euclidiana pode também ser estudada usando coordenadas. A partir do postulado da régua, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre uma reta e o conjunto dos números reais. Segue daí que existe uma correspondência biunívoca entre o plano euclidiano e o conjunto $I\!R^2$ e também uma correspondência biunívoca entre o espaço euclidiano e o conjunto $I\!R^3$. A geometria euclidiana passa agora a ter um *status* algébrico e entes geométricos são agora descritos por equações algébricas. Com isto, todos os resultados antes obtidos de maneira "elementar", podem ser obtidos de maneira algébrica.

Lembramos que no plano euclidiano usa-se coordenadas (x,y), chamadas de coordenadas cartesianas, e como é sabido, uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, representa uma transformação linear do plano euclidiano, onde $A(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, logo $A(0, 0) = (0, 0)$. Desta forma, se uma transformação do plano euclidiano não fixar origem, ela não pode ser representada por uma matriz. Este é o caso da maioria das transformações do plano, como, por exemplo, as isometrias do plano euclidiano. Para conseguir matrizes que representem estas transformações, podemos usar um outro tipo de coordenadas, que são chamadas de coordenadas afins do plano e consistem simplesmente em considerar, para cada ponto do plano, as velhas coordenadas cartesianas acrescidas do 1. Assim, (x,y,1) são as coordenadas afins de um ponto do plano euclidiano. Uma grande vantagem de usar coordenadas afins é que muitas transformações do plano euclidiano podem agora ser representadas por matrizes 3x3. Todas as isometrias do plano euclidiano podem ser representadas por uma tal matriz. Vejamos dois exemplos:

1. A translação de vetor $\vec{v} = (a, b)$, $T_{\vec{v}}(x, y) = (x + a, y + b)$ não fixa a origem e, portanto, não pode ser representada por uma matriz 2x2. Entretanto, usando coordenadas afins (x,y,1), temos que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

representa $T_{\vec{v}}$ pois $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$=$(x+a, y+b, 1)$, que são as coordenas afins do ponto $T_{\vec{v}}(x,y)$.

2. Uma rotação de ângulo α e centro(a,b) com $(a,b) \neq (0,0)$, é uma transformação do plano que não fixa a origem, portanto, não pode ser representada por uma matriz 2x2. Entretanto, usando coordenadas afins, podemos representar esta rotação pela matriz

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & -sen\alpha & -a.cos\alpha + b.sen\alpha + a \\ sen\alpha & cos\alpha & -a.sen\alpha - b.cos\alpha + b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As considerações acima visam motivar a escolha que faremos do que chamaremos de *Plano Projetivo Standard* e estabelecer uma comparação com o que foi feito na geometria euclidiana.

Nos capítulos anteriores, a geometria projetiva foi apresentada de forma "elementar". O plano projetivo foi descrito como sendo o plano euclidiano unido com sua reta de pontos ideais. O espaço projetivo foi descrito como sendo o espaço euclidiano unido com seu plano de pontos ideais. As proposições e teoremas dessa geometria foram apresentados de forma geométrica "elementar". Nosso objetivo agora é apresentar a geometria projetiva de forma analítica.

O Plano Projetivo Standard

Considere no $I\!R^3$ o plano $\pi_1 = \{(x,y,1)/x, y \in I\!R\}$ e seja i a sua reta de pontos ideais. O plano $I\!P^2 = \pi_1 \cup i$ é chamado de *plano projetivo standard.* Cada ponto de $I\!P^2$ e que está em π_1 tem, obviamente, suas coordenadas (x,y,1). Entretanto, os pontos de i não têm coordenadas. Nosso objetivo no que segue é definir um sistema de coordenadas para os pontos de $I\!P^2$ de forma que essas coordenadas fiquem bem relacionadas com as velhas coordenadas dos pontos de π_1. Essas coordenadas serão chamadas de coordenadas homogêneas de $I\!P^2$.

Para descrever o conjunto $I\!RP^2$, que será o análogo algébrico do $I\!R^2$, começaremos com o seguinte exemplo:

Seja $P = (1,2,3) \in I\!R^3$. A reta do $I\!R^3$ que passa em P e na origem (0,0,0), pode ser descrita como sendo o conjunto $r = \{\lambda(1,2,3)/\lambda \in I\!R\}$.

Notaremos $r-(0,0,0)$ simplesmente por [1,2,3]. Além disto, $r-(0,0,0)=\{\lambda(1,2,3)/\lambda\in I\!\!R-0\}$. Observe que se Q=(2,4,6), ou Q=(-1,-2,-3), ou de forma mais generalizada, Q=(a,2a,3a), então a reta que passa em Q e em (0,0,0) é r e $r-(0,0,0)=\{\lambda.Q/\lambda\in I\!\!R-0\}$. Além disto, se P=(0,0,0), não é possível definir uma tal reta r. Isto significa que

$$[1,2,3]=[2,4,6]=[-1,-2,-3]=[a,2a,3a]$$

,

se $a\neq 0$ e também o símbolo [0,0,0] não faz sentido e, portanto, não deve ser usado.

Assim, se $(x,y,z)\in I\!\!R^3-\{(0,0,0)\}$, $[x,y,z]=\{(\lambda x,\lambda y,\lambda z)/\lambda\in I\!\!R-0\}$.

Definição: $I\!\!RP^2$ é o conjunto de todos os [x,y,z] com $(x,y,z)\neq(0,0,0)$.

Não é demais lembrar que se $(x,y,z)\neq(0,0,0)$, o elemento [x,y,z] representa uma reta menos um ponto, ou seja, representa a reta que passa na origem e no ponto de coordenadas (x,y,z), retirando desta reta o ponto (0,0,0). Observe também que $[1,5,4]=[5,25,20]=[\frac{1}{2},\frac{5}{2},2]=[-7,-35,-28]$ e enfatizamos que o símbolo [0,0,0] não tem sentido.

Diremos ainda que um ponto P=(x,y,z) é um representante de [x,y,z].

É necessário ainda notar que $I\!\!RP^2$ não possui estrutura de espaço vetorial como, por exemplo, $I\!\!R^2$. Qualquer tentativa de definir uma adição em $I\!\!RP^2$ conduz a uma inconsistência. Tome como exemplo a seguinte adição:

$$[1,1,1]+[1,-2,3]=[2,-1,4]$$

Por outro lado, $[1,-2,3]=[-1,2,-3]$

E assim,

$$[1,1,1]+[1,-2,3]=[1,1,1]+[-1,2,-3]=[0,3,-2]$$

Os dois resultados acima são, obviamente, distintos, o que invalida a adição feita acima.

Proposição 1: Existe uma decomposição natural do $I\!\!RP^2$ em dois subconjuntos, ou seja, $I\!\!RP^2=(I\!\!RP^2)_1\cup(I\!\!RP^2)_0$, onde $(I\!\!RP^2)_1=\{[x,y,1]/(x,y)\in I\!\!R^2\}e(I\!\!RP^2)_0=\{[x,y,0]/(x,y)\in I\!\!R^2-(0,0)\}$.

