Programa de MAT 240, bibliografia e Datas das Provas

- A função área. Área de figuras geométricas planas. Diedros, triedros e poliedros. Poliedro regular. Prismas, Pirâmides,Cilindros, Cones e Esferas. A função volume. Volume de figuras geométricas no espaço. Secções cônicas. Estudo da solubilidade de construções geométricas com régua e compasso.
- E. Moise - Elementary Geometry from an Advanced Standpoint, E. Moise - Geometria Moderna, B. Castrucci - Lições de Geometria Elementar, V. Boltyanskii - Equivalent and Equidecomposable Figures, A. Giongo - Curso de Desenho Geométrico.
- P_1 - 25/04, P_2 - 13/06 , Sub - 04/07

Notas de Aulas

1. **Uma pequena revisão de MAT 230**

   Um plano de incidência é um conjunto que notaremos por π, seus elementos chamados de pontos e com subcojuntos chamados de retas, satisfazendo os seguintes postulados:

   Postulado 1 - Se $P, Q \in \pi$, existe uma única reta r que contém estes pontos, $r = \overleftrightarrow{PQ}$.

   Postulado 2 - Cada reta contém pelo menos dois pontos.

   Postulado 3 -Existem pelo menos tres pontos não colineares.

   Existem muitos modelos de planos de incidência, inclusive alguns com um número finito de pontos.

   Acrescentando o seguinte postulado (chamado de postulado da régua)

   Postulado 4 - Para cada reta r, existe uma função bijetora $f : r \longrightarrow \mathbb{R}$ chamada de régua e uma função distância entre os pontos de π tal que se PQ denota a distância entre dois pontos P e Q de r, então $PQ = |f(P) - f(Q)|$.

   Passamos a ter em π o que chamamos de geometria métrica. Neste tipo de geometria é possível definir as noções de segmento de reta, triângulo, , semirreta, ângulo, conjunto convexo. Entretanto, algumas noções básicas de geometria não são válidas, em geral. Por exemplo, dados três pontos A, B, C a desigualdade triangular $AB + BC \geq AC$ pode não ser verdadeira.

Exercício 1 : Defina as noções de segmento de reta, triângulo, semirreta, ângulo. Dê exemplo de um plano geométrico no qual não vale a desigualdade triangular.

Para que certas propriedades conhecidas da geometria sejam válidas, precisamos de mais postulados. O seguinte é chamado de postulado da separação do plano.

Postulado 5 -Dada uma reta r, existem dois conjuntos convexos H_1 e H_2 tais que :

1) $H_1 \cap r = \emptyset$, $H_2 \cap r = \emptyset$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ e $\pi = r \cup H_1 \cup H_2$.

2) Se $P \in H_1$ e $Q \in H_2$, o segmento $\overline{PQ}$ intersecta r num ponto R.

H_1 e H_2 são chamados de semiplanos determinados por r.

Exercício 2 : Defina interior de um ângulo .

Um plano que satisfaz estes 5 postulados é chamado de plano de Pasch.

Apesar de já termos a noção de ângulo, nada foi dito sobre como medir estes ângulos, para isto precisamos do seguinte postulado, chamado de postulado do transferidor:

Postulado 6 - Existe uma função que associa a cada ângulo $\angle ABC$, um número real $m(\angle ABC)$ tal que:

a) $0 < m(\angle ABC) < 180$.

b) Se D está no interior de um ângulo $\angle ABC$, então $m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC)$.

c) Se H_1 é um semiplano determinado pela reta que contém os pontos B e C e x é um real entre 0 e 180, então existe $A \in H_1$ tal que $m(\angle ABC) = x$ e se $P \in H_1$ satisfaz $m(\angle PBC) = x$, então $P \in \overrightarrow{BA}$.

