Objetivos: Examinar a Geometria Elementar de um ponto de vista mais preciso e crítico do que a abordagem usual na escola secundária, destacando seu papel no desenvolvimento histórico da Matemática. Promover o desenvolvimento do raciocínio dedutivo e da habilidade e sensibilidade para resolução de problemas geométricos. Estudar, os procedimentos utilizados nas construções geométricas com régua e compasso, questionando e justificando sua validade. Desenvolver atividades de Prática como Componente Curricular.

Programa: Postulados de Incidência; ordem; separação e congruência; posição relativa de retas e planos. Triângulos: congruência e desigualdades geométricas. Perpendicularismo. Postulado das Paralelas: o papel da sua independência no desenvolvimento histórico da Geometria. Semelhanças. Polígonos: estudo especial dos quadriláteros. Circunferência. Construções geométricas: o método dos lugares geométricos. Desenvolvimento de atividades que propiciem ao aluno relacionar a teoria com a prática, isto é, fazer com que o estudante reflita sobre a prática profissional relacionando conteúdos estudados na disciplina com temas e ideias da Educação Básica.

Bibliografia:

G.E. Martin, The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane.
E.E. Moise, Elementary Geometry from Advanced Standpoint.
E.E. Moise, Geometria Moderna.
R. Bianconi, Geometria e Desenho Geométrico I (notas de aulas).

Datas das Provas:

(Turma 47) P_1, 23 de setembro ; P_2, 4 de novembro e SUB, 2 de dezembro.
(Turma 48) P_1, 26 de setembro ; P_2, 7 de novembro e SUB, 5 de dezembro.

Observação Importante

Além da matéria que será desenvolvida no programa acima, MAT230 teve um acréscimo de crédito trabalho equivalente a mais trinta horas para que os alunos desenvolvam atividades denominadas pelo MEC de **Práticas Como Componente Curricular**. A idéia é que o aluno consiga aplicar os conhecimentos aprendidos em MAT230, no ensino básico, de forma significativa e motivadora. A média final deve ser calculada levando em consideração estas atividades. Vamos adotar como critério do cálculo da média final, $M_f = 0,85.M_p + 0,15.A$, onde M_p é a média obtida nas duas provas e A é a nota obtida nas atividades das práticas curriculares.

Colocamos a seguir algumas sugestões de artigos para o crédito trabalho.

Estes artigos podem ser encontrados na Revista do Professor de Matemática.

1. A independência do Axioma das Paralelas e as Geometrias não euclidianas, nº 2 , 1º semestre de 1983.
2. Um problema de Geometria, nº10 , 1º semestre 1987.
3. Resolução geométrica da equação de 2° grau, nº12, 1º semestre de 1988.
4. Geometria e Astronomia, nº13, 2º semestre de 1988.
5. O papel da Geometria na formação do professor das séries iniciais, nº16, 1ºsemstre de 1990.
6. Origami e Geometria, nº16, 1º semestre de 1990.
7. Triângulos especiais, nº 17, 2º semestre de 1990.
8. Qual é a soma dos ângulos de um polígono?, nº19, 2º semestre de 1991.
9. Legendre e o postulado das paralelas, nº22, 3º quadrimestre de 1992.
10. Semelhanças, pizzas e chopes, nº25, 1º semestre de 1994.
11. Um procedimento geométrico para otimização linear no plano, nº31, 2º quadrimestre de 1996.
12. Uma interpretação geométrica do MMC, nº32, 3º quadrimestre de 1996.
13. Por que as antenas são parabólicas?, nº33, 1º quadrimestre de 1997.
14. A hipérbole e os telescópios, nº34, 2º quadrimestre de 1997.
15. Elipse, sorrisos e sussurros, nº36, 1º quadrimestre de 1998.
16. Euclides, Geometria e fundamentos, nº45, 1º quadrimestre de 2001.
17. A vingança do incentro, nº46, 2º quadrimestre de 2001.
18. G.D.-Geometria Dinâmica, nº49, 2º quadrimestre de 2002.
19. Como melhorar a vida de um casal usando a geometria não-euclidiana, nº50, 3º quadrimestre de 2002.
20. O computador na sala de aula, GD e a lei dos cossenos, nº52, 3º quadrimestre de 2003.
21. Computador na sala de aula, gráficos animados no Winplot nº 56, 1º quadrimestre de 2005.
22. Pesquisa de lugares geométricos com auxílio de Geometria Dinâmica, nº61 3º quadrimestre de 2006.

