MAT 1352 - Lista de Exercícios

1. Determine o polinômio de Taylor de grau n, com resto de Lagrange, em x = a para cada uma das funções abaixo:

   a) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$; a = 1, n = 3

   b)$f(x) = cosh(x)$; a = 0 , n = 4

   c)$f(x) = \sqrt{x}$; a = 4 , n = 4

   d)$f(x) = ln(x + 3)$; a = -2 , n = 3

   e)$f(x) = (1 - x)^{\frac{-1}{2}}$; a = 0 , n = 3

2. Calcule o valor de e^2, exato até a quinta casa decimal e prove que sua resposta tem a precisão pedida.

3. Qual é o erro que se comete ao se substituir $\sqrt{1 + x}$ por $1 + \frac{1}{2}x$, para $0 < x < 0,01$?

4. Use a fórmula de Taylor para expressar o polinômio $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ como polinômio em potências de 1 - x.

5. Resolva as seguintes integrais indefinidas:

   a) $\int x^4.(5 - x^5)dx$

   b) $\int(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

   c) $\int(3sen(x) - 4cos(t))dt$

   d) $\int \frac{sen(x)}{cos(x)^2}dx$

   e) $\int(2cotg(x)^2 - 3tg(x)^2)dx$

   f) $\int(5tg(x) - \frac{4cos(x)^2)}{cos(x)})dx$

6. A inclinação da reta tangente num ponto (x , y) de uma curva é $3\sqrt{x}$. Se o ponto (9 , 4) está na curva, determine sua equação.

7. Uma obra de arte foi comprada por 10000 reais. Sabendo o valor V desta obra tem taxa de variação dada por $\frac{dV}{dt} = 5t^{\frac{1}{2}} + 10t + 5$ nos próximos 6 anos, qual será o valor da obra daqui a 5 anos?

8. É verdade que $F(x) = |x|$ é uma integral indefinida da função $f(x) = -1$, se $x < 0$, $f(x) = 0$, se $x = 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$?

9. A função f(x) = n se $n \leq x < n+1$, com $n \in Z$, não é contínua, mas tem uma integral F tal que F(0) = 0 . Determine F e esboce o seu gráfico.

10. Use o método da mudança de variáveis para resolver as seguintes integrais indefinidas:

    a) $\int \sqrt{1-4x}dx$

    b) $\int x(3x^2+7)^9 dx$

    c) $\int sec(5t)^2 dt$

    d) $\int ucosec(3u^2).cotg(3u^2)du$

    e)$\int sen(x).sen(cos(x))dx$

    f) $\int (sen(2x)\sqrt{2-2cos(2x)})dx$

    g) $\int (x^5+2)log(x^6+12x+7)dx$

    h) $\int x^3.7^{(x^4+3)}dx$

11. Se q coulombs for a carga de eletricidade recebida por um condensador de um circuito elétrico de i amperes, então $i = \frac{dq}{dt}$. Se i = 5sen(60t) e q = 0 quando $t = \frac{\pi}{2}$, ache a carga positiva máxima do condensador.

12. O volume de um balão cresce de acordo com a fórmula $\frac{dV}{dt} = \sqrt{t+1} + \frac{2}{3}t$, onde Vcm^3 é o volume. Se V = 33 quando t = 3, determine V.

13. Resolva as seguintes equações diferenciais:

    a) $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x - 4$; y = -6, quando x = 3.

    b) $\frac{dy}{dx} = \frac{cos(3x)}{sen(2y)}$; $y = \frac{\pi}{3}$ quando $x = \frac{\pi}{2}$

    c) $\frac{d^2u}{dv^2} = 4(1+3v^2)$; u = 1 e $\frac{du}{dv} = -2$, quando v = 1.

    d) $\frac{d^2s}{dt^2} = sen(3t) + cos(3t)$

    e) $\frac{dy}{dx} = 3y + 5$; y = 1, se x = 0.

    f) $\frac{dy}{dx} = 5y + x^2$; y = 2, se x = 1.

    g) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x$; y = 3, se x = 3.

