NOTAS DE AULAS DE MAT 421

Geometria Não Euclidiana

Introdução: No final do século XVIII e início do século XIX, aconteceu um fato surpreendente; matemáticos começaram a pensar na existência de geometrias autoconsistentes que diferissem da de Euclides (325 a.C. - 265 a.C.), em particular no que diz respeito às retas paralelas.

Afirmações como a de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180 graus, começavam a ser postas em causa e a merecer alguma atenção. As idéias principais, destas novas teorias, foram concebidas independentemente por 3 grandes matemáticos; János Bolyai(1802 - 1860), Nikolai Lobachevsky(1792 - 1856) e Carl Friedrich Gauss(1777 - 1855).

O pai de János Bolyai, o matemático Farkas Bolyai(1775 - 1856), amigo de Gauss, também trabalhou o axioma das paralelas de Euclides. Ele próprio aconselhou o filho a não perder tempo com "tão venenoso problema". Mas em 1823, János Bolyai escreveu ao pai contando sobre as suas maravilhosas descobertas e dizendo-lhe que havia criado um novo universo a partir do nada.

Lobachevsky, em 1826, fez uma palestra sobre as paralelas e, em 1829, publicou um artigo, onde apresentava uma alternativa a Euclides. A crítica denominou este trabalho de Geometria Imaginária. Em 1832, János Bolyai publicou o seu trabalho sobre a geometria não euclidiana. Nessa altura, Gauss escreve a Farkas Bolyai dizendo-lhe que ele também já havia chegado a resultados idênticos, mas ainda não os tinha publicado. A recusa do reconhecimento do trabalho de Bolyai, por parte de Gauss, fez com que Bolyai vivesse na obscuridade matemática. O mérito do seu trabalho só foi reconhecido após a sua morte. O mesmo aconteceu com Lobachevsky que morreu cego e na pobreza.

Gauss também se dedicou ao estudo da geometria não euclidiana, mas ele nunca publicou nenhum dos seus trabalhos, com receio da opinião pública.

O primeiro grande matemático a reconhecer a sua importância foi Georg Reimann(1826 - 1866), quando desenvolveu a teoria geral das variedades, em 1854, legitimando, de uma maneira muito clara, não só os vários tipos de geometrias não euclidianas, mas também as chamadas Geometrias Reimannianas.

A aceitação total da geometria não euclidiana só se estabeleceu após a morte de Reimann.

Vem então as seguintes questões: Por quê precisamos da geometria não euclidiana? Que tipo de argumento científico poderia ter chamado a atenção de matemáticos tão ilustres como Nikolai Lobachevsky, János Bolyai, Carl Friedrich Gauss e Bernhard Riemann, para que dedicassem parte de sua vida a estabelecer uma geometria que ia contra o senso comum, a vida diária?

Basicamente o que esses pesquisadores investigavam era o que ocorreria se eles desprezassem o quinto postulado de Euclides.

A tarefa agora era a de construir uma geometria onde o quinto postulado seria substituido por um novo postulado. A idéia subjacente a isso era que se o quinto postulado era realmente um teorema, então, mais cedo ou mais tarde, a nova geometria conteria contradições lógicas, o que significaria que a suposição inicial estava errada e o quinto postulado estaria provado.

O quinto postulado foi então substituido pelo postulado que afirmava que por um ponto fora de uma reta podem ser traçadas pelo menos duas retas paralelas à reta dada, e após a construção dessa nova geometria, não foram encontradas contradições. Mais ainda, eles descobriram que tinham uma nova e elegante geometria com várias características interessantes e únicas. Por exemplo, nessa nova geometria a soma dos ângulos internos de um triângulo era menor do que 180 graus e que este resultado dependia das dimensões lineares do triãngulo.

Essa nova geometria era bastante particular. Em uma região bastante pequena do espaço, ela era praticamente euclidiana, mas em grandes regiões as duas eram essencialmente diferentes. Essa geometria é a que passou a ser chamada de geometria hiperbólica.

É importante notar que tanto Lobachevsky, como Gauss não se limitaram aos aspectos matemáticos dessa importante descoberta. Eles imediatamente começaram a pensar como essa nova geometria poderia estar relacionada com o mundo físico. Queriam saber qual das duas geometrias, a euclidiana ou a não-euclidiana recém descoberta, descrevia realmente o espaço.

Tentando responder a essa questão, Gauss tentou medir a soma dos ângulos de um triângulo formado por três montanhas. Lobachevsky tentou fazer a mesma medida só que usando um triângulo bem maior formado por duas posições da Terra em sua órbita e uma estrela distante de paralaxe conhecida.

Ao contrário da geometria euclidiana, as geometrias que foram descobertas são definidas sobre a superfície de uma esfera ou de um hiperbolóide (algo parecido com a sela de um cavalo).

Dizemos que uma superfície esférica tem curvatura positiva, enquanto que a superfície de um hiperbolóide tem curvatura negativa. Em uma superfície com curvatura positiva a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado nessa superfície é maior que 180 graus e no caso de uma superfície com curvatura negativa, a soma desses ângulos internos é menor que 180 graus.

Um fato que dá força ao estudo das geometrias não euclidianas é a afirmação de Albert Einstein(1879 - 1955) de que as idéias contidas nesta teoria muito contribuiram para estabelecer a sua teoria da relatividade. Observamos que a Teoria da Gravitação de Einstein afirma a existência de curvatura no espaço-tempo e desta forma ela utiliza necessariamente as geometrias não euclidianas. É importante salientar aqui que a fórmula que determina a distância no espaço-tempo, não é euclidiana. A métrica usada é a chamada métrica de Minkowski, devida ao matemático alemão Hermann Minkowski(1864 - 1909) que foi professor de matemática de Einstein.

Capítulo I

Dos Elementos de Euclides à Geometria Neutra

Euclides escreveu o seu Elementos com a finalidade de organizar e colocar bases axiomáticas na matemática desenvolvida naquela época e apesar de não conter toda a matemática feita no seu tempo, podemos afirmar que o sucesso obtido foi tamanho que ainda hoje ele é considerado o livro mais importante da matemática. "Os Elementos" não é apenas um livro de geometria, ele trata também de teoria dos números. Com relação à geometria, Euclides coloca bases e organiza a geometria da seguinte forma:

Definicões:

1. Um ponto é o que não tem partes.
2. Uma linha é um comprimento sem largura.
3. Uma linha reta é uma linha que assenta igualmente os pontos sobre ela.
4. Uma superfície é aquela que tem somente comprimento e largura.
5. As extremidades de uma superfície são linhas.
6. Uma superfície plana é uma superfície que assenta igualmente com as linhas retas sobre ela.
7. Um ângulo plano é a inclinação de uma para a outra de duas linhas retas no plano que se encontram, mas que não estão sobre uma mesma linha reta.