Um fato importante é estabelecer uma relação entre a medida de ângulo e a distância entre pontos. Isto é feito com o seguinte postulado (LAL):

Postulado 7 - Dados os triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ tais que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ e $m(\angle CAB) = m(\angle C'A'B')$ então, temos que $BC = B'C'$, $m(\angle BCA) = m(\angle B'C'A')$ e $m(\angle ABC) = m(\angle A'B'C')$.

Exercício 3 : A geometria de Taxista tem como plano de incidência o $I\!R \times I\!R$ e as retas são os conjuntos $r_a = \{(a, y), y \in I\!R\}$ e $r_{m,b} = \{(x, mx + b), x \in I\!R\}$. As réguas são f(a,y) = y para a reta r_a e $f(x, mx + b) = (1 + |m|)x$, para a reta $r_{m,b}$. Desta forma , se P = (x,y) e Q = (w,z), a distância entre estes pontos é dada por $PQ = |x - w| + |y - z|$. A medida de ângulo é a mesma da geometria analítica. Dê um exemplo que mostra que o postulado LAL não é válido na geometria do taxista.

Com todas estas exigências em π , restam apenas dois modelos de geometria. A geometria hiperbólica e a geometria euclidiana. Assim, ao se colocar um último postulado, chamado de postulado das paralelas, chega-se finalmente à geometria euclidiana plana.

Antes de fazer isto, é importante listar alguns resultados que são válidos em geometrias que satisfazem os 7 postulados dados:

1) Dados uma reta r e um ponto P, existe uma única reta s que contém o ponto P e é perpendicular a r.

2) Dados uma reta r e um ponto P que não pertence a r, existe pelo menos uma reta s que contém o ponto P e é paralela à reta r. (Esta proposição lembra o postulado das paralelas e salienta que a essência do postulado está na unicidade da reta paralela).

3) Dados 3 pontos A, B e C, vale a desigualdade triangular $AB + BC \geq AC$.

4) Em um ΔABC , o maior lado corresponde ao maior ângulo.

5) Em um ΔABC, seje D o pé da perpendicular de B para a reta que contém A e C . Se $\overline{AC}$ é o lado maior do triângulo, então A - D - C.

6) Dado um ΔABC e D um ponto tal que A - B - D, então $m(\angle CBD) \geq m(\angle CAD) + m(\angle ACB)$.

7) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é ≤ 180.

Postulado 8 - Dada uma reta r e um ponto P fora desta reta, existe uma **única** reta s que contém P e é paralela a r.

Damos a seguir uma serie de resultados que dependem do postulado P_8 e que fazem parte da geometria euclidiana. Além disto, qualquer um dos resultados que vamos apresentar pode substituir o postulado P_8.

1) Dadas duas retas r e s e uma reta transversal t, se $r \| s$, cada par de ângulos alternos internos é congruente.

2) Em um ΔABC, a soma das medidas dos ângulos internos é 180.

3) Se uma transversal é perpendicular a uma de duas retas paralelas, então ela é perpendicular a outra.

4) Uma diagonal divide um paralelogramo em dois triângulos congruentes.

5) Em um paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

6) As diagonais de um paralelogramo se bisectam.

7) Um quadrilátero de Sacheri è um retângulo. (Um quadrilátero ABCD é dito ser um quadrilátero de Sacheri se $m(\angle A) = m(\angle D) = 90$ e AB = CD).

Dadas duas retas r e r' e uma transversal t a estas duas retas, o postulado P_8 nos permite definir uma projeção da reta r na reta r' na direção da reta t, da seguinte forma:

Dado um ponto A na reta r , sabemos pelo postulado P_8 que existe uma única reta r_A que contém A e é paralela à reta t. Definimos a projeção do ponto A na reta r' como sendo o ponto $A' = r' \cap r_A$.

Esta projeção satisfaz as seguintes propriedades:

a) Preserva congruência de segmentos.

b) Preserva a relação "estar entre ", ou seja se A - B - C então A' - B' - C'.

c) Se A, B, C são pontos de r e A', B', C' são suas projeções paralelas em r', então $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Este último resultado é conhecido como teorema de Tales.