14. Uma partícula se move ao longo de uma linha reta com velocidade $v = \sqrt{2t+4}$. Qual é o valor do deslocamento quando t = 5.

15. Uma pedra é atirada verticalmente para cima, partindo do solo, com velocidade inicial de 20 m/s. Quanto tempo irá decorrer até que ela retorne ao solo? Com que velocidade escalar ela atinge o solo? Qual é a altura máxima atingida pela pedra?

16. Se os freios dão uma aceleração negativa constante ao carro de $8m/s^2$, qual deve ser a velocidade escalar máxima do carro, para que ele pare 25 m depois da freiada?

17. Use o método da integração por partes para resolver as seguintes integrais:

    a) $\int xe^{3x}dx$

    b) $\int x3^{x}dx$

    c) $\int x^2 ln(x)dx$

    d) $\int sen(ln(x))dx$

    e) $\int arctg(\sqrt{x})dx$

    f) $\int \frac{sen(2x)}{e^x}dx$

    g) $\int x^2 senh(x)dx$

    h) $\int cos(\sqrt{x})dx$

18. Calcule:

    a) $\int sen^5(x)dx$

    b) $\int cos^3(x)dx$

    c) $\int sen(5x)cos(3x)dx$

    d) $\int sen^2(x)cos^3(x)dx$

    e) $\int \sqrt{cos(x)}sen^3(x)dx$

    f) $\int cotg^4(3x)dx$

    g) $\int tg^5(x)sec^7(x)dx$

    h) $\int sen(x)sen(3x)sen(5x)dx$

19. Use o método da substituição trigonométrica para resolver as seguintes integrais:

    a) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+6}}dx$

c) $\int \sqrt{1-x^2}dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx$

e) $\int \frac{x^3}{25-x^2}dx$

f) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+8e^x+7}dx$

g) $\int \frac{1}{(x^2-6x+18)^{\frac{3}{2}}}dx$

h) $\int \frac{1}{(16+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

20. Use integração por partes para resolver as seguintes integrais:

a) $\int xe^{3x}dx$

b) $\int xsec(x)tg(x)dx$

c) $\int ln(x)dx$

d) $\int (ln(x))^2dx$

e) $\int xarctg(x)dx$

f) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

g) $\int sen(ln(x))dx$

h) $\int x^5e^{x^2}dx$

i) $\int cos(\sqrt{x})dx$

j) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}dx$

21. As seguintes integrais contêm potências de seno , cosseno, tangente, cotangente, secante e cosecante:

a) $\int cos^3(x)dx$

b) $\int sen^5(x)dx$

c) $\int sen^3(x)cos^4(x)dx$

d) $\int tg^2(x)dx$

e) $\int cotg^3(x)dx$

f) $\int cosec^6(x)dx$

g)$\int sec^3(x)dx$

22. Calcule:

a) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-25}}dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{4x+x^2}}dx$

c) $\int x^2\sqrt{9-x^2}dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x^4}}dx$

23. Use o método das frações parciais para resolver as seguintes integrais:

a) $\int \frac{x^4-10x^2+3x+1}{x^2-4}dx$

b) $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}dx$

c) $\int \frac{x^3-1}{x^2(x-2)^3}dx$

d) $\int \frac{x}{(x-1)(1+x^2)}dx$

e) $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2}dx$

f) $\int \frac{1}{1+x^3}dx$

g) $\int \frac{1}{1-x^3}dx$

h) $\int \frac{1}{1+x^4}dx$

i) $\int \frac{1}{1-x^4}dx$

24. Encontre o valor da soma:

a) $\sum_{i=1}^{4} \frac{i}{i-1}$

b) $\sum_{k=1}^{25} 2k(k-1)$

c) $\sum_{i=1}^{20} 3i(i^2+2)$

25. O número $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ é conhecido como número harmônico. Prove que $ln(n+1) < H_n < ln(n)+1$.