Para não alongar demasiado este tópico, observamos apenas que Euclides continua ainda com as seguintes definições :

9. ângulo reto, 10. linhas retas perpendiculares, 11. ângulo obtuso, 12. ângulo agudo, 13. figura, 14. bordo de uma figura, 15. circunferência, 16. centro da circunferência, 17. diâmetro, 18. semi-circunferência, 19. triângulos, 20. quadriláteros, e finalmente 21. retas paralelas.

Postulados:

1. Pode se traçar uma única linha reta ligando quaisquer dois pontos.
2. Pode se continuar, de maneira única, qualquer linha reta finita continuamente em uma linha reta.
3. Pode se traçar uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma linha reta corta duas outras e forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas linhas retas se encontrarão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Temos ainda as noções comuns.

Noções Comuns:

1. Coisas iguais a uma mesma coisa são iguais.
2. Coisas iguais somadas a (subtraidas de) coisas iguais resulta em coisas iguais.
3. Coisas que coincidem com outra coisa são iguais.
4. O todo é maior que qualquer parte.

Apesar da genialidade de Euclides e da importância dos Elementos para a geometria, matemáticos do século XIX sentiram a necessidade de reescrever a geometria contida nos Elementos de maneira mais formal e adaptada aos conceitos matemáticos desenvolvidos até aquele momento. O primeiro a apresentar um sistema rigoroso de axiomas da Geometria Euclidiana foi Moritz Pasch(1843 - 1931), em 1882; depois vieram David Hilbert (1862-1943)e G. D. Birkhoff(1884-1944). O sistema de axiomas que vamos apresentar a seguir pode ser atribuido ao esforço destes matemáticos.

No pensamento atual, as noçõs de espaço, plano, reta, ponto devem ser, a priori, indefinidas. O conjunto de postulados que definirão a geometria deve ser **consistente** ou seja um postulado não pode contradizer um outro. Um modo de ver a consistência é exibindo um modelo. Um outro fato importante é que o sistema de postulados seja **completo**, ou seja, que só exista uma única geometria satisfazendo ao conjunto de postulados estabelecido. No que se segue, apresentaremos um sistema de postulados, começando com os postulados de incidência, o postulado da régua, o postulado da separação do plano, o postulado do transferidor e o postulado LAL. Ao se colocar estes postulados, várias geometrias vão sendo definidas, até que chegaremos ao que vamos chamar de **geometria neutra ou geometria absoluta**. Neste ponto, como o sistema de postulados não está ainda completo, podemos fazer hipóteses sobre as figuras geométricas das possíveis geometrias, como por exemplo, se um certo ângulo de um quadilátero de Saccheri é reto, agudo ou obtuso. Estas hipóteses nos levarão a duas possíveis geometrias; a Geometria Euclidiana e a Geometria Hiperbólica.

Definição: Uma **geometria plana** é um conjunto π, que chamamos de plano, cujos elementos são chamados de pontos e contendo certos subconjuntos chamados de retas, satisfazendo os seguintes postulados:

Postulados de Incidência:

P1 - Dados $P, Q \in \pi$, existe uma única reta r tal que $P, Q \in r$. Notaremos r por $\overleftrightarrow{PQ}$.

P2 - Cada reta tem pelo menos dois pontos.

P3 - Existem pelo menos tres pontos não colineares em π.

Uma geometria que satisfaz a este conjunto de postulado é chamada de **geometria de incidência**.

Um modelo para esta geometria pode ser visto no seguinte exemplo:

Definição:(O plano de 4 pontos) $\pi = \{A, B, C, D\}$ e o conjunto de retas é $\{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$.

Exercício 1 : Encontre um outro modelo de geometria de incidência, com 7 pontos.

Supondo que π está munido de uma função distância $d : \pi \times \pi \longrightarrow \mathbb{R}$, colocamos um novo postulado, chamado de postulado da régua. É importante lembrar que para todo par de pontos P e Q em π, a função d satisfaz;

i)$d(P, Q) \geq 0$,

ii) $d(P, Q) = 0$ se e somente se P = Q,

iii) $d(P, Q) = d(Q, P)$.

P_4 - (**Postulado da Régua**) Para cada reta r, existe uma função biunívoca $f : r \longrightarrow I\!R$ tal que $d(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$, para todos os pontos $P, Q \in \pi$.

Chamaremos as geometrias que satifazem a estes quatro postulados de **geometria métrica**.

Observamos que as geometrias métricas não admitem modelos onde o plano tem um número finito de pontos. Ademais, o postulado da régua permite que seja estabelecida uma ordem nos pontos de qualquer uma das retas e desta forma se pode definir as noções de segmento de reta, congruência de segmento, semi-reta, ângulo, triângulo, quadrilátero.

Exercício 2 : Numa geometria métrica defina segmento de reta, congruência de segmento de reta, semi-reta, ângulo, triângulo e quadrilátero, subconjunto convexo.

Um modelo de geometria métrica é dado pelo seguinte conjunto de pontos, que é chamado de plano rasgado. A escolha deste modelo, neste momento, foi devido ao fato de ele não satifazer o próximo postulado.

Definição : O plano rasgado é definido pelo conjunto de pontos

$$\pi = \Big\{(x; y) \in I\!R^2 : x < 0 \ ou \ x \geq 1\Big\}$$

e suas retas são os subconjuntos da forma $\{(x; y) : ax + by = c\}$.

Definimos uma função distância d_r no plano rasgado da seguinte forma: Sejam $P_1 = (x_1; y_1)$ e $P_2 = (x_2; y_2)$ dois pontos do plano rasgado, então

$$d_r(P_1; P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

, desde que x_1, x_2 sejam ambos ou menores que 0, ou maiores que 1.

