Lista de Exercícios de MAT 112

1. Determine o vetor $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \cdot (1,4,-3) = 7$ e $\vec{v} \wedge (4,-2,1) = (3,5,-2)$.

2. Considere os vetores $\vec{u} = (1,-2,1)$, $\vec{v} = (1,0,-1)$, e $\vec{w} = (1,1,1)$. Verifique que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é base ortogonal. Mostre que o produto vetorial de dois deles é paralelo ao terceiro. Conclua daí que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{0}$.

3. Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$, sabendo que $\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = 12$, $\left\|\vec{u}\right\| = 13$ e $\left\|\vec{v}\right\| = 1$.

4. A área do $\triangle ABC$ é 1,5. Sabendo que $\overrightarrow{AB} = (-2,1,-2)$ e $\overrightarrow{AC} = (a-2,-1,1)$, determine os possíveis valores de a.

5. Determine um vetor que seja ortogonal a $\vec{u} + 2\vec{v}$ e a $\vec{v} - \vec{u}$, sendo $\vec{u} = (-3,2,0)$ e $\vec{v} = (0,-1,-2)$.

6. Dois vetores formam um ângulo de 45 graus. Um deles tem módulo igual a $2\sqrt{2}$ e o outro tem módulo igual a 4. Encontre o módulo do produto vetorial deles dois.

7. Determine a, b, c, d de tal forma que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z}) = a\,\vec{u} + b\,\vec{v} = c\,\vec{w} + d\,\vec{z}$. Calcule a, b, c, d no caso em que $\vec{u} = (1,2,3)$, $\vec{v} = (0,6,1)$, $\vec{w} = (5,0,2)$ e $\vec{z} = (0,0,1)$.

8. Mostre que $\Big((\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})\Big) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u})$ é ortogonal $\vec{v}$.

9. Calcule o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u} = (0,-1,2)$, $\vec{v} = (-4,2,-1)$ e $\vec{w} = (3,m,-2)$ seja 33. Calcule a altura deste paralelepípedo com relação à base determinada por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

10. Calcule o volume do tetraedro ABCD, sabendo que $\overrightarrow{DA} = (0,-2,9)$, $\overrightarrow{DB} = (0,-6,9)$ e $\overrightarrow{DC} = (2,-4,9)$. Qual é a altura relativa ao vértice D?

11. O tetraedro ABCD tem volume igual a 6 e $\overrightarrow{AB} = (-1,-2,3)$, $\overrightarrow{AC} = (3,-6,0)$. Determine $\overrightarrow{AD}$, sabendo que este vetor é ortogonal ao plano que contém A, B, C.

12. Resolva a equação $\vec{x} \wedge \vec{j} = \vec{0}$, $\vec{x} \cdot (4\,\vec{i} - 2\,\vec{j} - \vec{k}) = 10$.

13. Mostre que em um sistema ortonormal, os pontos A = (1,2.-1), B = (0,1,1) e C = (2,0,0) são vértices de um triângulo equilátero e que os pontos D = (1,0,1), E = (-1,0,2) e F = (1,1,1) são vértices de um triângulo retângulo.

14. Determine a equação vetorial da reta r que contém o ponto A = (1,1,1) e tem $\vec{v} = (2, 3, 4)$ como vetor diretor. Determine, também, as equações paramétricas de r e a equação na forma simétrica.

15. Escrever as equações das retas que contém as diagonais do paralelogramo ABCD, sabendo que A = (0,0,0), B = (1,1,1) e C = (-1,-1,1).

16. Escrever as equações (vetorial, paramétrica e simétrica) da reta bissetriz do ângulo $\angle ABC$ sabendo que A = (1,2,3), B = (3,4,5) e C - (6,7,0).

17. Sabendo que A = (2,4,6) e B = (8,12,16), determine, se existir, um ponto C na reta de equação vetorial r : (1,2,1) + t(6,8,10) $t \in \Re$ tal que a área do $\triangle ABC$ vale 1. Caso tal ponto C não exista, qual deveria ser a área do triângulo para se obter o ponto C?

18. Esboce as retas obtidas nos exercícios 2, 3 e 4.

19. a) Determine a equação vetorial da reta de equação $\frac{-x+1}{2} = \frac{3y}{2} = -z$

    b) Determine a equação simétrica da reta de equação paramétrica $x = 3 + 2t$, $y = 1 + 4t$, $z = 9 + 5t$.