26. Use somas de Riemann para determinar a área de cada uma das regiões dadas. Faça uma figura mostrando a região e o i-ésimo retângulo:

a) região acima do eixo x, à direita da reta x = 1 e abaixo do gráfico de $y = 4 - x^2$, os retângulos são inscritos.

b) região limitada pelo gráfico de $y = x^4$, pelo eixo x e pela reta $x = 1$, retângulos inscritos.

c) região limitada pelo gráfico de $y = x^3 + x$, eixo x e retas $x = -2$, $x = 1$, retângulos circunscritos.

27. Encontre o valor aproximado das integrais, tomando uma partição com n pontos e compare depois com o valor exato:

    a) $\int_2^5 \frac{1}{x^2} dx$, n = 9 e c_i é o extremo direito.

    b) $\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} sec(x)dx$, $n = 8$ e c_i é o extremo esquerdo.

28. Verifique que a função maior inteiro é descontínua em $[0, \frac{5}{2}]$, mas é integrável. Determine o valor da integral.

29. Encontre o valor médio da função $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ no intervalo [-4 , 4]. Para isto, determine o valor da integral definida, interpretando-a como a área da região limitada pelo eixo dos x e pelo semicírculo.

30. Determine $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+2i}$. Para isto calcule o valor da integral de $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo [1 , 3], usando somas de Riemann e também o teorema fundamental.

31. Faça o gráfico de $F(t) = \int_0^t f(x)dx$. Calcule F' nos pontos onde a derivada existe, para as seguintes funções:

    (a) $f(x) = 1$, se $x > 0$ e $f(x) = -1$, se $x \leq 0$

    (b) $f(x) = -x$, se $x > 0$ e $f(x) = 2$, se $x \leq 0$

    (c) $f(x) = x^2$, se $x \leq 1$ e $f(x) = 2x - 1$, se $x > 0$

32. Calcule F'(x), onde existir a derivada.

    (a) $\int_{2x}^{x} cost^2 dt$

    (b) $F(x) = \int_{\sqrt{x^2+1}}^{x^3} x^3 e^{t^2} dt$

33. Calcule $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3} dt$.

34. Sendo $xsen(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$, f contínua, calcule f(4).

35. A regra do ponto médio diz que:

$$\int_b^a f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(c_1) + f(c_2) + ... + f(c_n))$$

onde $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ e $c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$.

Use esta regra para calcular um valor aproximado de $\int_2^1 e^{x^2} dx$, tome:

(a) $n = 5$.

(b) $n = 10$.

36. A regra do trapézio diz que

$$\frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

onde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x$ é uma boa aproximação para $\int_a^b f(x)dx$ se n for suficientemente grande.

(a) Explique o motivo dessa regra ser chamada de regra do trapézio.

(b) Use a regra acima com n=10 para aproximar a $\int_0^{20} cos(\pi x)dx$. Compare seu resultado com o valor real. Explique a diferença.

37. Em uma corrida de 1500 metros, o corredor A tem velocidade maior do que o corredor B no intervalo de 0 a 60 segundos. Neste instante, o corredor B iguala sua velocidade à do corredor A. Qual a interpretação física para a área entre as curvas de velocidade dos corredores no primeiro minuto?

38. Uma mola tem 45 cm de comprimento e é preciso uma força de 50N para comprimí-la até 40 cm. Pela lei de Hook, a força é dada por $F(x) = kx$, onde k é uma constante. Calcule o valor da constante elástica dessa mola. Qual o valor do trabalho realizado ao comprimir a mola de 40cm para 30cm?

Admitindo agora que $F(x) = k.sen(\frac{\pi x}{18})$, responda as duas perguntas anteriores.

39. Use a Lei de Newton da Gravitação Universal ($F = G\frac{M.m}{d^2}$)para calcular o trabalho necessário para lançar verticalmente um satélite de 1000kg a uma órbita de 1000 km de altura.

    Dados: massa da Terra=$5,98.10^{24}kg$, raio da Terra=$6,37.10^6m$ e $G = 6,67.10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}$.

