LISTA DE EXERCÍCIOS

MAT 230 - GEOMETRIA E DESENHO GEOMÉTRICO I

1. Numa geometria de incidência, o plano tem 5 pontos. Quantas retas tem este plano? A resposta é única?

2. Exibir um plano de incidência com 7 pontos e 7 retas.

3. Usando quatro pontos, todos distintos e tres deles colineares, quantas retas podemos construir?

4. São dadas 3 réguas f, g e h de uma reta r e tres pontos A, B, C de r. Sabendo que:
   a) f(A) = 1, f(B) = 5, g(B) = 0, g(C) = -2, h(A) = 101, h(C) = 107

   b) f(B) = 7, f(C) = 1, g(A) =30, g(B) = 33, h(A) = 30, h(C) = 33

   Obter o valor que falta em cada régua.

5. Seja r uma reta e f, g duas réguas para r. Qual é a relação que existe entre f e g ? É verdade que $\frac{f+g}{2}$ é uma régua? E $\frac{f-g}{2}$?

6. Considere um $\triangle ABC$ e dois pontos D e E tais que $B - C - D$ e $A - E - C$. É verdade que existe $F \in \overleftrightarrow{DE}$ tal que $A - F - B$? Para responder, considere dois casos. No primeiro, o plano satisfaz os postulados P_1, P_2 ,P_3 ,P_4 e no segundo caso, satisfaz P_1 ,P_2,P_3 ,P_4 e P_5.

7. Sejam A, B, C três pontos não colineares no plano π, aonde valem os postulados P_1 ,P_2,P_3 ,P_4 e P_5. Prove que qualquer ponto $P \in \pi$ pertence a uma reta que intersecta o $\triangle ABC$ em dois pontos.

8. Em um segmento $\overline{AB}$, considere um ponto P móvel e seja M o ponto médio de $\overline{AP}$ e N o ponto médio de $\overline{PB}$. Quanto vale MN?

9. Decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:

   (a) Por um ponto passam infinitas retas.
   (b) Quatro pontos, todos distintos, determinam duas retas.
   (c) Dois segmentos consecutivos são colineares.
   (d) Dois segmentos adjacentes são consecutivos.
   (e) Dois ângulos consecutivos são adjacentes.
   (f) Dois ângulos opostos pelo vértice são adjacentes.
   (g) Dois ângulos suplementares são adjacentes.
   (h) Uma reta pode intersectar um $\triangle ABC$ em três pontos.
   (i) Existem dois conjuntos convexos e não vazios H_1 e H_2 tais que para toda reta r, um ponto fora de r está em H_1 ou em H_2.

(j) Se A, B, C são não colineares e $A - C' - B$, $B - A' - C$, $C - B' - A$, então A', B', C' são não colineares

(k) Se uma reta intersecta um triângulo mas não intersecta dois de seus lados então a reta contém um vértice do triângulo.

(Dois segmentos são ditos consecutivos se uma das extremidades de um coincide com a extremidade do outro. Eles são ditos adjacentes se são consecutivos e colineares. Dois ângulos são ditos consecutivos se uma das semirretas de um coincide com uma das semirretas do outro. Eles são ditos adjacentes se eles são consecutivos e não possuem pontos internos em comum. Observe que nesta definição está sendo usasdo o postulado 5.)

10. Mostre que se uma reta r não contém nenhum dos vértices do $\triangle ABC$, então r não pode intersectar os três lados do $\triangle ABC$.

11. Se A, B, C são três pontos não colineares e uma reta r intersecta $\overleftrightarrow{AB}$, é verdade que r intersecta $\overleftrightarrow{BC}$ ou $\overleftrightarrow{AC}$?

12. Dados o $\square ABCD$, $E = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$, $F = \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$ e $G = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$, prove que E, F, G são não colineares.

13. Na geometria do taxista, encontre duas possíveis réguas $f : r \longrightarrow \mathbb{R}$ para a reta $y = 5x + 2$ de forma que $f(0, 2) = 2$.