20. Determine as equações vetorial, paramétrica e geral do plano que contém os pontos A = (0,1,0) , B = (2,0,3) e C = (2,7,3).

21. Determine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 1$ cuja distância ao ponto de coordenadas (1,1,1) seja mínima entre todos os pontos do plano dado.

22. Sabendo que A = (2,1,7) e que B = (7,1,2), a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre o plano $x - 3y + 4z = 5$ é um segmento de comprimento?

23. Seja r a reta de equação vetorial $(x, y, z) = (1, 1, 4) + t(1, -1, 0)$, $t \in \Re$. Determine os pontos de r que distam $\sqrt{11}$ do ponto A = (1,1,1). E do ponto B = (2,0,4)?

24. Qual é a equação do plano perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e que contém o ponto médio deste segmento, sabendo que A = (2,7,6) e B = (4,5,2).

25. Obtenha a equação geral do plano que contém os pontos A = (1,1,0), B = (1,-1,-1) e é paralelo ao vetor de coordenadas (2,1,0).

26. Descreva as posições das retas r e s com relação ao plano π sendo r: (x,y,z) = (1,2,3) + t(-2,2,0), s: x - y = 0 e x -y +z = 1 , π: x+y =3.

27. Decompor o vetor $\vec{v} = (-3, 4, -5)$, em dois vetores, o primeiro paralelo e segundo ortogonal ao plano de equação x + y - z = 2.

28. Decompor o vetor $\vec{v} = (1, 0, 0)$ em dois vetores, o primeiro paralelo ao plano de equação geral x + y + z = 1 e o segundo paralelo à reta r: x - y = 1 e x + z = 0.

29. Mostre que o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos pontos A = (2,1,1), B = (-1,0,1) e C = (0,2,1) é uma reta perpendicular ao plano definido por A, B, C. Determine o ponto em que esta reta fura o plano.

30. Obtenha uma equação geral do plano que contém o eixo dos y e é perpendicular à reta r: (x,y,z) = (0,1,2) + t(0,2,1) , $t \in \Re$.

31. Calcule m para que a reta $r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{2} = \frac{z}{m}$ seja perpendicular ao plano π: x + my + z = 0. Determine o ponto onde a reta fura o plano.

32. Calcule a distância do ponto A = (1,0,8) ao plano e equação vetorial π: (x,y,z) = (0,0,0) + t(1,2,3) + (3,4,5), $t, s \in \Re$.

33. O hexágono ABCDEF é a base de uma pirâmide de vértice G, ABCDEFG. Sabendo que A = (1,0,0), B = (1,1,-1), C = (0,1,0), D = (-1,1,1), E = (0,0,1), F = (1,-1,1) e G = (5,5,5), calcule o volume desta pirâmide.(o volume é a área da base vezes a altura dividido por 3)

34. Dada a equação $3x^2 - 4xy - 1 = 0$, determine o ângulo de rotação que elimina o termo em xy e obtenha a nova equação nas novas coordenadas.

35. Transformar a equação $3x^2+2xy+3y^2-6x-6y+1=0$ numa equação do tipo $Au^2+Cv^2+F=0$.

36. Usando translação, elimine os termos de primeiro grau da equação $x^2+4y^2-2x-16y+5=0$.

37. Elimine os termos de primeiro grau da equação $2xy-x-y+3=0$, por meio de uma translação.

38. Transforme a equação $x^2+y^2-8x-10y+37=0$, em uma equação $u^2+v^2=r^2$. Construir a figura.

39. Eliminar o termo em xy na equação $x^2+4xy+y^2-2=0$, mediante uma rotação de eixos.

40. Calcular α, entre 0 e $\pi/2$, de tal forma que a rotação de angulo α faça desaparecer o termo em xy da equação $x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2+\sqrt{3}x-y+3=0$. Determine a nova equação.

41. Transformar as equações dadas em equações do tipo $Au^2+Cy^2+F=0$ ou do tipo $Au^2+Dv=0$.

    a) $5x^2+4xy+2y^2=1$

    b) $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y-1=0$

    c) $y^2-4x-6y+5=0$

    d) $x^2-4xy+4y^2-16\sqrt{5}x-8\sqrt{5}y=0$.

42. A equação $y=ax^2+bx+c$ representa uma parábola. Determine as coordenadas do foco e a equaçao da reta diretriz.

43. Encontre a equação da parábola cuja reta diretriz é paralela ao eixo dos x e que passa nos pontos (-2,1) , (1,2) e (-1,3).