Caso tenhamos $x_1 < 0$ e $x_2 \geq 1$ ou $x_2 < 0$ e $x_1 \geq 1$,

$$d_r(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1 - b)^2} + \sqrt{(1 - x_2)^2 + (a + b - y_2)^2}$$

,

onde P e Q estão na reta de equação y = ax + b.

A reta vertical de equação x = a tem a régua f(a,y) = y para cada ponto (a,y) nesta reta.

A reta de equação y = ax + b tem a régua $f(x;ax+b) = x\sqrt{1+a^2}$, se $x < 0$ e $f(x;ax+b) = (x-1)\sqrt{1+a^2}$, se $x \geq 1$.

Exercício 3: Construa no plano rasgado, um triângulo $\triangle ABC$ tal que $d_r(A,B) \geq d_r(A,C) + d_r(C,B)$.

Neste plano, é difícil saber se um ponto está ou não no interior de um triângulo dado. Na realidade, a noção de interior ou de exterior não pode ainda ser definida. Falta um postulado.

P_5 - **(Postulado da Separação do Plano)** Dada uma reta r, existem dois subconjuntos H_1 e H_2, chamados de semi-planos ou de lados da reta r tais que:

1) H_1 e H_2 são subconjuntos convexos de π.

2) $H_1 \cap r$, $H_2 \cap r$, $H_1 \cap H_2$ são todos o conjunto vazio e cada ponto de π ou está em H_1 ou está em H_2, ou está em r.

3) Se $P \in H_1$ e $Q \in H_2$, então o segmento $\overline{PQ}$ intersecta a reta r em um ponto R.

Existe um outro postulado, que é equivalente a P5.

PP - (Postulado de Pasch) Dada uma reta r e um triângulo $\triangle ABC$, suponha que existe $D \in r$ tal que A - D - B, então r intersecta o lado $\overline{AC}$ ou intersecta o lado $\overline{BC}$.

Por causa desta equivalência, as geometrias que satisfazem estes cinco postulados são chamadas de **geometrias de Pasch**.

Exercício 4 : Defina interior de um ângulo $\angle ABC$ e interior de um triângulo.

Exercício 5 : Seja P um ponto no interior do ângulo $\angle ABC$.

Prove que a semi-reta $\overrightarrow{BP}$ intersecta o segmento $\overline{AC}$, num único ponto F tal que A - F - C.

P_6 - **(Postulado do Transferidor)** Existe um número real r_0 e uma função m que associa a cada ângulo $\angle ABC$, um número real $m(\angle ABC)$

satisfazendo:

a) $0 < m(\angle ABC) < r_0$.

b) Se D é um ponto no interior do ângulo $\angle ABC$, então $m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC)$.

c) Se H_1 é um dos semi-planos definidos por $\overleftrightarrow{BC}$ e $0 < \alpha < r_0$, então existe um ponto A em H_1 tal que $m(\angle ABC) = \alpha$.

Observação: O número r_0 será 180 (se a medida é em graus) ou π (se a medida é em radianos).

Uma geometria que satisfaz a estes seis postulados é chamada de **geometria do transferidor**.

Um modelo de geometria do transferidor é dado pelo plano de Moulton.

Definição : O plano de Moulton é o conjunto $\mathbb{R}^2$ e suas retas são as retas verticais, de equação x = a, as retas de equação y = ax + b , caso $a < 0$ e finalmente as "retas quebradas"y = 2ax + b se $x < 0$ e y = ax + b se $x \geq 0$, no caso em que $a \geq 0$.

A métrica do plano de Moulton é definida assim:

Sejam $P_1 = (x_1; y_1)$ e $P_2 = (x_2; y_2)$ dois pontos do plano de Moulton, então,

$$d_m(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

, sempre que $x_1.x_2 \geq 0$, ou se $x_1.x_2 < 0$ e $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$.

No caso em que $x_1.x_2 < 0$ e $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$,

$$d_m(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1 - b)^2} + \sqrt{(x_2)^2 + (b - y_2)^2}$$

, onde $b = \frac{2x_2.y_1 - x_1.y_2}{2x_2 - x_1}$.

A medida de ângulo é definida da seguinte forma:

Considere o ângulo $\angle ABC$. Suponhamos inicialmente que o vértice B não pertença ao eixo 0y. Neste caso, tome A' na semi-reta $\overrightarrow{BA}$(do plano de Moulton) e que esteja no mesmo lado que B com relação ao eixo 0y. Escolha C' de maneira análoga, trocando o A por C, e defina a medida de $\angle ABC$ como sendo a medida euclidiana de $\angle A'BC'$. No caso em que B pertence ao eixo 0y ou seja B = (0,b) e $A = (a_1; a_2)$ e $C = (c_1; c_2)$, consideramos o ponto $A_b = (a_1; 2a_2 - b)$ caso $a_1 > 0$ e $a_2 > b$ e nos outros casos $A_b = A$. Analogamente, definimos e C_b e tomamos a medida de $\angle ABC$ como sendo a medida euclidiana do ângulo $\angle A_bBC_b$.

Exercício 6: No plano de Moulton construa um triângulo $\triangle ABC$ tal que a soma das medidas de seus ângulos é maior do que 180 graus. Construa outro cuja soma das medidas de seus ângulos é 180 graus e um outro onde a soma é menor que 180 graus.

O próximo postulado é fundamental na geometria, uma vez que ele trata do importante conceito de congruência de triângulos.

P_7 - **(Postulado LAL) :** Dados dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tais que AB = A'B', BC = B'C' e $m(\angle ABC) = m(\angle A'B'C')$, então os triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$, são congruentes.

Uma geometria aonde valem estes sete postulados é chamada de **geometria neutra ou ainda de geometria absoluta**.

Numa geometria métrica, dados uma reta r e um ponto P que não pertnce a r, a distância de P até a reta r definida como sendo $inf\ \{d(P,R)/R \in r\}$.

Exercício 7: Na geometria neutra, considere uma reta r e um ponto P que não pertence a r. Prove que a distância de P até a reta r é a distância de P até A, onde A é o pé da perpendicular a r que passa em P.