Um pequeno resumo de MAT 230

Um plano de incidência é um conjunto que notaremos por π, seus elementos chamados de pontos e com subconjuntos chamados de retas satisfazendo os seguintes postulados:

Postulado 1 - Se $P, Q \in \pi$, existe uma única reta r que contém estes pontos. r é notada por $\overleftrightarrow{PQ}$

Postulado 2 - Cada reta contém pelo menos dois pontos.

Postulado 3-Existem pelo menos tres pontos não colineares.

Estes são chamados de postulados de incidência.

Existem muitos modelos de planos de incidência, inclusive alguns com um número finito de pontos.

Acrescentando o seguinte postulado (chamado de postulado da régua)

Postulado 4 - Para cada reta r, existe uma função bijetora $f : r \longrightarrow I\!R$ chamada de régua e uma função distância entre os pontos de π tal que se PQ denota a distância entre dois pontos P e Q de r, então $PQ = |f(P) - f(Q)|$.

Passamos a ter em π o que chamamos de geometria métrica. Neste tipo de geometria é possível definir as noções de segmento de reta, triângulo, , semirreta, ângulo, conjunto convexo. Entretanto, algumas noções básicas de geometria não são válidas, em geral. Por exemplo, dados três pontos A, B, C a desigualdade triangular $AB + BC \geq AC$ pode nâo ser verdadeira.

Exercício 1 : Defina as noções de segmento de reta, triângulo, semirreta, ângulo. Dê exemplo de um plano geométrico no qual nâo vale a desigualdade triangular.

Para que certas propriedades conhecidas da geometria sejam válidas precisamos de mais postulados. O seguinte é chamado de postulado da separação do plano.

Postulado 5 -Dada uma reta r, existem dois conjuntos convexos H_1 e H_2 tais que :

1) $H_1 \cap r = \emptyset$, $H_2 \cap r = \emptyset$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ e $\pi = r \cup H_1 \cup H_2$.

2) Se $P \in H_1$ e $Q \in H_2$, o segmento $\overline{PQ}$ intersecta r num ponto R.

H_1 e H_2 são chamados de semiplanos determinados por r.

Exercício 2 : Defina interior de um ângulo .

Um plano que satisfaz estes 5 postulados é chamado de plano de Pasch.

Apesar de já termos a noção de ângulo, nada foi dito sobre como medir estes ângulos. Para isto precisamos do seguinte postulado, chamado de postulado do transferidor:

Postulado 6 - Existe uma função que associa a cada ângulo $\angle ABC$, um número real $m(\angle ABC)$ tal que:

a) $0 < m(\angle ABC) < 180$.

b) Se D está no interior de um ângulo $\angle ABC$, então $m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC)$.

c) Se H_1 é um semiplano determinado pela reta que contém os pontos B e C e x é um real entre 0 e 180, então existe $A \in H_1$ tal que $m(\angle ABC) = x$ e se $P \in H_1$ satisfaz $m(\angle PBC) = x$, então $P \in \overrightarrow{BA}$.

Um fato importante é estabelecer uma relação entre a medida de ângulo e a distância entre pontos. Isto é feito com o seguinte postulado (LAL):

Postulado 7 - Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tais que AB = A'B', AC = A'C' e $m(\angle CAB) = m(\angle C'A'B')$, então, temos que BC = B'C' e que $m(\angle BCA) = m(\angle B'C'A')$, $m(\angle ABC) = m(\angle A'B'C')$.

Exercício 3 : A geometria de Taxista tem como plano de incidência o $I\!R \times I\!R$ e as retas são os conjuntos $r_a = \{(a, y), y \in I\!R\}$ e $r_{m,b} = \{(x, mx + b), x \in I\!R\}$. As réguas são f(a,y) = y para a reta r_a e $f(x, mx + b) = (1 + |m|)x$, para a reta $r_{m,b}$. Desta forma , se P = (x,y) e Q = (w,z), a distância entre estes pontos é dada por $PQ = |x - w| + |y - z|$. A medida de ângulo é a mesma da geometria analítica.

Dê um exemplo que mostra que o postulado LAL não é válido na geometria do taxista. Com todas estas exigências em π , restam apenas dois modelos de geometria. A geometria hiperbólica e a geometria euclidiana.

Assim, ao se colocar um último postulado, chamado de postulado das paralelas, chega-se finalmente à geometria euclidiana plana.

Antes de fazer isto, é importante listar alguns resultados que são válidos em geometrias que satisfazem os 7 postulados dados:

1) Dados uma reta r e um ponto P, existe uma única reta s que contém o ponto P e é perpendicular a r.