Prova: Seja [x,y,z] um elemento de $I\!\!RP^2$. Temos duas alternativas. Ou $z\neq 0$ e, neste caso, $[x,y,z]=[\frac{x}{z},\frac{y}{z},1]$ e portanto $[x,y,z]\in(I\!\!RP^2)_1$, ou z=0, e, neste caso, $[x,y,z]\in(I\!\!RP^2)_0$.

Proposição 2: Existe uma correspondência biunívoca entre plano projetivo $I\!\!P^2$ e o conjunto algébrico $I\!\!RP^2$, de forma que o plano euclidiano π_1

fica em correspondência biunívoca com $(\mathbb{R}P^2)_1$ e a reta dos pontos ideais, i, fica em correspondência biunívoca com $(\mathbb{R}P^2)_0$. Desta forma, cada ponto do plano projetivo $\mathbb{P}^2$ estará munido de suas coordenadas [x,y,z], que chamaremos de coordenadas homogêneas do ponto.

Prova: Um ponto P de π_1 tem coordenadas afins (x,y,1) e portanto deve ser naturalmente associado a [x,y,1] que é um elemento de $(\mathbb{R}P^2)_1$. É fácil ver que isto estabelece uma correspondência biunívoca entre π_1 e $(\mathbb{R}P^2)_1$. Se P é um ponto ideal de $\mathbb{R}P^2$, P é o ponto de interseção da família de retas paralelas em π_1,a uma reta de equação $ax + by = 0$ e $z = 1$. Associamos a P o elemento [a,-b,0] de $(\mathbb{R}P^2)_0$. Lembramos que [a,-b,0] representa a reta de equação $ax + by = 0ez = 0$,(sem a origem),que é uma reta paralela, em $\mathbb{R}^3$,á familia de retas dadas, e que tem P como seu ponto ideal. Novamente,é fácil ver que isto estabelece uma correspondência biunívoca entre i e $(\mathbb{R}P^2)_0$.

Retas no Plano Projetivo Standard

Sabemos que uma reta em $\mathbb{P}^2$ é formada por pontos de uma reta euclidiana $r \in \pi_1$ e seu ponto ideal. Usando coordenadas homogêneas,podemos determinar uma equação para cada reta r do plano projetivo standard. Para isto tomamos dois pontos distintos,P_1 e P_2 desta reta e suas coordenadas homogêneas $[x_1, y_1.z_1]$ e $[x_2, y_2, z_2]$ respectivamente. Em $\mathbb{R}^3$,os pontos de coordenadas (0,0,0), $(x_1, y_1.z_1)$ e (x_2, y_2, z_2) determinam um plano e este plano tem equação $det \begin{bmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = 0,$

pois um cálculo imediato mostra que os pontos dados satisfazem esta equação.

Reescrevemos esta última equação da forma $ax + by + cz = 0$, onde $a = y_1z_2 - y_2z_1$, $b = x_2z_1 - x_1z_2$ e $c = x_1z_2 - x_2z_1$.

Desta forma, as coordenadas homogêneas dos pontos P_1 e P_2 satifazem a equação $ax + by + cz = 0$. Ademais, o ponto de coordenadas homogêneas [a,-b,0] satisfaz esta equação e é portanto o ponto ideal da reta. Observamos ainda que fazendo z igual a 1 na equação $ax+by+cz = 0$, obtemos a equação da parte euclidiana da reta r.

Aqui é importante salientar que:

Uma equação do tipo $ax + by + cz = 0$ pode ser interpretada de duas maneiras distintas:

a) Se x,y,z forem coordenadas do espaço $\mathbb{R}^3$, então $ax+by+cz = 0$ representa um plano que passa na origem do $\mathbb{R}^3$.

b) Se x,y,z forem coordenadas homogêneas do plano projetivo standard, $ax+by+cz=0$ representa um reta neste plano. Sua parte euclidiana é $ax+by+c=0$,$z=1$ e seu ponto ideal tem coordenadas homogêneas [b,-a,0]

Exemplo 1: A equação $x+y+z=0$, vista como equação no $\mathbb{R}^3$ representa um plano que passa na origem. Este plano intersectado com o plano π_1 define a reta de equação $x+y+1=0$ e $z=1$. Além disto, esta reta tem o ponto de coordenadas homogêneas [1, -1,0] como seu ponto ideal. Por outro lado, vista como equação em $\mathbb{R}P^2$, a equação $x+y+z=0$ representa uma reta do plano projetivo standard. Para obter pontos desta reta, basta encontrar elementos de $\mathbb{R}P^2$ que satisfaçam esta equação. Por exemplo [1,2,-3] é ponto desta reta, mas [1,2,3] não é.

Exemplo 2: Para determinar a equação da reta que contém o ponto $P_1 = [1,2,3]$ e $P_2 = [3,4,5]$, calculamos $det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 0$ e obtemos a equação $-2x+4y-2z=0$, que pode ser simplificada para a equação $x-2y+z=0$. Aqui é importante, sempre que este cálculo for feito, ter a certeza de que não foi cometido nenhum erro, e, para isto, verifique se os pontos dados satisfazem a equação obtida. No caso em questão, as verificações são $1-2.2+3=0$ e $3-2.4+5=0$, que são verdadeiras, portanto a equação obtida está correta.

Exemplo 3: Em muitos casos podemos usar a geometria projetiva para resolver problemas da geometria euclidiana.(Veja por exemplo o exercício 5 do capítulo 5, Invariância da Razão Cruzada). Considere então o problema de encontrar a equação da reta que passa nos pontos $(\frac{3}{5}, \frac{7}{5})$ e $(0, \frac{2}{3})$. Usando a equação da reta no plano projetivo basta encontrar a equação da reta que passa nos pontos de coordenadas homogêneas [3,7,5] e [0,2,3]. Para isto calculamos $det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 0$ obtendo $11x-9y+6z=0$. Para obter a equação pedida basta fazer z=1, ou seja, $11x-9y+6=0$.

Exemplo 4: Dada a reta, em π_1, de equação $y=2x+8$ e $z=1$, a equação da reta projetiva formada por esta reta e seu ponto ideal é $2x-y+8z=0$. Observe que fazendo $z=1$ nesta última equação reobtemos a equação inicial.

Exemplo 5: A equação $z=0$ representa a reta dos pontos ideais de $\mathbb{P}^2$.

Exemplo 6: O ponto ideal da reta $x=0$ é [0,1,0] e o ponto ideal da reta $y=0$ é [1,0,0].