A seguir, vamos estabelecer uma série de resultados que são válidos na geometria neutra. Estes resultados são colocados na forma de exercícios, seguindo a máxima de que é se fazendo que se aprende. A figura principal, nestes exercícios iniciais, é um quadrilátero, chamado de quadrilátero de Saccheri, nome advindo do geômetra Giovanni Girolamo Saccheri (1667 - 1733), que teve um papel muito importante no desenvolvimento das geometrias não euclidianas. A ferramenta principal na solução dos exercícios que se seguem é o postulado LAL e suas variantes. Antes, porém, vejamos a definição de quadrilátero de Saccheri.

Definição: Um quadrilátero ABCD é dito ser um quadrilátero de Saccheri se $m(\angle DAB) = m(\angle ADC) = 90$ e AB = CD.

Exercício 8: Seja ABCD um quadrilátero de Saccheri. Prove que:

a) AC = BD

b) $m(\angle ABC) = m(\angle BCD)$.

Exercício 9: No quadrilátero de Saccheri ABCD, prove que $BC \geq AD$. Conclua daí que $m(\angle ABC) \leq m(\angle ADC)$.

Na análise do ângulo $\angle ABC$, temos, por causa do exercício 8, que este ângulo ou é reto ou é agudo.

A hipótese do ângulo reto é a hipótese de que $m(\angle ABC) = 90$ e a hipótese do ângulo agudo é a hipótese de que $m(\angle ABC) < 90$. Estas duas hipóteses nos conduzirão às geometrias euclidiana e hiperbólica.

Exercício 10: Seja ABCD um quadrilátero de Saccheri. Prove que:

a) ABCD satisfaz a hipótese do ângulo reto se e somente se AD = BC.

b) ABCD satisfaz a hipótese do ângulo agudo se e somente se $AD < BC$.

Exercício 11: Seja ABCD um quadrilátero de Saccheri. Prove que $m(\angle ABD) \leq m(\angle BDC)$.

Exercício 12: Na geometria neutra, seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo. Prove que os outros dois ângulos são agudos.

Exercício 13: Na geometria neutra, mostre que a soma das medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo é menor ou igual a 90.

Exercício 14: Na geometria neutra, prove que a soma das medida dos ângulos de um triângulo é menor ou igual a 180.

Neste ponto vale a pena observar que o plano de Moulton definido anteriormente, não é um plano da geometria neutra, pois de acordo com o exercício 6, existem neste plano, triângulos cuja soma das medidas dos seus ângulos ultrapassam 180.

Definição: Em qualquer geometria, dizemos que duas retas são paralelas se elas não se intersectam.

Exercício 15: Na geometria neutra, considere uma reta r e um ponto A que não pertence a r. Construa uma reta s que contenha o ponto A e seja paralela à reta r.

Exercício 16: Na geometria neutra e com a hipótese do ângulo agudo, considere uma reta r e um ponto A que não pertence a r. Construa duas retas distintas s e t contendo A e paralelas a r.

Exercício 17: Prove que todo quadrilátero de Saccheri é um paralelogramo.

Exercício 18: Na geometria neutra, suponha que a hipótese do ângulo reto vale para todos os quadriláteros de Saccheri. Prove a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo vale 180.

Exercício 19: Na geometria neutra, suponha que a hipótese do ângulo agudo vale para todos os quadriláteros de Saccheri. Prove a soma das medidas dos ângulos de qualquer triângulo é menor que 180.

Definição: Dado um $\triangle ABC$, o número real $\delta(\triangle ABC) = 180 - m(\angle CAB) - m(\angle ABC) - m(\angle BCA)$ é chamado de deficiência do $\triangle ABC$.

Se vale a hipótese do ângulo reto todo triângulo tem deficiência nula. Entretanto, se vale a hipótese do ângulo agudo, para todo real $0 < a < 180$, existe um triângulo com deficiência a.

Exercício 20: Seja AB um diâmetro de uma circunferência e C um ponto desta circunferência, distinto de A e de B. Prove que:

a) $m(\angle ACB) = 90$ se e somente se vale a hipótese do ângulo reto.

b) $m(\angle ACB) < 90$ se e somente se vale a hipótese do ângulo agudo.

Existe um outro tipo de quadrilátero que está estreitamente relacionado ao quadrilátero de Saccheri e que é devido ao matemático frances Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777).

Definição: Um quadrilátero ABCD é dito ser um quadrilátero de Lambert se $m(\angle DAB) = m(\angle ABC) = m(\angle ADC) = 90$.

Exercício 21: Seja ABCD um quadrilátero de Saccheri e M o ponto médio de $\overline{AD}$ e N o ponto médio de $\overline{BC}$. Prove que MNBA é um quadrilátero de Lambert.

Exercício 22: Seja ABCD um quadrilátero tal que MNBA é um quadrilátero de Lambert, onde M o ponto médio de $\overline{AD}$ e N o ponto médio de $\overline{BC}$. Prove que ABCD é um quadrilátero de Saccheri.

Exercício 23: Seja ABCD um quadrilátero de Lambert. Prove que:

a) $m(\angle BCD) = 90$ se e somente se AB = CD. b) $m(\angle BCD) < 90$ se e somente se $AB < CD$.

Exercício 24: Seja ABCD um quadrilátero de Saccheri. Prove que as retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são retas paralelas e que têm uma perpendicular comum.

Exercício 25: Na geometria neutra e com a hipótese do ângulo agudo, considere duas retas r e s. Prove que se elas têm uma perpendicular comum, entâo esta perpendicular é única.

Observação: Retas que têm uma perpendicular comum são paralelas e neste caso, podemos definir a distância entre elas como sendo a distância entre os dois pontos de interseção das duas retas com a perpendicular comum.

Exercício 26: Discuta a validade da observação anterior, na hipóteses do ângulo reto e do ângulo agudo.

Exercício 27: Prove que se a hipótese do ângulo reto vale para o quadrilátero de Saccheri ABCD,

então esta hipótese vale para qualquer quadrilátero de Saccheri EFGH.

Exercício 28: Prove que se a hipótese do ângulo agudo vale para o quadrilátero de Saccheri ABCD,

então esta hipótese vale para qualquer quadrilátero de Saccheri EFGH.

Exercício 29: Dado o $\triangle ABC$ com $m(\angle BCA) = 90$, tome M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N ponto de $\overline{AC}$ tal que $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.

Prove que :

a) Se vale a hipótese do ângulo reto, então AC = 2AN e BC = 2MN.

b) Se vale a hipótese do ângulo agudo, então $AC < 2AN$ e $BC > 2MN$.