14. No plano de Moulton determine o ponto de interseção da reta que contém A e B, com a reta que contém C e D, sendo A = (-1,-1), B = (1,1), C = (-1,1), D = (1,-1).

15. No plano rasgado, determine a distância do ponto A = (-1,1) ao ponto B = (5,7).

16. No plano rasgado considere os pontos não colineares A = (-1,0), B = (2,0) e C = (2,3n), com n natural. Determine o menor n a partir do qual BA + AC < BC.

17. No plano hiperbólico mostre que A-B-C, sendo $A = (2, \sqrt{15})$, B= (3,4), $C = (6, \sqrt{7})$.

18. Decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:

    (a) Duas retas são paralelas se, e somente se, cada uma está num mesmo lado da outra.

    (b) Se $C \in \text{int}\,(\angle AUB)$, então $\overrightarrow{UA} \cup \overrightarrow{UC}$ é um ângulo.

    (c) O exterior de um ângulo pode ser um conjunto convexo.

    (d) Um quadrilátero convexo é um conjunto convexo.

19. Mostre que se uma reta r não intersecta o $\triangle ABC$, então o $\triangle ABC$ está em um mesmo lado de r.

20. Dados quatro pontos distintos A, B, C e D, três a três não colineares, então ou A, B, C, D são vértices de um quadrilátero convexo ou A, B, C, D são vértices de três quadriláteros, nenhum deles convexo.

21. Mostre que se r e s são retas paralelas, então um semi-plano de r está contido num semi-plano de s.

22. Decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas:

    (a) $\pi = 180$.

    (b) $0 < \mathrm{m}(\angle ABC) < 180$.

    (c) Se $\mathrm{m}(\angle AUB) < \mathrm{m}(\angle AUC)$, então $B \in \mathrm{int}(\angle AUC)$.

    (d) A união de dois ângulos retos é um subconjunto da união de duas retas.

23. (a) O que significa, pra você, a frase "Os pontos A e C estão em lados opostos da semirreta $\overrightarrow{VB}$".

    (b) Prove que se $\angle AUB$ é ângulo reto, os pontos A e C estão em lados opostos de $\overrightarrow{UB}$ se, e somente se, $\angle AUC$ é obtuso ou $A - U - C$.

24. Sejam $A = (-1, -1), B = (0, 0)$ e $C = (1, 1)$ pontos no plano de Moulton. Determine a medida de cada ângulo do $\triangle ABC$.

25. Dê uma definição razoável para "$\overrightarrow{UB}$ está entre $\overrightarrow{UA}$ e $\overrightarrow{UC}$".

26. Dê uma definição razoável para "A reta r está entre as retas s e t".

27. Prove que se os pontos A e C estão em lados opostos da reta $\overleftrightarrow{UB}$ e $\mathrm{m}(\angle AUB) + \mathrm{m}(\angle BUC) = 180$, então $A - U - C$

28. Mostre que se $P \in r$, existe uma única reta s, com $P \in s$ e s perpendicular a r.

29. Mostre que se $P \notin r$, existe uma única reta s com $P \in s$ e s perpendicular a r.

30. Qual é a medida do ângulo formada pelos ponteiros de um relógio que marca $13 : 33$ horas?

31. Os ponteiros de um relógio formam um ângulo de 90. Quinze minutos depois formam um ângulo de medida x. Determine os dois possíveis valores de x.

32. O ângulo formado pelos ponteiros de um relógio mede 151,5 graus. Sabendo que isto acontece depois do meio dia e antes das 14 horas, determine a hora exata.

33. Prove que a medida θ do ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca x horas e y minutos é dada pela fórmula $\theta = |\frac{11y-60x}{2}|$. Use esta fórmula para resolver os exercícios anteriores relacionados.

34. Determine a medida de um ângulo que vale o dobro de seu complemento.

35. Calcule a medida de um ângulo sabendo que um quarto de seu complemento vale 36.

36. O complemento de um ângulo está para seu suplemento como 2 está para 7. Determine a medida deste ângulo.

37. No $\triangle ABC$ temos que $AB = 8$, $BC = 21$ e AC é um inteiro múltiplo de 6. Determine AC.

38. No $\triangle ABC$, sabemos que AB é inteiro, que $AC = 27$, que $BC = 16$ e que medida do ângulo de vértice C é menor que a medida do ângulo de vértice A e que por sua vez é menor que a medida do ângulo de vértice B. Determine o valor máximo que AB pode assumir.