Vale então a seguinte proposição:

Proposição 3: Para toda reta $r \subset I\!\!P^2$, existem números reais a,b,c não todos nulos tais que $P_1 = [x_1, y_1.z_1] \in r$ se, somente se, $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$. Reciprocamente se a, b, c são números reais, não todos nulos, o conjunto dos pontos $P_1 = [x_1, y_1, z_1]$, que satisfazem $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$ representa uma reta em $I\!\!P^2$.

Podemos também, dadas as equações de duas retas r_1 e r_2, encontrar as coordenadas homogêneas do ponto de interseção destas retas. Desta forma, se r_1 tem equação $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ e r_2 tem equação $a_2x + b_2y + c_2z = 0$, encontramos as coordenadas homogêneas do ponto de interseção resolvendo a equação $det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 0$, ou seja, $[b_1c_2 - b_2c_1, a_2c_1 - a_1c_2, a_1b_2 - a_2b_1]$ é o ponto de interseção das duas retas. Lembramos aqui que no determinante formal acima, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ representam os vetores básicos do $I\!\!R^3$.

Um outro resultado interessante é o seguinte:

Proposição 4: Dados três pontos $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$ e $C = [c_1, c_2, c_3]$ em $I\!\!RP^2$, temos que:

a) A, B, C são colineares se e somente se,

$$det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = 0$$

.

b) A, B, C são colineares se e somente se, existem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, não todos nulos, tais que $\lambda_1(a_1, a_2, a_3) + \lambda_2(b_1, b_2, b_3) + \lambda_3(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$.

A proposição que segue será muito importante no método que vamos apresentar, no próximo capítulo, para obter as matrizes que representam todas as transformações projetivas do plano projetivo.

Proposição 5: Dados quatro pontos $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$ e $D = [d_1, d_2, d_3]$ em $I\!\!RP^2$, temos que A, B, C, D são três a três não colineares se, somente se, existem constantes $\lambda_1 \neq 0$,$\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$ $\lambda_4 \neq 0$ tais que $\lambda_1(a_1, a_2, a_3) + \lambda_2(b_1, b_2, b_3) + \lambda_3(c_1, c_2, c_3) = \lambda_4(d_1, d_2, d_3)$.

Exemplo 7: De acordo com a proposição 4, os pontos A=[0,1,3], B=[1,0,2] e C=[1,1,5] são colineares. Observe que, neste caso, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$.

Ainda como aplicação da proposição 4, podemos descrever uma reta de forma paramétrica, ou seja, usando um parâmetro t. Como exemplo considere dois pontos $P_1 = [1, 2, 7]$ e $P_0 = [3, 4, 5]$ e seja $P_t = [t.1 + (1-t).3, t.2 + (1-t).4, t.7 + (1-t).5]$. Observamos que fazendo $t = 1$, reobtemos P_1 e fazendo

$t = 0$, reobtemos P_0. Além disto P_t está na reta determinada por P_0 e por P_1, qualquer que seja t real, como conseqüência da proposição 4. Observe que variando t em $I\!R$ não conseguimos obter todos os pontos da reta projetiva determinada por P_0 e por P_1. Na realidade falta um ponto e para obtê-lo é preciso fazer t tender a infinito. Como $P_t = [1+\frac{1-t}{t}.3, 2+\frac{1-t}{t}.4, 7+\frac{1-t}{t}.5]$, temos que $P_\infty = [1-3, 2-4, 7-5] = [-2,-2,2] = [1,1,-1]$. Desta forma a descrição paramétrica da reta determinada por P_0 e por P_1 é $\{P_t/t \in I\!R\} \cup \{[1,1,-1]\}$. Observe que P_∞ não é, neste caso, o ponto ideal da reta. Entretanto é possível parametrizar esta mesma reta usando outras coordenadas homogêneas dos pontos P_0 e P_1 de forma que nesta nova parametrização o ponto P_∞ é o ponto ideal. Como exercício, obtenha a parametrização desta reta sendo $P_1 = [\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, 5]$ e $P_0 = [3,4,5]$. Nesta parametrização o P_∞ é o ponto ideal da reta.

Podemos ainda usar a proposição anterior para obter uma prova analítica do **Teorema de Desargues**.Veja o enunciado deste teorema no capítulo 4.

Prova: Por hipótese A, A', O são colineares, B, B', O são colineares e C, C', O são colineares. Assim, podemos escolher as coordenadas homogêneas destes pontos da seguinte forma: $A = [a_1,a_2,a_3]$, $B = [b_1,b_2,b_3]$, $C = [c_1,c_2,c_3]$, $A' = [a_1',a_2',a_3']$, $B' = [b_1',b_2',b_3']$, $C' = [c_1',c_2',c_3']$, $O = [o_1,o_2,o_3]$, com $(a_1,a_2,a_3)+(a_1',a_2',a_3') = (o_1,o_2,o_3)$, $(b_1,b_2,b_3)+(b_1',b_2',b_3') = (o_1,o_2,o_3)$, $(c_1,c_2,c_3)+(c_1',c_2',c_3') = (o_1,o_2,o_3)$.

Assim, temos que

$$(a_1,a_2,a_3)+(a_1',a_2',a_3') = (b_1,b_2,b_3)+(b_1',b_2',b_3') = (c_1,c_2,c_3)+(c_1',c_2',c_3').$$

Consequentemente, $(a_1,a_2,a_3)-(b_1,b_2,b_3) = (b_1',b_2',b_3')-(a_1',a_2',a_3')$, $(b_1,b_2,b_3)-(c_1,c_2,c_3) = (c_1',c_2',c_3')-(b_1',b_2',b_3') e (c_1,c_2,c_3)-(a_1,a_2,a_3) = (a_1',a_2',a_3')-(c_1',c_2',c_3')$

Segue daí que

$$[a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3] = [a_1'-b_1', a_2'-b_2', a_3'-b_3'] = P$$

$$[b_1-c_1, b_2-c_2, b_3-c_3] = [b_1'-c_1', b_2'-c_2', b_3'-c_3'] = Q$$

$$[a_1-c_1, a_2-c_2, a_3-c_3] = [a_1'-c_1', a_2'-c_2', a_3'-c_3'] = R$$

Observe que $(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)+(b_1-c_1, b_2-c_2, b_3-c_3) = (a_1-c_1, a_2-c_2, a_3-c_3)$ e portanto P, Q e R são colineares.

Usamos este procedimento para determinar todas as perspectivas de retas, como feito no capítulo anterior, mas agora de forma analítica. Vejamos um exemplo.

Exemplo 8: Considere as retas r e s de equações $x + y + 3z = 0$ e $3x + 2y + z = 0$, respectivamente, e seja $O = [1, 2, 1]$ o centro da perspectiva $p : r \longrightarrow s$. Podemos encontrar a imagem de qualquer ponto da reta r na reta s. Tomemos o ponto $P = [1, 2, -1]$. Para obter p(P), determinamos inicialmente a equação da reta que contém O e P. Esta equação é $2x - y = 0$ e o ponto de interseção da reta que contém O e P com a reta s é o ponto p(P)=[1,2,-7].