(Sugestão: Tome O em $\overleftrightarrow{MN}$ tal que $\overline{BO}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{MN}$ tal que $\overline{BO}$ e por Lado-Ângulo-Ângulo Oposto, obtenha a congruência $\triangle ANM \equiv \triangle BOM$ e desta forma NOBC é um quadrilátero de Lambert.)

Exercício 30: Dado um ângulo $\angle ABC$ e um número real positivo a,

encontre um ponto $D \in \overrightarrow{BC}$ tal que a distância de D até $\overleftrightarrow{AB}$ é maior que a.

(Sugestão: Use o exercício 29)

Exercício 31: Com a hipótese do ângulo agudo, considere duas retas distintas r e s que têm uma perpendicular comum. Prove que dado um número real positivo a, existe um ponto $A \in r$ tal que a distância de A até a reta s é maior do que a.

Exercício 32: Na geometria neutra e com a hipótese do ângulo agudo, considere uma reta r, um ponto A que não pertence a r e um ponta B em r tais que $\overline{AB}$ é perpendicular a r.

Determine um real $0 < \alpha < 90$ tal que para todo $D \neq A$ temos:

a) Se $0 < m(\angle DAB) < \alpha$, $\overleftrightarrow{AD}$ e r não são retas paralelas.

b) Se $m(\angle DAB) = \alpha$, $\overleftrightarrow{AD}$ e r são retas paralelas, que não têm uma perpendicular comum.

c) Se $\alpha < m(\angle DAB) \leq 90$, $\overleftrightarrow{AD}$ e r são retas paralelas, com uma perpendicular comum.

Definição; O número real α é chamado de **ângulo de paralelismo da reta r e do ponto A**. As retas $\overleftrightarrow{AD}$ tais que $\alpha < m(\angle DAB) \leq 90$ são chamadas **hiperparalelas de r** ou ainda, por causa do exercício 30, chamadas de **paralelas divergentes de r**. As retas $\overleftrightarrow{AD}$ tais que $\alpha = m(\angle DAB)$, são chamadas de **paralelas assintóticas a r**, uma vez que elas tedem a r.

Exercício 33: Prove que o ângulo de paralelismo só depende da distância d = d(A,r).

Para cada real positivo d, podemos tomar uma reta r e um ponto A não pertencente a r tal que a distância de A até r seja d e depois considerar o ângulo do paralelismo α que só depende de d. Assim fica definida a função

$\Pi :]0, \infty[\longrightarrow I\!R$, $\Pi(d) = \alpha$, que é chamada de função crítica de Lobatchevsky.

Exercício 34: Com relação à função crítica de Lobatchevsky, prove que:

a) Se existe d tal que $\Pi(d) = 90$, então Π é constante.

b) Se não existe tal d, então Π é uma função estritamente decrescente e sua imagem é]0, 90[.

O Quinto Postulado de Euclides e Algumas Formas Equivalentes:

P_8 - **(Quinto Postulado de Euclides) :** Dados $A, B \in r_1$, $C, D \in r_2$ e $B, C \in r_3$ tais que A e D estão em um mesmo semi-plano determinado por r_3 e $m(\angle ABC) + m(\angle DCB) < 180$, então r_1 e r_2 se encontram em um ponto que está situado no mesmo semi-plano determinado por r_3, que o ponto A.

Sabemos que numa geometria neutra, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é menor ou igual a 180 e desta forma temos duas possíveis hipóteses. Ou esta soma é 180 (hipótese do ângulo reto) ou esta soma é menor que 180 (hipótese do ângulo agudo). Nos exercícios que seguem, veremos que a hipótese do ângulo reto equivale ao quinto postulado de Euclides e a outras formas equivalentes.

Exercício 35: Seja C um ponto da circunferência de diâmetro $\overline{AB}$, $C \neq A$, $C \neq B$. Prove que vale a hipótese do ângulo reto se e somente se $m(\angle ACB) = 90$.

Exercício 36: Prove que se um ponto C é tal que $m(\angle ACB) = 90$, então C está na circunferência de diâmetro $\overline{AB}$.

Exercício 37: Prove que o quinto postulado de Euclides é equivalente às seguintes formas:

a)Considere tres retas r_1, r_2 e r_3. Se r_1 é paralela a r_2 e r_2 é paralela a r_3, então r_1 é paralela a r_3 ou coincide com r_3.

b) Dada uma reta r e um ponto P fora de r, existe uma única reta s contendo P e paralela a r.

c) Para todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é 180.

d) Existe um triângulo tal que a soma das medidas dos ângulos internos é 180.

e) Todo quadrilátero de Saccheri é um retângulo.

f) Existe um retângulo.

g) Todo quadrilátero de Lambert é um retângulo.

h) Para todo triângulo, as mediatrizes são conrrentes.

i) Todo triângulo pode ser inscrito em uma circunferência.

j) Para todo triângulo, as alturas são concorrentes.

Obs: Uma maneira de mostrar que a condição j) implica o postulado das paralelas é a seguinte: Vamos supor que vale a hipótese do ângulo agudo e como feito anteriormente, tomemos uma reta r e um ponto P fora de r. Traçamos por P uma perpendicular a r, que intersecta r no ponto Q e tomamos nesta perpendicular um ponto R tal que P-Q-R. Seja α o ângulo do paralelismo e traçamos por P a reta s que forma com $\overleftrightarrow{PQ}$ um ângulo de medida α. Traçamos por R a perpendicular a s, que, por causa do postulado de Pasch, intersecta r no ponto S. Com isto, construimos o $\triangle PRS$ que tem r e s como alturas.

Semelhança de Triângulos:

A noção de semelhança de triângulos pode ser definida na geometria neutra, entretanto sem o quinto postulado de Euclides, ela equivale à noção de congruência, não acrescentando nada, como indica o exercício 39. Por outro lado, se vale o quinto postulado de Euclides, esta é uma noçao de fundamental importãncia da geometria euclidiana.

Definição; Dizemos que o $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle A'B'C'$ e usamos a notação $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, se o ângulo de vértice A é congruente ao ângulo de vértice A', o ângulo de vértice B é congruente ao ângulo de vértice B', o ângulo de vértice C é congruente ao ângulo de vértice C'.