44. Dada a parábola de equação $x^2+8y-6x+4=0$, determine as coordenadas do vértice,do foco e a equação da reta diretriz.

45. Encontre a equação da parábola com "latus rectum"segmento de extremos (5,6) e (-3,6).

46. A curva percorrida por um projétil lançado horizontalmente de um ponto que está numa altura y com velocidade inicial v é a parábola de equação $x^2 = -2v_2/gy$, onde g é a força da gravidade. Se uma pedra é solta de uma altura de 100 metros de altura, qual é a velocidade que ela atinge o chão?

47. Encontre a equaçao da parábola com vértice (-2,3) e foco (1,3).

48. Encontre a equação da parábola que tem seu vértice na reta $2y-3x=0$, sua reta diretriz sendo paralela ao eixo dos x e que passa nos pontos (3,5) e (6,-1).

49. O segmento $\overline{AB}$ tem 12 unidades de comprimento e tem um ponto P = (x,y) que dista 8 unidades de A. O segmento se move de tal forma que A está sempre no eixo-x e B está sempre no eixo-y. Determine a equação da curva percorrida por P.

50. Dada a elipse de equação $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$, determine seus elementos principais.

51. A órbita da terra é uma elipse com o sol em um dos focos. Sabendo que o semi-eixo maior da elipse mede 148800000 km e a excentricidade é aproximadamente $\frac{1}{62}$, calcule a maior e a menor distância da terra para o sol.

52. Encontre a equação da elipse com seu foco em (4,-3), reta diretriz x = -1 e excentricidade $e = \frac{2}{3}$.

53. Determine o lugar geométrico dos pontos P = (x,y) tais o produto do coeficiente angular da reta que passa em P e em (3,-2) com o coeficiente angular da reta que passa em P e em (-2,1) é -6.

54. Encontre a equação da elipse que passa nos pontos (0,1), (1,-1), (2,2), (4,0) e cujos eixos são paralelos aos eixos coordenados.

55. Encontre os elementos principais da hipérbole:

    a) $4x^2-45y^2=180$.

    b) $x^2-y^2=25$

56. Determine a equação da hipérbole que tem seu eixo transverso paralelo a um dos eixos coordenados, centro na origem, comprimento do latus rectum 18 e distância entre os focos 12.

57. Determine a equação da hipérbole com focos (0,3) e (0,-3) e eixo conjugado de comprimento 5.

58. Encontre a equação da hipérbole cujo centro é (0,0), um vértice é (6,0) e a equação de uma assíntota é $4x + 3y = 0$.

59. Encontre a equação da hipérbole que passa no ponto (4,6) e cuja assíntotas são $y = \sqrt{3}x$ e $y = -\sqrt{3}x$.

60. Determine a nova equação da elipse $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y = 7$, quando a origem é transladada para (2,-1).

61. Determine a equação da parábola $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$, quando os eixos forem rotacionados de $\pi/4$.

62. Determine o ângulo que os eixos devem ser rotacionados para remover o termo xy da equação $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$.

63. Considere a equação geral de uma cônica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ e rotacione os eixos coordenados de ângulo θ obtendo novas coordenadas x' e y' que satisfazem $x = x'cos(\theta) - y'sen(\theta)$ e $y = x'sen(\theta) + y'cos(\theta)$. Substitua na equação inicial e obtenha a equação $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$.

    a) Calcule cada um dos coeficientes A', B', C', D', E' e F'.

    b) Verifique que $A' + C' = A + C$ e que $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$.

    c) Verifique que $B' = 0$ se e somente se $\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C}$. Este é o ângulo no qual os eixos devem ser rotacionados, para que o termo x'y' seja suprimido.

    d) Use b) e c) para reconhecer uma cônica, conhecida a sua equação geral, ou seja:

    Se $B^2-4AC < 0$, elipse; Se $B^2-4AC = 0$, parábola e se $B^2-4AC > 0$, hipérbole , resalvados os casos em que a equação pode representar o conjunto vazio, um ponto, um par de retas ,uma circunferência.

64. Dados os pontos (1,1), (2,3), (3,-1), (-3,2), (-2,-1), determine a equação da cônica que passa nestes pontos e reconheça a cônica.

65. Encontre a equação da cônica que passa nos pontos (5,2), (1,-2), (-1,1), (2,5), (-1,-2).