Em geral para se obter as coordenadas homogêneas do ponto p(P), onde $P = [p_1, p_2, p_3]$, $p : r \longrightarrow s$ é uma perspectiva de centro $O = [o_1, o_2, o_3]$ e s é a reta de equação $ax + by + cz = 0$, calculamos inicialmente a equação da reta que passa em O e em P. Esta equação é dada por $(o_2p_3 - o_3p_2)x + (o_3p_1 - o_1p_3)y + (o_1p_2 - o_2p_1)z = 0$. O ponto p(P) é o ponto de interseção desta reta com a reta s. Calculamos então o determinante

$$det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (o_2p_3 - o_3p_2) & (o_3p_1 - o_1p_3) & (o_1p_2 - o_2p_1) \\ a & b & c \end{bmatrix} = 0$$

e obtemos $p(P) = [(o_3p_1 - o_1p_3)c - (o_1p_2 - o_2p_1)b, (o_1p_2 - o_2p_1)a - (o_2p_3 - o_3p_2)c, (o_2p_3 - o_3p_2)b - (o_3p_1 - o_1p_3)a] = [p_1(co_3 + bo_2) - p_2(bo_1) - p_3(co_1), -p_1(ao_2) + p_2(ao_1 + co_3) - p_3(co_2), -p_1(ao_3) - p_2(bo_3) + p_3(ao_1 + bo_2)]$. Fazendo a seguinte aplicação de matrizes: $(p_1p_2p_3) \begin{bmatrix} bo_2 + co_3 & -ao_2 & -ao_3 \\ -bo_1 & ao_1 + co_3 & -bo_3 \\ -co_1 & -co_2 & ao_1 + bo_2 \end{bmatrix}$, obtemos as mesmas coordenadas de p(P). Desta forma, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema: Seja s a reta de equação $ax + by + cz = 0$ e $O = [o_1, o_2, o_3]$. Então, a perspectiva $p : r \longrightarrow s$, de centro O é representada pela matriz

$$M = \begin{bmatrix} bo_2 + co_3 & -ao_2 & -ao_3 \\ -bo_1 & ao_1 + co_3 & -bo_3 \\ -co_1 & -co_2 & ao_1 + bo_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, dado um ponto $P = [p_1, p_2, p_3]$, sua imagem p(P) tem coordenadas homogêneas

$$[p_1p_2p_3] \begin{bmatrix} bo_2 + co_3 & -ao_2 & -ao_3 \\ -bo_1 & ao_1 + co_3 & -bo_3 \\ -co_1 & -co_2 & ao_1 + bo_2 \end{bmatrix},$$

ou seja, $p(P) = [p_1(co_3 + bo_2) - p_2(bo_1) - p_3(co_1), -p_1(ao_2) + p_2(ao_1 + co_3) - p_3(co_2), -p_1(ao_3) - p_2(bo_3) + p_3(ao_1 + bo_2)]$.

Observamos que a matriz obtida acima não é inversível. Entretanto ela tem duas linhas (e duas colunas) linearmente independentes. Este tipo de matriz é chamada **matriz de posto 2**.

Além disto, se $p_1 : r \longrightarrow s$ é uma perspectiva de centro O_1, representada pela matriz 3x3, M_1 e $p_2 : s \longrightarrow t$ é uma perspectiva de centro O_2, representada pela matriz 3x3, M_2, então $p_2 \circ p_1 : r \longrightarrow t$ é uma transformação projetiva de retas representada pela matriz $M_1.M_2$.

Exercícios:

1. Seja P o ponto do plano projetivo de coordenadas homogêneas [1,0,3]. Encontre outros representantes de [1,0,3].

2. (a) Liste três representantes distintos do ponto $P = [1, -2, 3]$ no plano projetivo.

   (b) Verifique quais pares de pontos são os mesmos e explique porque:

      i. $A = [3, 1, 7]$ e $B = [-6, -2, -14]$;
      ii. $A = [2, 7, 0]$ e $B = [7, 2, 0]$;
      iii. $A = [1, 5, 7]$ e $B = [3, 15, 21]$;
      iv. $A = [1, 0, a]$ e $B = [\frac{1}{a}, 1, 1]$

3. A notação [1,2,3] tanto pode representar um ponto, como uma reta do plano projetivo. Explique esse fato e faça um esboço do ponto e da reta.

4. Encontre as equações das retas, que são extensões ao plano projetivo, das seguintes retas euclidianas:

   (a) $x + y = 1$

   (b) $x + 2y = 0$

5. Encontre a equação da reta que passa no ponto ideal da reta $3x+y = 0$ e que contém o ponto de interseção das retas $x+y+z = 0$, $x-y-z = 0$.

6. Dados os pontos $P = [1, 1, 1]$ e $Q = [2, 1, 3]$, encontre o ponto ideal da reta que eles determinam. Faça um gráfico desenhando esta reta.

7. Dados P, ponto de coordenadas homogêneas [1,2,4], e Q, ponto de coordenadas homogêneas [3,1,2], determine a equação da reta no plano π_1 que contém P e Q.

8. Dada a reta de equação $x + 3y = 4$ e z=1, determine as coordenadas homogêneas do seu ponto ideal. Faça o mesmo para a reta de equação $x + 3y = 0$.

9. Considere a reta r de equação $x+y = 0$ e tome os pontos $A = [1, -1, 1]$, $B = [1, -1, 2]$ e $C = [1, -1, 3]$. Quais são as coordenadas homogêneas do conjugado harmônico de A com relação a B e C?

10. Dados $A = [1, -1, 0]$, $B = [2, 1, -3]$, $C = [1, -3, 2]$.

    (a) Determine a equação da reta r que contém A, B e C.

    (b) Seja $p : r \longrightarrow r$ a transformação projetiva tal que $p(A) = A$, $p(B) = C$, $p(C) = B$.
    Determine o ponto $D \neq A$ tal que $p(D) = D$.

11. Encontre as coordenadas homogêneas do ponto de interseção das retas $l = [2, 3, 1]$ e $r = [3, 2, 2]$. Encontre a equação da reta que passa no ponto [0,0,1] e no ponto ideal da reta l. Faça o mesmo para a reta r.

12. Encontre as coordenadas homogêneas do ponto de interseção das retas $l = [1, 2, 3]$ e $m = [2, 3, 1]$. Encontre a equação da reta que passa por este ponto e contém o ponto ideal [0,1,0].

13. Encontre o ponto de interseção das retas:

    (a) $r = \{P_t = [3t + 1, 2t - 2, t + 3]/t \in I\!R\} \cup \{[3, 2, 2]\}$ e $s = \{P_t = [2t, t, 2t - 3]/t \in I\!R\} \cup \{[2, 1, 2]\}$

    (b) r e a reta ideal.