Exercício 38: Prove que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ se e somente se $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Exercício 39: Mostre que o quinto postulado de Euclides é válido se e somente se existem dois triângulos semelhantes e não congruentes.

Observação: O célebre teorema de Pitágoras e a lei dos cossenos são também equivalentes ao quinto postulado de Euclides.

A Geometria Hiperbólica

O que vamos fazer a seguir é construir um modelo de geometria neutra que não satifaz o quinto postulado de Euclides. Este será um modelo de geometria plana, chamada de **geometria plana hiperbólica**. O plano de pontos que usaremos é o conjunto de pares de números reais (x,y) com $y > 0$. Definimos a família de retas deste plano e iremos passo a passo provando que este plano satisfaz a todos os sete postulados da geometria neutra, mas que não satisfaz o quinto postulado de Euclides. Construimos desta forma um modelo de geometria não euclidiana, aonde vale a hipótese do ângulo agudo.

Definição(O Semi-Plano de Poincaré): O plano da geometria hiperbólica é o conjunto

$$\mathcal{H} = \left\{(x, y) \in I\!R^2 : y > 0\right\}$$

.

As retas deste plano são de dois tipos.
Tipo 1 : $r_a = \{(a, y) : y > 0\}$, com $a \in I\!R$.
Tipo 2 : $r_{p,\rho} = \{(x, y) \in I\!R^2 : (x - p)^2 + y^2 = \rho^2\}$, com $p \in I\!R$ e $\rho > 0$.

Exercício 40: Prove que esta é uma geometria de incidência.

A Função Distância no Plano Hiperbólico

Veremos agora que o semi-plano de Poincaré, com sua família de retas é também uma geometria métrica. Vamos definir uma função distância, que notaremos por d_H.

Definição: Sejam $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ dois pontos de $\mathcal{H}$. A função distância de Poincaré é dada por:

a) $d_H(P,Q) = \left| ln(\frac{y_2}{y_1}) \right|$, se $x_1 = x_2$, ou seja se $P, Q \in r_{x_1}$

b) $d_H(P,Q) = \left| ln(\frac{\frac{x_1-p+\rho}{y_1}}{\frac{x_2-p+\rho}{y_2}}) \right|$, se $P, Q \in r_{p,\rho}$.

Segue direto da definição, que d_H satisfaz i) e iii) da definição de distância (ver página 5). Entretanto, a condição ii) ou seja que $d(P,Q) = 0$ se e somente se P = Q, não é imediata. Para isto, precisamos definir uma função régua para cada reta do plano hiperbólico. O fato das funções definidas serem bijetoras vai implicar em d_H ser uma função distância e ao mesmo tempo teremos que nossa geometria é uma geometria métrica.

Para as retas de Tipo 1, temos a régua $f : r_a \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(a,y) = ln(y)$.

Para as retas de Tipo 2, temos a régua $f : r_{p,\rho} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = ln(\frac{x-p+\rho}{y})$.

Exercício 41: Prove que $f : r_a \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(a,y) = ln(y)$ é uma régua.

Antes de fazer o próximo exercício, consideremos as seguintes funções:

$senh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, $cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$,

$tgh(t) = \frac{senh(t)}{cosh(t)}$, $sech(t) = \frac{1}{cosh(t)}$,

$csech(t) = \frac{1}{senh(t)}$ e $ctgh(t) = \frac{cosh(t)}{senh(t)}$.

Exercício 42: Considere a régua $f : r_{p,\rho} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = ln(\frac{x-p+\rho}{y})$ e faça $t = ln(\frac{x-p+\rho}{y})$. Prove que $x = p + \rho.tgh(t)$ e que $y =$

$\rho.sech(t)$. Conclua disto que f é uma régua.

Exercício 43: Use os exercício 41 e 42 para obter que $\mathcal{H}$, munido de suas retas e da função d_H, é uma geometria métrica.

Exercício 44: Uma curva parametrizada em $\mathcal{H}$ é a imagem de uma aplicação $f : [a,b] \longrightarrow \mathcal{H}$, $f(t) = (x(t), y(t))$, onde t é o parâmetro. O comprimento hiperbólico desta curva é dado por $\int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{y(t)}dt$.

a) Seja $f(t) = (x_1, t)$, com $y_1 < t < y_2$. Calcule o comprimento desta curva e conclua que é igual à $d_H(P,Q)$, onde $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$.

b) Seja $f(t) = (\rho.cos(t) + p, \rho.sen(t))$, onde $a \leq t \leq b$. Calcule o comprimento desta curva e conclua que é igual $d_H(P,Q)$, onde $P = (\rho.cos(a) + p, \rho.sen(a))$ e $Q = (\rho.cos(b) + p, \rho.sen(b))$.

c) Considere os pontos P = (-1,1) e Q = (1,1) e a curva parametrizada f(t) = (t,1) com $-1 \leq t \leq 1$. Calcule o comprimento desta curva e verifique que é maior que $d_H(P,Q)$.

Exercício 45: Verifique que $\mathcal{H}$ satisfaz o postulado da separação do plano.

A Função Ângulo no Plano Hiperbólico

Para definir uma medida de ângulo no plano hiperbólico usaremos o fato de que $\mathcal{H}$ é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ e que em $\mathbb{R}^2$ dados tres pontos A, B, C, a medida euclidiana do ângulo $\angle ABC$ é definida por α, onde $cos(\alpha) = \frac{(A-B).(C-B)}{|A-B||C-B|}$.

Desta forma vamos considerar um ângulo $\angle ABC$ em $\mathcal{H}$, sendo $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$, $C = (x_c, y_c)$.

Caso 1: $x_a = x_b$. Neste caso, o vetor unitário tangente à semi-reta $\overrightarrow{r}_{x_b}$ é o vetor de coordenadas (0,1), no caso de $y_a > y_b$ e o vetor de coordenadas (0,-1), no caso em que $y_a < y_b$.

Vamos notar este vetor por v_{BA}. Temos também que $x_c \neq x_b$ e que existem p e $\rho > 0$ tais que $B, C \in r_{p,\rho}$. Neste caso, parametrizamos a reta por $x(t) = p + \rho.tgh(t)$, $y(t) = \rho.sech(t)$ e temos que $x'(t) = \rho.sech(t)^2$ e $y'(t) = -\rho.sech(t).tgh(t)$.