40. Encontre o número a tal que a reta $x = a$ bissecta a área sob a curva $y = \frac{1}{x^2}$, com $1 \leq x \leq 4$.

41. Esboçe a curva de equação $y^2 = x^2(x+3)$. Parte desta curva forma um laço. Determine a área dentro deste laço.

42. Encontre a área da região limitada pela parábola $y^2 = 9x$ e pela reta que passa pelos pontos $A = (16, 12)$ e $B = (4, -6)$.

43. Calcular a área limitada pelas curvas $y = \frac{sen2x}{2}$ e $y = senx + \frac{sen2x}{2}$ entre $x = 0$ e $x = \pi$.

44. Calcular a área limitada pela curva $y(x^2+4) = 4(2-x)$, o eixo dos x e o eixo dos y.

45. Calcular a área limitada pela hipérbole equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, o eixo dos x e uma reta traçada da origem ao ponto (x,y) da curva.

46. A curva de equação $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2+y^2}$ delimita uma região. Determine a área desta região.

47. Calcule a área da região limitada pela curva $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}$, eixo x, reta x=1 e reta x=4.

48. Calcule a área da região situada no primeiro quadrante limitada acima pela curva $x^4 - y^4 = 2xy$ e abaixo pela curva $r^2 = 2sen2\theta$, com $r > 0$.

49. Encontre a área da região limitada pela hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ e a reta $y = 5$.

50. A região sob a curva $y = cos^2x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, é rotacionada ao redor do eixo x. Calcule o volume do sólido obtido.

51. Achar o volume do cone de altura h e raio da base r, obtido pela rotação, em torno do eixo dos x, de uma reta que passa pela origem.

52. Encontre o volume do sólido obtido quando a região sob a curva $\frac{1}{(1+5x)^2}$ de 0 a 1 é girada ao redor do eixo y.

53. A região sob a curva $y = tg^2x$ de 0 a $\frac{\pi}{4}$ é girada ao redor do eixo x. Encontre o volume do sólido resultante.

54. Achar os volumes dos sólidos obtidos pela rotação, em torno do eixo dos x, das regiões indicadas:

    (a) $y = \frac{4}{x+1}$, $x = -5$, $x = -2$, $y = 0$.
    (b) $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.
    (c) A elipse $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$.
    (d) $y = logx$, entre $x = 1$ e $x = 2$.
    (e) $y = tgx$, $x = \frac{\pi}{3}$ e o eixo dos x.

55. Calcule a área da superfície gerada pela rotação em torno da reta $y = 5$ do gráfico da função:

    (a) $y = senh(x)$, $-1 \leq x \leq 1$;
    (b) $y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$

56. Use o Teorema de Pappus para calcular o volume do sólido obtido pela rotação do disco $x^2 + x + y^2 + y \leq 4$ em torno da reta $y = 3x + 10$.

57. Determine o centro de massa da região:

    (a) $R = \{(x, y) \in R^2\ x^2 + 4y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$
    (b) $R = \{(x, y) \in R^2\ x^2 \leq y \leq x\}$

58. Determine o centro de massa da região dada por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0ey \geq 0$.

59. Determine o centro de massa da região definida por $-1 \leq x \leq 3$ e $0 \leq y \leq (x + 1)^2$.

60. Determine se cada integral é convergente ou divergente. Avalie aquelas que são convergentes.

(a) $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2x-5}dx$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(w-5)}}dw$

(c) $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{(x+2)(x+3)}dx$

(d) $\int_{1}^{\infty} \frac{lnx}{x^3}dx$

(e) $\int_{0}^{1} \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$

(f) $\int_{-\infty}^{\infty} sen(x)dx$

(g) $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^3}dx$

61. Esboce a região e encontre sua área (se a área for finita).

(a) $S = \{(x, y)\ 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq tgxsecx\}$,

(b) $S = \{(x, y)\ 3 \leq x \leq 7,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{x-3}}\}$.