    (c) $m = \{P_t = [2t, 3t, t + 1], t \in I\!R\} \cup \{[2, 3, 1]\}$ e $n : x + y + z = 0$.

    (d) $u = \{P_t = [-t + 2, t + 1, 2t + 1], t \in I\!R\} \cup \{[1, -1, -2]\}$ e a reta ideal.

    (e) $v = \{P_t = [-t, 2t, t + 1], t \in I\!R\} \cup \{[-1, 2, 1]\}$ e $w : x - y + z = 0$.

14. A hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ pode ser parametrizada por $x = a.sec\theta$, $y = b.tg\theta$. Encontre as coordenadas homogêneas dos pontos ideais na curva no plano projetivo determinada pela hipérbole.

15. Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano projetivo e as retas do plano projetivo que associa a cada ponto com coordenadas homogêneas [x,y,z] a reta com coordenadas homogêneas [x,y,z]. Usando este resultado, prove:

    (a) A reta dual da origem O do plano projetivo é a reta ideal.

    (b) A reta dual de um ponto $P \neq 0$, é determinada da seguinte maneira: Desenhe a reta euclidiana m contendo P e O e determine o ponto Q em m tal que $dist(0, Q) = \frac{1}{dist(0,P)}$. A reta dual a P e a reta que contém P e é perpendicular à m.

    (c) A reta dual de um ponto ideal é a reta determinada pela reta euclidiana passando na origem que é perpendicular à direção do ponto ideal.

16. Seja $A = [1, 1, 0]$, $B = [1, 0, 1]$, $C = [2, 1, 1]$ e $A' = [0, 1, 1]$, $B' = [0, 0, 1]$, $C' = [a, b, c]$. Encontre a,b,c de tal forma que os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ satisfaçam as condições do teorema de Desargues.

17. A reta r tem a seguinte parametrização: $r = \{[t, t, 1 - t]/t \in I\!R\} \cup P_\infty$.

    (a) Encontre as coordenadas do ponto P_∞.

    (b) Encontre outra parametrização de r de tal forma que o ponto ideal de r seja o ponto do infinito.

18. Verifique se as ternas de pontos são colineares:

    (a) $P = [1, 2, 1]$, $Q = [2, 2, 3]$, $R = [0, 10, -5]$;

    (b) $P = [0, 0, 1]$, $Q = [0, 1, 0]$, $R = [1, 0, 0]$.

19. Caso alguma das ternas do exercício anterior seja colinear, encontre uma parametrização da reta que os contém.

20. Parametrize a reta l=$[1, 1, 1]$ de tal forma que [1,0,-1] seja o ponto do infinito nesta parametrização. Parametrize de outra forma para que o ponto do infinito seja o ponto ideal da reta.

21. Seja r a reta que contem os pontos $A = [1, 1, -1], B = [1, 0, -1], C = [0, 1, 0]$ e r' a reta que contém os pontos $A' = [2, 1, -1], B' = [-1, 1, 2] e C' = [3, 4, 1]$. Encontre a matriz que representa a projetividade $p : r \longrightarrow r'$

tal que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$ e $p(C) = C'$. Encontre as coordenadas de p(D), sendo $D = [3, 2, -3]$.

22. A projetividade $p : r \longrightarrow m$ que leva $A = [0, 0, 1]$ em $A' = [1, -1, 0]$ e $B = [4, -3, 1]$ em $B' = [0, 1, -1]$ é uma perspectiva de retas. Encontre seu centro e a matriz que representa p. Encontre as coordenadas do ponto p(C), sendo $C = [-4, 3, 2]$.

23. Dada a projetividade $p : r \longrightarrow r$ tal que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$ e $p(C) = C$, onde $r = [1, 1, 1]$, $A = [1, -1, 0]$, $B = [0, 1, -1]$, $C = [1, 0, -1]$, $A' = [2, -1, -1]$, $B' = [-1, 2, -1]$, determine uma matriz 3x3 de posto 2 que representa p.

24. Seja $p : r \longrightarrow l$ a perspectiva de retas que satisfaz $p(A) = A'$, $p(B) = B'$ e $p(C) = C$, onde $A = [3, 0, -1]$, $B = [0, -3, 2]$, $A' = [-3, 2, 0]$, $B' = [0, -1, 3]$.

    (a) Encontre as coordenadas homogêneas do ponto C.

    (b) Encontre as coordenadas homogêneas do centro da perspectiva.

    (c) Encontre a matriz que representa p.

    (d) Encontre as coordenadas de p(D), sendo $D = [2, -1, 0]$.

25. Encontre o valor da razão cruzada R(A, B, C, D), sendo $A = [1, 2, -3]$, $B = [3, 3, 2]$, $C = [2, 1, 1]$ e $D = [3, 0, 5]$ pontos colineares.

26. Encontre o valor da razão cruzada R(A,B,C,D) e compare com R(p(A),p(B),p(C),p(D)) sendo $A = [-1, -1, 2]$, $B = [0, -2, 1]$, $C = [2, -4, -1]$ e $D = [5, -5, -5]$ e $p : r \longrightarrow r'$ é a projetividade cuja matriz é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$.

27. Encontre a matriz 3x3 que representa a transformação projetiva $p : r \longrightarrow r$ tal que $p(A) = B$, $p(B) = A$, $p(C) = D$, onde $A = [1, -2, 0]$, $B = [0, 0, 1]$, $C = [1, -2, 1]$ e $D = [1, -2, 2]$.

28. Seja r a reta que contém os pontos $A = [1, 1, 0]$, $B = [1, 0, -1]$, $C = [0, 1, 1]$, $A' = [2, 1, -1]$, $B' = [-1, 1, 2]$. Encontre a matriz que representa a transformação projetiva $p : r \longrightarrow r$ tal que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$ e $p(C) = C$.

29. Encontre a matriz 3x3 que representa a projetividade $p_1 \circ p_2 : l \longrightarrow r$, onde $p_1 : l \longrightarrow m$ e $p_2 : m \longrightarrow r$ são perspectivas de centro O_1 e O_2, respectivamente, com $l = [0, 1, 2]$, $m = [1, 1, 1]$, $r = [3, 4, 0]$, $O_1 = [0, 0, 1]$ e $O_2 = [1, 0, 0]$.

30. Considere a perspectiva $p : l \longrightarrow m$ representada pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

    Encontre as coordenadas homogêneas do centro desta perspectiva e as coordenadas homogêneas da reta m. Se $P = [0, 1, 0]$, determine p(P).

CAPÍTULO 7

Transformações Projetivas no Plano Projetivo

Como foi visto no capítulo anterior, dada uma perspectiva de retas $p : r \longrightarrow s$, existe uma matriz 3x3 de posto 2, M, tal que se $P = [p_1, p_2, p_3]$, a sua imagem é $p(P) = [(p_1 p_2 p_3)M]$. No caso de uma perspectiva plana, $p : I\!RP^2 \longrightarrow I\!RP^2$, como definido no capítulo 3, vale também que se $[p_1, p_2, p_3] \in I\!RP^2$, existe uma matriz 3x3 inversível, M, tal que a imagem p(P) é o elemento $[(p_1 p_2 p_3)M] \in I\!RP^2$.