Neste caso temos que o vetor unitário na direção de (x'(t),y'(t)) é o vetor de coordenadas $\pm(sech(t), -tgh(t))$. A escolha do sinal, vai depender da variação do t. Desta forma se $B = (x(t_b), y(t_b))$ e $C = (x(t_c, y(_c))$ e $t_b < t_c$ então, tomamos o vetor $v_{BC} = (sech(t_b), -tgh(t_b))$. No caso de $t_b > t_c$, tomamos $v_{BC} = (-sech(t_b), tgh(t_b))$.

Caso 2: $x_a \neq x_b \neq x_c$. Procedemos como na construção de v_{BC} do caso 1.

Exercício 46: Dados os pontos $B = (x_b, y_b)$ e $C = (x_c, y_c)$, com $x_b \neq x_c$, verifique que:
a) $v_{BC} = (\frac{y_b}{\rho}, \frac{p-x_b}{\rho})$, no caso de $x_b < x_c$,
b) $v_{BC} = -(\frac{y_b}{\rho}, \frac{p-x_b}{\rho})$, no caso de $x_b > x_c$.

Definição: A medida hiperbólica do ângulo $\angle ABC$ é o número α, onde $cos(\alpha) = v_{BA}.v_{BC}$.

Exercício 47: Prove que a medida de ângulos definida acima satisfaz as condições do postulado do transferidor.

Exercício 48: No plano hiperbólico, determine a equação da reta que passa no ponto (3,4) e que é perpendicular a reta $r_{0,5}$.

Exercício 49: No plano de Poincaré, encontre as medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$, sabendo que A = (0,1), B = (0,5) e C = (3,4). Você deve encontrar que a soma das medidas dos ângulos internos é aproximadamente 155 graus.

Exercício 50: No plano de Poincaré, encontre as medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$, sabendo que A = (0,5), B = (0,3) e C = (2,$\sqrt{21}$).

Exercício 51: No plano de Poincaré, encontre as medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$, sabendo que A = (5,1), B = (8,4) e C = (1,3).

Exercício 52: No plano de Poincaré, considere os pontos A = (0,1), B = (0,5) e C = (4,3). Determine as coordenadas do ponto D de tal forma que ABCD seja um quadrilátero de Saccheri. Determine as medidas dos ângulos $\angle BCD$ e $\angle CDA$.

Exercício 53: Seja r a reta $r_{0,5}$ e A o ponto de coordenadas (0,10). Encontre a medida do ângulo de paralelismo da reta r e do ponto A.

Exercício 54: Seja r a reta r_0 e A o ponto de coordenadas (3,4). Encontre a medida do ângulo de paralelismo da reta r e do ponto A.

O Postulado LAL

O plano de Poincaré $\mathcal{H}$, com suas retas satifaz os postulados de incidência, o postulado da régua, o postulado da separação do plano e o postulado do transferidor. Além disto, vimos também que temos, em $\mathcal{H}$, pelo menos um triângulo cuja soma das medidas dos ângulos internos, é menor do que 180. Desta forma, resta provar que $\mathcal{H}$ também satifaz o postulado LAL e com isto teremos uma geometria plana não euclidiana, que é chamada de geometria hiperbólica. A maneira que adotaremos para provar que $\mathcal{H}$ satisfaz LAL, nos conduz ao importante conceito de **isometria**.

Definição: Uma isometria de $\mathcal{H}$ é uma aplicação bijetora $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $d_H(P, Q) = d_H(F(P), F(Q))$, quaisquer que sejam os pontos P e Q em $\mathcal{H}$.

A idéia de usar isometrias é que se tivermos dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tais AB = A'B', AC = A'C' e $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ e o grupo de isometrias de $\mathcal{H}$ for suficientemente rico, poderemos encontrar uma isometria que leva o $\triangle ABC$ no $\triangle A'B'C'$ e desta forma os triângulos são necessariamente congruentes.

Vamos a seguir considerar dois tipos de aplicações bijetoras de $\mathcal{H}$, que além de serem isometrias, geram todas as isometrias de $\mathcal{H}$. Vamos chamar estas aplicações de reflexões em relação às retas de $\mathcal{H}$. O primeiro tipo, é uma verdadeira reflexão euclidiana e o segundo tipo é definido por uma inversão.

a) Reflexão de tipo 1: $R_{r_a} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é definida por

$$R_{r_a}(x, y) = (-x + 2a, y)$$

.

b) Reflexão de tipo 2: $R_{r_{p,\rho}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é definida por

$$R_{r_{p,\rho}}(x,y) = (\frac{\rho^2}{(x-p)^2+(y)^2}(x-p)+p, \frac{\rho^2}{(x-p)^2+(y)^2}(y))$$

.

Exercício 55: Prove que $R_{r_a} \circ R_{r_a} = Id$ e $R_{r_{p,\rho}} \circ R_{r_{p,\rho}} = Id$. Conclua daí que as duas reflexões são bijeções, cujas inversas coincidem com elas mesmas.

Exercício 56: Prove que as reflexões de tipo 1 e de tipo 2 são isometrias de $\mathcal{H}$.

Exercício 57: Considere a reflexão $R_{r_{p,\rho}}$ e P um ponto de $\mathcal{H}$. Prove que se $P \in r_{p,\rho}$, então $R_{r_{p,\rho}}(P) = P$ e se $P \notin r_{p,\rho}$ e $P' = R_{r_{p,\rho}}(P)$, então o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular a $r_{p,\rho}$ e este segmento intersecta $r_{p,\rho}$ no seu ponto médio. Este resultado justifica o fato de chamarmos a inversão euclidiana de reflexão em relacão à reta $r_{p,\rho}$

Exercício 58: Considere $\mathcal{H}$ como um subconjunto dos números complexos, ou seja H= $\{z = x + iy : y > 0\}$.

Verifique que:

a)

$$R_{r_a}(z) = -\overline{z} + 2a$$

.

b)

$$R_{r_{p,\rho}}(z) = \frac{\rho^2}{\overline{z}-p} + p$$

.

Exercício 59: Seja $b \in I\!R$ e $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ a translação F(z) = z + b. Prove que F pode ser obtida como a composta de duas reflexões, ou seja $F = R_{r_{\frac{b}{2}}} \circ R_{r_0}$.