62. Use o Teorema da Comparação para determinar se a integral é convergente ou divergente.

(a) $\int_{1}^{\infty} \frac{cos^2x}{1+x^2}dx$

(b) $\int_{0}^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$

63. A integral $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ é imprópria por duas razões: o intervalo $[0, \infty[$ é infinito, e o integrando tem uma descontinuidade infinita em 0. Avalie-a expressando-a como uma soma de integrais impróprias do Tipo 1 e do Tipo 2, como a seguir:

$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx.$

64. Encontre os valores de p para os quais a integral converge e avalie a integral para aqueles valores de p.

(a) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^p}dx$,

(b) $\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x(lnx)^p}dx$.

65. Para uma determinada marca de celular, a função densidade de probabilidade de que o celular irá precisar de manutenção x meses após a sua compra é dada por $f(x) = 0,002e^{-0,002x}$, se $x \geq 0$ e $f(x) = 0$, se $x < 0$.

Se o aparelho tiver um ano de garantia, qual será a probabilidade de um comprador não precise consertar o seu celular durante o prazo de garantia? (A probabilidade de que um evento irá ocorrer no intervalo [a, b] é $\int_a^b f(x)dx$)

66. A velocidade média das moléculas em gás ideal é

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}dv$$

onde M é o peso molecular do gás, R é a constante do gás, T é a temperatura do gás, v é a velocidade molécula. Mostre que $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$.

67. Determine o quão grande tem que ser o número a de tal modo que $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^2+2}dx < 0,001$.

68. Determine o valor da área da região limitada pelo gráfico da equação dada:

    a) $r = 3cos(\theta)$

    b) $r = 2 - sen(\theta)$

    c) $r^2 = 4sen(\theta)$

69. Encontre a área da região limitada pelo gráfico de $r = e^{\theta}$ e pelas retas $\theta = 0$ e $\theta = 1$.

70. Determine o valor de a para que a região limitada pela cardióide $r = a(1 - cos(\theta))$ tenha área 9π.

71. Ache a área da região varrida pelo raio vetor da espiral $r = \theta$, durante a sua segunda revolução e que não foi varrida pela primeira revolução.

72. Determine o domínio de definição de $\gamma(t) = (t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t})$.

73. Esboce o gráfico das seguintes curvas:

    a) $\gamma(t) = (t^2 + 1, t - 1)$

    b) $\gamma(t) = (t^3, t^2)$

    c) $\gamma(t) = (t^2, t^4, t^6)$

    d) $\gamma(t) = (sen(t), sen(t), \sqrt{2}cos(t))$.

74. Trace a curva $\gamma(t) = ((1 + cos(16t))cos(t), (1 + cos(16t))sen(t), 1 + cos(16t))$. Explique a sua aparência, mostrando que ela se desenvolve num cone.

75. Determine a função que representa a curva obtida pela interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e a superfície $z = xy$.

76. Determine a derivada e a integral de cada curva:

    a) $\gamma(t) = (t^2, 1 - t, \sqrt{t})$

    b) $\gamma(t) = (cos(t), t, sen(3t))$

77. Determine o ponto de interseção das retas tangentes à curva $\gamma(t) = (sen(\pi t), 2cos(\pi t, cos(\pi t))$ nos pontos $\gamma(0)$ e $\gamma(0,5)$.

78. Em qual ponto as curvas $\gamma_1(t) = (t, 1-t, 3+t^2)$ e $\gamma_2(s) = (3-s, s-2, s^2)$ se intersectam. Determine o ângulo entre elas (Este ângulo é o ângulo formado pelas retas tangentes).

79. Determine o comprimento das seguintes curvas:

    a) $\gamma(t) = (t, cos(2t), sen(2t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

    b) $\gamma(t) = (2sen(t), 5t, 2cos(t))$, $-10 \leq t \leq 10$

    c) $\gamma(t) = (t^2, 2t, ln(t))$, $1 \leq t \leq e$.

80. Use a fórmula $k(t) = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$ para determinar a curvatura de $\gamma(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$.

81. Use a fórmula $k(t) = \frac{|f''(x)|}{[1+f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}$ para determinar as curvaturas de :

    a) $y = x^3$

    b) $y = \sqrt{x}$

    c) $y = sen(x)$.