Para ver isto, é suficiente considerar o seguinte exemplo. O caso geral poderá ser feito de maneira análoga.

Considere então a perspectiva plana em $I\!RP^2$ que tem a reta de equação $x+y=0$ como linha de terra, $O = [1, 0, 1]$ como centro e a imagem do ponto $P = [0, 1, 1]$ é o ponto $P' = [1, 1, 2]$.

Vamos obter a imagem de um ponto genérico $Q = [x_0, y_0, z_0]$. Para isto, procedemos como indicado no capítulo 3.

1. Encontramos a equação da reta r que contém P e Q. Esta equação é $(z_0 - y_0).x + x_0.y - x_0.z = 0$.

2. Obtemos o ponto $(L.T.) \cap r = L = [-x_0, x_0, x_0 + y_0 - z_0]$.

3. Determinamos a equação da reta s que contém O e Q. Esta equação é $(-y_0).x + (x_0 - z_0)y + y_0.z = 0$.

4. Determinamos a equação da reta t que contém L e P'. Esta equação é $(-x_0 + y_0 - z_0).x - (3x_0 + y_0 - z_0).y + 2x_0.z = 0$.

5. Finalmente, determinamos o ponto $Q' = s \cap t = [(2x_0 + y_0).(x_0 + y_0 - z_0), y_0.(x_0 + y_0 - z_0), (x_0 + y_0 + z_0).(x_0 + y_0 - z_0)]$.

Na obtenção das coordenadas homogêneas de Q', apareceu o fator $(x_0 + y_0 - z_0)$ que não pode ser nulo e portanto $Q' = [(2x_0 + y_0), y_0, (x_0 + y_0 + z_0)]$.

Aqui é importante ressaltar o grau de precisão que encontramos ao usar as coordenadas homogêneas. No cálculo que acabamos de fazer, foi detectado pelas coordenadas homogêneas, que os pontos da reta que contém P e O, que é a reta de equação $x+y-z=0$ não podem ser calculados, pois em Q' todas as coordenadas serão nulas. Este fato detectado pelo cálculo pode também ser visto geometricamente, pois, tomando o ponto Q na reta que contém P e

O, não é possível obter a sua imagem com os cálculos feitos acima. E assim, os pontos desta reta foram, à priori, excluídos. Entretanto, ao eliminar o termo $(x_0 + y_0 - z_0)$, a fórmula final de Q' permite calcular a imagem de qualquer ponto Q de $I\!RP^2$.

Suprimindo o índice 0, temos que se $Q = [x, y, z] \in I\!RP^2$, sua imagem, pela perspectiva plana, é $Q' = [2x + y, y, x + y + z]$.

Observamos ainda que $(xyz)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (2x + y, y, x + y + z)$.

Desta forma, a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz que representa a perspectiva plana dada.

De forma recíproca, dada a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ e sabendo que esta matriz representa a perspectiva plana $p : I\!RP^2 \longrightarrow I\!RP^2$ onde $p[x, y, z] = [2x, 3x + 7y, x + 7z]$, podemos determinar a equação da linha de terra e as coordenadas homogêneas do centro. Para isto, fazemos $[x, y, z] = [2x, 3x + 7y, x + 7z]$ e obtemos que $\lambda x = 2x$, $\lambda y = 3x + 7y$ e $\lambda z = x + 7z$. Segue da primeira equação que ou $\lambda = 2$ ou $x = 0$. Se $\lambda = 2$, temos que $3x + 5y = 0$ e $x + 5z = 0$. Segue daí que $O = [-5, 3, 1]$ é o centro da perspectiva. O outro caso, ou seja, $x = 0$ é a equação da linha de terra.

Em geral, dada uma matriz 3x3 inversível, esta não representa necessariamente uma perspectiva plana. Tomemos como exemplo a matriz $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 6 \\ 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ obtida pelo produto das matrizes $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Essa nova matriz representa a transformação projetiva obtida pela composta das duas perspectivas planas dadas e que não é uma perspectiva plana. Uma questão interessante é reconhecer dentre as matrizes 3x3 inversíveis, aquelas que representam uma perspectiva plana.

Voltando ao primeiro exemplo dado, existe um método mais geral e mais fácil de obter a matriz de qualquer transformação projetiva do plano projetivo desde que, dados quatro pontos distintos do plano projetivo,três a três não colineares, se conheça as suas imagens, que serão também quatro pontos distintos, três a três não colineares.

Antes de formalizar este método, vamos exemplificá-lo usando o primeiro exemplo dado. Escolhemos os seguinte quatro pontos: $A = [1, 0, 1]$, $B = [1, -1, 2]$, $C = [-1, 1, 1]$, $D = [0, 1, 1]$ e lembramos que A é o centro da perspectiva , B e C são pontos da linha de terra e D é o ponto P. Pela proposição 5 do capítulo anterior temos que estes quatro pontos são três a três não colineares, pois basta tomar $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ e $\lambda_4 = -3$. Reescrevemos $A = [-3, 0, -3]$, $B = [1, -1, 2]$ e $C = [2, -2, -2]$ e obtemos a matriz $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$. A partir desta matriz, obtemos a transposta da matriz de seus cofatores, ou seja, obtemos a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Consideremos agora a transformação projetiva representada por esta matriz. Essa transformação projetiva leva o ponto A no ponto [1,0,0], o ponto B no ponto [0,1,0], o ponto C no ponto [0,0,1] e o ponto D no ponto [1,1,1]. Consideremos agora os pontos $A' = [1, 0, 1]$, $B' = [1, -1, 2]$, $C' = [-1, 1, 1]$ e $D' = [1, 1, 2]$, lembrando que A'=A=O, B'=B, C'=C e D'=P'. Novamente, usando a proposição 5, temos que estes quatro pontos são três a três não colineares, pois basta tomar $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_4 = 3$. Reescrevemos $A' = [6, 0, 6]$, $B' = [-1, 1, -2]$, $C' = [-2, 2, 2]$ e obtemos a matriz $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Esta matriz representa a transformação projetiva que leva o ponto [1,0,0] no ponto A', o ponto [0,1,0] no ponto B', o ponto [0,0,1] no ponto C' e o ponto [1,1,1] no ponto D'. Fazendo a composta destas duas transformações projetivas obtemos a transformação projetiva que fixa O, B e C, e leva P em P'. Sua matriz é dada pelo produto das duas matrizes obtidas, ou seja, $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ resultando na matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Observe que esta é a matriz da perspectiva plana obtida inicialmente.