39. Seja $\square ABCD$ um quadrilátero tal que m$(\angle BAD)$ = m$(\angle ADC) = 90$ e $AB = CD$. Mostre que ele é convexo. *(Obs.: Este quadrilátero é chamado de quadrilátero de Saccheri).*

40. No plano hiperbólico $\mathbb{H}$, considere o quadrilátero $\square ABCD$, onde A = (1,5), B = (1,10), C = (7,8), D = (4,4). Calcule os valores de todos os lados e dos ângulos internos e conclua que $\square ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri.

41. Encontre as coordenadas do ponto B, sabendo que $\square ABCD$ é um quadrilátero de Saccheri no plano hiperbólico e que A = (4,7), C = (7,4), D = (4,5).

42. No plano hiperbólico, determine a equação da reta $r_{p,R}$ que passa no ponto (0,2) e é perpendicular a r_0. Determine também a equação da reta que passa em (0,2) forma um ângulo de medida 45 com $r_{p,R}$.

43. No plano de Moulton, calcule a soma das medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$, sendo A = (2,0), B = (0,0), C = (2,1).

44. Seja $\triangle ABC$ com $AB = BC$. Mostre que a bissetriz do ângulo $\angle ABC$ e as duas bissetrizes dos ângulos externos aos ângulos $\angle BAC$ e $\angle BCA$ se cortam em um ponto O.

45. Mostre que Lado-Lado-Ângulo (L.L.A.) não é um critério de congruência de triângulos.(Sugestão: Considere um $\triangle ABC$, com $BC < AC$ e tome A-D-C com $BC = BD$.)

46. (Exercício 54 da apostila.) Na geometria analítica, sejam $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ não colineares. Definimos m$(\angle ABC)$ como o arco α entre 0 e 180 que tem cosseno

$$\cos\alpha = \frac{(A-B)\cdot(C-B)}{|A-B|\cdot|C-B|} = \frac{(a_1-b_1)(c_1-b_1)+(a_2-b_2)(c_2-b_2)}{\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}\sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2}}$$

Mostre que m é medida de ângulo. (Para isso, tem que satisfazer as três condições do postulado do transferidor. Se necessário, consulte um livro de Vetores e Geometria Analítica.)

47. (Exercício 55 da apostila.) Na geometria do taxista, mostre que a medida m da geometria analítica é medida de ângulo.

48. (Exercício 57 da apostila.) No plano de Moulton, definimos m($\angle ABC$) como sendo a medida da geometria analítica de $\angle PBQ$, se B não está no eixo O_y e P e Q estão no mesmo lado que B em relação ao eixo O_y; se B está no eixo O_y, dados $b \in \mathbb{R}$ e $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um ponto, definimos o ponto P_b por

$$P_b = \begin{cases} (x, 2y - b) & \text{se x > 0 e y > b,} \\ (x, y) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definimos, então, m($\angle ABC$) $=$ m$_E(\angle A_bBC_b)$, sendo m_E a medida euclideana de ângulo. Observe que nesta medida de ângulo nós "desentortamos" as retas $r^*_{m,b}$ que suportam as semirretas $\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{BC}$ que definem o ângulo $\angle ABC$. Verifique que esta medida satisfaz os três itens do postulado do transferidor.

49. (Exercício 62 da apostila.) Na geometria hiperbólica, dada a reta $r_{0,5} = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x^2 + y^2 = 25\}$ e o ponto $B = (3, 4) \in r_{0,5}$, ache a reta r contendo B e perpendicular à reta $r_{0,5}$.