Exercício 60: Seja $a > 0$ e $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ a transformação F(z) = az. Verifique que $F = R_{r_{0,\sqrt{a}}} \circ R_{r_{0,1}}$.

Exercício 61: Seja $a > 0$, $b \in I\!R$ e $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ a transformação F(z) = az + b. Prove que F pode ser obtida como a composta de 4 reflexões.

Exercício 62: Obtenha a transformação $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $F(z) = \frac{1}{-z}$ como a composta das reflexões R_{r_0} e $R_{r_{0,1}}$. Use este resultado para concluir que $F(z) = \frac{1}{-z}$ é uma rotação de centro $z_0 = i$ e ângulo π.

Exercício 63: Sejam $a, b, c, d \in I\!R$ tais que $ac - bd > 0$. Prove que a transformação $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$,definida por $F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ pode ser obtida como uma composta de reflexões e portanto é uma isometria de $\mathcal{H}$.

Exercício 64: Sejam $A = a_1 + ia_2$ e $A' = a'_1 + ia'_2$ e $F : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, F(z) = az + b, com $a = \frac{a'_2}{a_2}$ e $b = \frac{a'_1.a_2 - a_1.a'_2}{a_2}$. Verifique que F(A) = A'.

Exercício 65: No exercício 64, notando os elementos de $\mathcal{H}$ por (x,y), verifique que A isometria F se escreve $F(x, y) = (ax + b, ay)$. Use F para obter uma isometria que leva o ponto A=(0,1) no ponto B=(3,4).

Exercício 66: Sejam A, B, B' tres pontos distintos de H, tais que AB = AB'. Determine o ponto médio M do segmento $\overline{BB'}$ e seja r a reta que contém os pontos A e M . Prove que $R_r(B) = B'$.

Exercício 67: Considere os triãngulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tais AB = A'B', AC = A'C' e $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$. Mostre que existe uma única isometria F de $\mathcal{H}$ tal que F(A) = A', F(B) = B' e F(C) = C'.

Desta forma temos em $\mathcal{H}$ uma geometria neutra, que satisfaz a hipótese do ângulo agudo. A existência deste modelo de geometria aonde não vale o quinto postulado de Euclides, tem uma importância muito grande tanto na história da matemática, como no seu desenvolvimento e também na quebra de dogmas.

Um dos conceitos fundamentais em geometria é o conceito de **área**. Vejamos como ele é na geometria hiperbólica.

Área Hiperbólica

Na geometria neutra o conceito de região poligonal está bem estabelecido e desta forma temos este conceito tanto na geometria euclidiana como na geometria hiperbólica. Desta forma vamos notar por $\mathcal{R}$ o conjunto das regiões poligonais de $\mathcal{H}$. Cada região poligonal admite uma partição por regiões triangulares, que é chamada de triangulação da região poligonal. Uma função área deve associar a cada região poligonal de $\mathcal{H}$, um número positivo que será a sua área. Como cada região poligonal admite uma triangulação, basta encontrar uma função que associe uma área para cada triângulo e que não dependa da triangulação escolhida. A função área deve então satisfazer as condições dadas na seguinte definição.

Definição: Uma função área em $\mathcal{H}$ é uma função $\alpha : \mathcal{R} \longrightarrow I\!R$ tal que :
a) $\alpha(R) > 0$ para toda região poligonal $R \in \mathcal{R}$.

b) Se o $\triangle ABC$ é congruente ao $\triangle A'B'C'$, então $\alpha(\triangle ABC) = \alpha(\triangle A'B'C')$.

c) Se R_1 e R_2 são duas regiões poligonais que se intersectam apenas em pontos dos bordos de R_1 e de R_2, então $\alpha(R_1 \cup R_2) = \alpha(R_1) + \alpha(R_2)$.

OBS: Na definição de função área, é colocada também uma outra condição, que exige que toda região poligonal determinada por um quadrilátero cujos lados medem a e com quatro ângulos internos de medida 90, tenha área a^2. Esta condição é satisfeita automaticamente em $\mathcal{H}$, uma vez que não existem tais quadriláteros.

Exercício 68: Construa em $\mathcal{H}$ um $\triangle ABC$ tal que o produto de uma altura por sua base seja diferente do produto de outra altura pela sua base correspondente.

O exercício 68 indica que a função que associa a cada região triangular o produto de uma base por sua altura correspondente, não funciona em $\mathcal{H}$, uma vez que para cada triângulo temos tres possíveis escolhas. Entretanto, a seguinte função satisfaz as condições da definição de funçao área.

Definição: Dado o triângulo $\triangle ABC$, a sua área é dada por

$$\alpha(\triangle ABC) = \frac{\pi}{180}(180 - m(\angle BAC) - m(\angle ABC) - m(\angle BCA))$$

.

Definição: Seja R uma região poligonal, então a área de R é a soma das áreas das regiões triangulares que formam R para qualquer triangulação de R.

OBS: Para que a definição acima faça sentido, é importante verificar que ela não depende da triangulação de R.

Exercício 69: Seja R uma região poligonal limitada pelo polígono convexo de n lados, $P_1P_2P_3...P_n$. Prove que a área de R é dada por

$$\alpha(R) = \frac{\pi}{180}(180(n-2) - \sum_{i=1}^{n} m(\angle P_i))$$

Uma definição alternativa para área de uma região poligonal em $\mathcal{H}$ é a seguinte:

Definição: Seja R uma região poligonal em $\mathcal{H}$, então a área hiperbólica de R é dada por

$$\alpha_1(R) = \int\int_R \frac{1}{y^2} dydx$$

Apesar de ser uma definição alternativa temos que $\alpha = \alpha_1$, como veremos nos exercícios seguintes.

Exercício 70: Seja R a região triangular com vértices A = (0,1), B = (0,5) e C = (3,4). Verifique que $\alpha(R) = \alpha_1(R)$.

Exercício 71: Seja R a região quadrangular limitada pelo quadrilátero de Saccheri ABCD de vértices A = (0,1), B = (0,5) , C = (3,4) e $D = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. Verifique que $\alpha(R) = \alpha_1(R)$.

Exercício 72: Seja R a região quadrangular limitada pelo quadrilátero de Saccheri ABCD de vértices A = (2,2), B = (2,10) , C = (8,8). Obtenha as coordenadas do ponto D e calcule a área de R.