2) Dados uma reta r e um ponto P que não pertence a r, existe pelo menos uma reta s que contém o ponto P e é paralela é reta r. (Esta proposição lembra o postulado das paralelas e salienta que a essência do postulado está na unicidade da reta paralela).

3) Dados 3 pontos A, B e C, vale a desigualdade triangular $AB + BC \geq AC$.

4) Em um $\triangle ABC$, o maior lado corresponde ao maior ângulo.

5) Em um $\triangle ABC$, seje D o pé da perpendicular de B para a reta que contém A e C . Se AC é o lado maior do triângulo, então A - D - C.

6) Dado um $\triangle ABC$ e D um ponto tal que A - B - D, então $m(\angle CBD) \geq m(\angle CAD) + m(\angle ACB)$.

7) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é ≤ 180.

Postulado 8 - Dada uma reta r e um ponto P fora desta reta, existe uma **única** reta s que contém P e é paralela a r.

Damos a seguir uma serie de resultados que dependem do postulado P8 e que fazem parte da geometria euclidiana. Além disto, qualquer um dos resultados que vamos apresentar pode substituir o postulado P8.

1) Dadas duas retas r e s e uma reta transversal t, se $r \| s$, cada par de ângulos alternos internos é congruente.

2) Em um $\triangle ABC$, a soma das medidas dos ângulos internos é 180.

3) Se uma transversal é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então ela é perpendicular a outra.

4) Uma diagonal divide um paralelogramo em dois triângulos congruentes.

5) Em um paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

6) As diagonais de um paralelogramo se bisectam.

7) Um quadrilátero de Sacheri é um retángulo.(Um quadrilátero ABCD é dito ser um quadrilátero de Sacheri se $m(\angle A) = m(\angle D) = 90$ e AB = CD).

Dadas duas retas r e r' e uma transversal t a estas duas retas, o postulado P8 nos permite definir uma projeção da reta r na reta r' na direção da reta t, da seguinte forma:

Dado um ponto A na reta r , sabemos pelo postulado P8 que existe uma única reta r_A que contém A e é paralela à reta t. Definimos a projeção do ponto A na reta r' como sendo o ponto $A' = r' \cap r_A$.

Esta projeção satisfaz as seguintes propriedades:

a) Preserva congruência de segmentos.

b) Preserva a relação, estar entre , ou seja se A - B - C então, A' - B'- C'.

c) Se A, B, C são pontos de r e , A' , B', C'. são suas projeções paralelas em r, então $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Este último resultado é conhecido como teorema de Tales.

Este tipo de pensamento nos conduz a uma relação importantíssima na soluçãao de problemas de geometria euclidiana, que é a relação de semelhança entre triângulos.

Definição: Dizemos que o $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle A'B'C'$ se $m(\angle A) = m(\angle A')$, $m(\angle B) = m(\angle B')$, $m(\angle C) = m(\angle C')$ e $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Sendo este o caso, usamos a notação $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Valem os seguintes resultados:

1) (AAA) Se $m(\angle A) = m(\angle A'), m(\angle B) = m(\angle B'), m(\angle C) = m(\angle C')$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

2) (AA) Se $m(\angle A) = m(\angle A'), m(\angle B) = m(\angle B')$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

3) (LLL) Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

4) (LAL) Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ e $m(\angle C) = m(\angle C')$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Um resultado que leva a uma rápida prova do teorema de Pitágoras é o seguinte:

5) Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A e seja AD a altura, onde B - D - C. Então, $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$.

6) (Teorema de Pitágoras) Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A, então, $a^2 = b^2 + c^2$.

7) (Recíproca do teorema de Pitágoras) Dado o $\triangle ABC$ que satisfaz $a^2 = b^2 + c^2$, então este triângulo é retângulo em A.

Outro resultado interessante e que está ligado à noção de área de um triângulo é o seguinte:

8) Dado um triângulo qualquer, o produto de um lado pela altura correspondente, independe da escolha do lado.

Aqui é importante observar que se $\triangle ABC$ é um triângulo, retângulo no vértice C, então as frações $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{c}{a}, \frac{c}{b}, \frac{b}{a}$ só dependem da medida do ângulo $\angle BAC$. Assim, se $m(\angle BAC) = \theta$, podemos definir novas funções, chamadas de funções trigonométricas.

$sen(\theta) = \frac{a}{c}, cos(\theta) = \frac{b}{c}, tg(\theta) = \frac{a}{b}$ e suas inversas.