50. (Exercício 70 da apostila) No plano hiperbólico $\mathbb{H}$, sejam A = (-1,1), B = (0,0), C = (1,1), D = (-2,2), E = (2,2), F = (2,2). Use LAL para mostrar que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

51. (Exercício 75 da apostila) Dado o quadrilátero convexo $\square ABCD$, mostre que, se $\overline{AB} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{DA}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$, então $\angle DAB \equiv \angle BCD \equiv \angle ABC \equiv \angle CDA$.

52. (Exercício 79 da apostila) Mostre que dada uma reta r e um ponto P fora dsta reta, existe uma reta paralela à reta r e que contém o ponto P.

53. (Exercício 80 da apostila) Mostre que as retas $r_0 = \{(0, y)/y > 0\}$ e $r_{0,1} = \{(x, y)/x^2+y^2 = 1\}$ contêm o ponto P = (0,1) e são paralelas à reta $r_1 = \{(1, y)/y > 0\}$, no plano hiperbólico $\mathbb{H}$.(Compare o que acontece neste exercício, com o que é exigido no postulado das paralelas).

54. Dada uma reta r e um ponto P fora dela, mostre que existe uma única perpendicular à reta r e que contém o ponto P.(Neste exercício, o postulado LAL é suficiente para a unicidade. Sem ele, não existe unicidade).

55. (Exercícios 87, 88 da apostila) a) Mostre que as tres bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo se encontram em um ponto interno do triângulo. b) Mostre que se duas mediatrizes se encontram em um ponto P, então a terceira mediatriz passa por P. O que acontece com as medianas?

56. (Exercício 89 da apostila) No plano hiperbólico, considere o triângulo de vértices A = (0,4), B = (-6,4), C = (6,4).Verifique que as mediatrizes são paralelas.

57. (Exercícios 93 da apostila) Mostre que num triângulo isósceles, cujos ângulos internos não sejam maiorees que 90, as tres alturas se encontram num ponto interior do triângulo.

58. No plano hiperbólico $\mathbb{H}$, considere o triângulo de vértices A = (0,2), B = (-1,1), C = (1,1). Mostre que as alturas deste triângulo não têm ponto em comum.

59. Dado o quadrilátero convexo $\square ABCD$ tal que $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{CD}$, mostre que $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{BD}$.

60. (Exercícios 98 da apostila) Mostre que se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os dois ângulos opostos a estes lados também não são congruentes.

61. a)Use produto escalar para provar que o teorema de Pitágoras é verdadeiro na geometria analítica.

    b) Use o triângulo de vértices A = (0,5), B = (0,7), C = (3,4) para verificar que o teorema de Pitágoras não é verdadeiro na geometria hiperbólica.

62. Esboce cada uma das circunferências:

    a) Circunferência de centro (0,3) e raio ln3, no plano hiperbólico $\mathbb{H}$.

    b) Circunferência de cento (0,0) e raio 1, na geometria do taxista.

    c) Circunferência de centro (-1,0) e raio 2, no plano de Moulton.

    Nos ítens a) e b) que tipo de reta e de compasso você usaria par traçar as circunferências?

    Os exercícios que seguem dependem do postulado das paralelas.

63. Seja ΔABC com a medida do ângulo no vértice maior que 90 e a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é o dobro da altura relativa ao lado $\overline{AB}$. Prove que AB = 2BC.

64. Prove que as tres medianas de um triângulo se intersectam em um ponto no interior do triângulo, chamado de baricentro. Prove que as paralelas a dois lados, traçadas pelo baricentro, dividem o terceiro lado em tres partes iguais.

65. Um paralelogramo tem perímetro igual a 14 e diagonais de medidas 4 e 6. Calcule o valor de seus lados.

66. Mostre que o postulado das paralelas equivale a dizer que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180.

67. Prove que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180 se e somente se dada uma circunferência de centro O e 3 pontos A, B, C nesta circunferência, de modo que os pontos O e C estão de um mesmo lado da reta $\overleftrightarrow{AB}$, então $m(< AOB) = 2m(< ACB)$

68. (*) Porque na geometria euclidiana um ângulo de 3 graus pode ser construido com régua e compasso, enquanto um ângulo de 2 graus não pode? Construa o ângulo de 3 graus!