Formalização do Método de Construção de uma Projetividade

Dados quatro pontos distintos, três a três não colineares, A, B, C e D, e outros quatro pontos distintos três a três não colineares, A', B', C' e D', em

$I\!\!RP^2$, determinamos coordenadas homogêneas para esses pontos com $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$, $D = [d_1, d_2, d_3]$, $A' = [a'_1, a'_2, a'_3]$, $B' = [b'_1, b'_2, b'_3]$, $C' = [c'_1, c'_2, c'_3]$ e $D' = [d'_1, d'_2, d'_3]$, onde $a_i + b_i + c_i = d_i$ com $i = 1, 2, 3$ e $a'_j + b'_j + c'_j = d'_j$ com $j = 1, 2, 3$.

A partir das coordenadas obtemos as matrizes

$$M_0 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{bmatrix}.$$

Considere agora os pontos $P = [1, 0, 0]$, $Q = [0, 1, 0]$, $R = [0, 0, 1]$ e $S = [1, 1, 1]$. Então $[(100)M_0] = A$, $[(010)M_0] = B$, $[(001)M_0] = C$ e $[(111)M_0] = D$. Seja então M_2 a transposta da matriz dos cofatores de M_O, então $[(a_1a_2a_3)M_2] = P$, $[(b_1b_2b_3)M_2] = Q$, $[(c_1c_2c_3)M_2] = R$ e $[(d_1d_2d_3)M_2] = S$. Temos ainda que $[(100)M_1] = A'$, $[(010)M_1] = B'$, $[(001)M_1] = C'$ e $[(111)M_1] = D'$. Finalmente, seja M a matriz produto $M_2.M_1$. Com um cálculo imediato obtemos que $[(a_1a_2a_3)M] = A'$, $[(b_1b_2b_3)M] = B'$, $[(c_1c_2c_3)M] = C'$, $[(d_1d_2d_3)M] = D'$. Desta forma obtivemos uma matriz que representa uma transformação projetiva que leva A em A', B em B', C em C' e D em D'.

Vejamos agora um exemplo:

Tomemos os pontos A=[1,2,1], B=[0,1,0], C=[1,0,2], D=[2,3,3], A'=[1,0,0], B'=[2,1,0], C'=[0,1,2] e D'=[2,1,1]. Queremos construir uma transformação projetiva do plano projetivo que leve A em A', B em B', C em C' e D em D'. Para isto procedemos como na formalização anterior. Como as coordenadas dos pontos A, B, C e D já estão acertadas, tomamos a matriz $M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e, desta forma, $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. No caso das coordenadas dos pontos A', B', C' e D', elas precisam ser acertadas para que a soma das coordenadas de A', B', C' resulte nas respectivas coordenadas de D'. Para isto, basta resolver o sistema $a+2b = 2d$, $b+c = d$, $2c = d$. Tomando $c = 1$, obtemos $d = 2$, $b = 1$ e finalmente $a = 2$. Desta forma, temos a matriz $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. A matriz que representará a transformação projetiva é

$$M = M_2.M_1 = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

No método mostrado acima, temos que sempre que forem dados quatro pontos, três a três não colineares, e outros quatro pontos três a três não colineares, é posível construir uma transformação projetiva que leva os quatro primeiros pontos nos quatro últimos. A questão essencial é se, dado um quinto ponto, a sua imagem já está definida nesta construção. Essa questão é respondida pelo teorema a seguir.

Teorema Fundamental da Geometria Projetiva (para planos) Seja A, B, C, D quatro pontos do plano projetivo, três a três não colineares e A', B', C', D' quatro pontos do plano projetivo, três a três não colineares. Então existe uma **única** transformação projetiva que leva A em A', B em B', C em C' e D em D'.

Prova: Dados A, B, C, D, quatro pontos três a três não colineares e A', B', C', D' outros quatro pontos três a três não colineares, a existência de uma transformação projetiva que leva A em A', B em B', C em C' e D em D', é garantida pelo método exposto anteriormente. Para ver a unicidade, mostramos inicialmente que se $p : I\!\!RP^2 \longrightarrow I\!\!RP^2$ é tal que $p([1,0,0]) = [1,0,0]$, $p([0,1,0]) = [0,1,0]$, $p([0,0,1]) = [0,0,1]$ e $p([1,1,1]) = [1,1,1]$, então p é necessariamente a identidade. Usando novamente o método dado anteriormente, obtemos que a matriz que representa p é a matriz $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Segue daí que p é a identidade.

Suponha agora que p_1 e p_2 são duas transformações projetivas que levam A em A', B em B', C em C' e D em D'. Usando as coordenadas homogêneas já acertadas para estes pontos, escrevemos $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, $C = [c_1, c_2, c_3]$, $A' = [a'_1, a'_2, a'_3]$, $B' = [b'_1, b'_2, b'_3]$, $C' = [c'_1, c'_2, c'_3]$ e construímos as matrizes $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 \end{bmatrix}$ e que são representantes de duas transformações projetivas do plano projetivo, q_1 e q_2, tais que $q_1([1,0,0]) = A$, $q_1([0,1,0]) = B$, $q_1([0,0,1]) = C$, $q_2([1,0,0]) = A'$, $q_2([0,1,0]) = B'$, $q_1([0,0,1]) = C'$. Assim, a transformação projetiva $p = (q_2^-1 \circ p_1 \circ q_1) \circ (q_1^-1 \circ p_2^-1 \circ q_2)$ leva [1, 0, 0] em [1, 0, 0], [0, 1, 0] em [0, 1, 0],[0, 0, 1] em [0, 0, 1] e [1, 1, 1] em [1, 1, 1]. Segue daí que p e a identidade e como conseqüência $p_1 = p_2$.

Transformações Euclidianas, vistas como restrições ao plano π_1, de Transformações Projetivas no Plano Projetivo

Apresentamos a seguir, as isometrias, as homotetias e as semelhanças como transformações projetivas, restritas ao plano euclidiano π_1. Por outro lado, uma inversão não tem um representante projetivo, uma vez que transformações projetivas são obtidas como compostas de perspectivas planas e portanto preservam retas. Uma inversão leva uma reta ou noutra reta ou numa circunferência.

1. **Translações**

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$ representa uma transformação projetiva, cuja restrição ao plano π_1 é a translação de vetor v = (a,b). Observe que a transformação projetiva que estende a translação, fixa todos os pontos da reta ideal.

2. **Rotação de ângulo α e centro(a,b)**

A matriz

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ sen\alpha & cos\alpha & 0 \\ -a.cos\alpha + b.sen\alpha + a & -a.sen\alpha - b.cos\alpha + b & 1 \end{bmatrix}.$$

representa uma transformação projetiva, cuja restrição ao plano π_1 é a rotação de ângulo α e centro (a,b).

3. **Reflexão em relação a uma reta**

A matriz $\begin{bmatrix} 1-m^2 & 2m & 0 \\ 2m & -(1-m^2) & 0 \\ -2b & 2b & 1+m^2 \end{bmatrix}$ representa uma transformação projetiva, cuja restrição ao plano π_1 é a reflexão com relação à reta de equação $y = mx + b$ e $z = 1$.

A matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2b & 0 & 1 \end{bmatrix}$ representa uma transformação projetiva, cuja restrição ao plano π_1 é a reflexão com relação à reta de equação $x = b$ e $z = 1$.

4. **Homotetia**

A matriz $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ (1-k)a & (1-k)b & 1 \end{bmatrix}$ representa uma transformação projetiva, cuja restrição ao plano π_1 é a homotetia de razão k e centro (a,b).

Observamos que neste caso, a transformação projetiva que estende a homotetia, fixa todos os pontos da reta ideal.

5. **Semelhanças**

Uma semelhança é a composta de isometrias e de homotetias e portanto é a restrição ao plano π_1 de uma transformação projetiva.

As matrizes apresentadas acima, podem ser obtidas pelo método dado anteriormente. Como exemplo, consideremos a reflexão em relação á reta de equação $y = x + 1$ e $z = 1$. A extensão desta reta ao plano projetivo é a reta de equação $x - y + z = 0$. Consideremos os pontos A = [-1,0,1], B = [0,0,1], C = [0,1,1], D = [-1,1,1]. Estes pontos são três a três não colineares, A e C estão na reta e portanto são pontos fixos pela reflexão. B é refletido em D e D é refletido em B e assim A'= [-1,0,1], B' = [-1,1,1], C' = [0,1,1], D' = [0,0,1]. Para que as coordenadas homogêneas de A,B,C,D fiquem ajustadas, escrevemos A = [-1,0,1], B = [0,0,-1], C = [0,1,1], D = [-1,1,1]. As coordenadas homogêneas de A',B',C',D' ficarão ajustadas escrevendo A'= [-1,0,1], B' = [1,-1,-1], C' = [0,1,1], D' = [0,0,1]. . Desta forma a matriz que representa esta reflexão no plano projetivo é obtida pelo produto das matrizes
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ o & 1 & 1 \end{bmatrix}$
que resulta na matriz, $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Resaltamos que esta última matriz e a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, obtida da matriz que representa a reflexão com relação à reta de equação $y = mx + b$ e $z = 1$, no caso em que $m = b = 1$, são dois representantes distintos da mesma transformação projetiva.

Exercícios:

1. Uma perspectiva plana tem $O = [1, 0, 1]$ como centro; $A = [0, 1, 1]$ está na linha de terra, $B = [0, 0, 1]$ está na linha de fuga e a imagem do ponto $P = [1, 1, 3]$ é $P' = [2, -1, 0]$.

   (a) Determine uma matriz que representa esta perspectiva plana.

   (b) Determine a equação da linha de fuga.

2. Uma composta de perspectivas planas leva o quadrado ABCD no quadrado A'B'C'D', sendo

$$A = (2, 2), B = (-2, 2), C = (-2, -2), D = (2, -2)$$

$$A' = (1, 0), B' = (0, 1), C' = (-1, 0), D = (0, -1)$$

   Use coordenadas homogêneas para determinar a imagem de um ponto $[x, y, z] \in \mathbb{R}P^2$ e depois, fazendo z=1, determine a imagem de um ponto P=(x,y,1). Use isto para determinar a imagem de um ponto Q=(x,y).

3. Encontre a matriz que representa a perspectiva plana que tem a reta $2x - y + z = 0$ como linha de terra, o centro $O = [1, 0, 1]$ e $P = [2, 3, 2] \longrightarrow P' = [3, 5, 3]$.

4. O que o conjunto F e p(F) representam no plano projetivo, sendo $F = [x, y, z]/3x^2 - y^2 + 10z^2 + 12xy - 4yz = 0$ e a matriz que define a transformação projetiva $p : P^2 \longrightarrow P^2$ é $M_p = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$?

5. Dados quatro pontos A, B, C e D, três a três não colineares, e outros quatro pontos A', B', C' e D', também três a três não colineares, no plano projetivo P^2, sabemos que existe uma única transformação $p : P^2 \longrightarrow P^2$ tal que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$, $p(C) = C'$ e $p(D) = D'$.

   Dê exemplo de oito pontos nas condições acima e determine uma matriz 3x3, não singular, que represente p.

6. Falso ou Verdadeiro? Justifique:

"Existem muitas transformações projetivas $p : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ tal que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$, $p(C) = C'$ sendo que

$$A = [2,2,1], B = [0,3,2], C = [0,5,1]$$

$$A' = [1,0,0], B' = [0,1,0], C' = [1,1,0]''.$$

7. Seja $p : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ a transformação projetiva tal que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$, $p(C) = C'$ e $p(D) = D'$, sendo

$$A = [1,0,0], B = [0,1,0], C = [0,0,1], D = [1,1,1]$$

$$A' = [1,2,1], B' = [-1,4,2], C' = [0,1,2], D' = [1,1,2].$$

   Encontre a imagem do ponto [1,2,1].

8. Seja $p : \mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ a transformação projetiva tal que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$, $p(C) = C'$ e $p(D) = D'$ sendo

$$A = [3,2,1], B = [-3,0,1], C = [0,1,0], D = [0,0,1]$$

$$A' = [1,0,0], B' = [0,1,0], C' = [0,0,1], D' = [1,1,1].$$

   Encontre a imagem do ponto [5,5,5].

9. Determine a matriz que representa a transformação projetiva do plano projetivo que leva os pontos:

   (a) A[2,0,1], B=[1,0,0], C=[0,2,1], D=[3,2,2] nos pontos A'=[-2,1,2], B'=[3,0,1], C'=[1,1,1] e D'=[1,1,2], respectivamente.

   (b) A[1,0,0], B=[0,1,0], C=[0,0,1], D=[1,1,1] nos pontos A'=[0,1,0], B'=[1,0,0], C'=[1,1,1] e D'=[0,0,1], respectivamente.

10. Use o método dos quatro pontos três a três não colineares, levados em quatro pontos três a três não colineares para determinar:

    a) Uma matriz que represente a extensão, ao plano projetivo, de uma tranlação.

    b) Uma matriz que represente a extensão, ao plano projetivo, de uma rotação de ângulo α e centro (a,b).

    c) Uma matriz que represente a extensão, ao plano projetivo, de uma reflexão em relação a uma reta.

    d) Uma matriz que represente a extensão, ao plana projetivo, de uma homotetia de razão k e centro (a,b).

11. Determine uma matriz que represente a extensão, ao plano projetivo, da semelhança que leva o ΔABC no $\Delta A'B'C'$, sendo:

    a) A = (0,0), B = (1,0), C = (0,2), A' = (3,3), B' = (0,3) e C'= (3,-3).

    b) A = (0,0), B = (1,0), C = (0,2), A' = (3,3), B' = (0,3) e C'= (3,6).