Este tipo de pensamento nos conduz a uma relação importantíssima na solução de problemas de geometria euclidiana, que é a relação de semelhança entre triângulos.

Definição Dizemos que o ΔABC é semelhante ao $\Delta A'B'C'$ se $m(\angle A) = m(\angle A')$, $m(\angle B) = m(\angle B')$, $m(\angle C) = m(\angle C')$ e $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Sendo este o caso, usamos a notação $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Valem os seguintes resultados:

1) (AAA) Se $m(\angle A) = m(\angle A')$, $m(\angle B) = m(\angle B')$, $m(\angle C) = m(\angle C')$, então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

2) (AA) Se $m(\angle A) = m(\angle A')$, $m(\angle B) = m(\angle B')$, então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

3) (LLL) Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

4) (LAL) Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ e $m(\angle C) = m(\angle C')$, então $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Um resultado que leva a uma rápida prova do teorema de Pitágores é o seguinte:

5) Seja ΔABC um triângulo retângulo em A e seja $\overline{AD}$ a altura, onde B - D - C. Então, $\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$.

6) (teorema de Pitágoras) Seja ΔABC um triângulo retângulo em A, então, $a^2 = b^2 + c^2$.

7) (recíproca do teorema de Pitágoras) Dado o ΔABC que satisfaz $a^2 = b^2 + c^2$, então este triângulo é retângulo em A.

Outro resultado interessante e que está ligado à noção de área de um triângulo é o seguinte:

8) Dado um triângulo qualquer, o produto de um lado pela altura correspondente, independe da escolha do lado.

Aqui é importante observar que se ΔABC é um triângulo, retângulo no vértice C, então as frações $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{b}{a}$ só dependem da medida do ângulo $\angle BAC$. Assim, se $m(\angle BAC) = \theta$, temos novas funções, chamadas de funções trigonométricas, $sen(\theta) = \frac{a}{c}$, $cos(\theta) = \frac{b}{c}$, $tg(\theta) = \frac{a}{b}$, $cossec(\theta) = \frac{c}{a}$, $sec(\theta) = \frac{c}{b}$, $cotg(\theta) = \frac{b}{a}$.

Exercício 4 Prove que $sen(a + b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$ e $cos(a+b) = cos(a)cos(B) - sen(a)cos(a)$. Para isto, proceda da seguinte maneira: Considere um retângulo ABCD tal que AC = 1 e $m(\angle DAB) = a + b$. Sejaa E tal que ΔACE é retângulo em E e $m(\angle EAB) = a$, $m(\angle EAC) = b$. Tome B' e C' tais que A - B - B', B' -E - C' e C' - C - D e $\overline{AB}$ é perpendicular $\overline{B'C'}$. Use esta figura para chegar ao resultado.

2. **Regiões Poligonais e Suas Áreas**

A continuação natural deste nosso estudo de geometria euclidiana é associar a cada região poligonal um número positivo que iremos chamar de área da região poligonal. Esta associação deve satisfazer algumas condições razoáveis, que podem ser colocadas como postulados, ou simplesmente uma função área pode ser construida para qualquer região poligonal. Inicialmente, vamos supor a existência de uma função área satisfazendo certas condições e depois mostraremos como construir uma tal função. Lembramos que uma região triangular é um triângulo, junto com seu interior e uma região poligonal é uma região limitada por um poligono e que pode ser dividida em regiões triangulares. Esta divisão não é única. Será comum nos referimos a área do polígono no lugar de área da região poligonal limitada por este polígono.

Vamos notar por P o conjunto em que cada elemento deste conjunto é uma região poligonal P e supor que valem os seguintes postulados:

A(1) - Existe uma função α: $\mathrm{P} \longrightarrow \mathbb{R}$.

A(2) - $\alpha(P) > 0$, para toda região poligonal P.

A(3) - Se duas regiões triangulares são congruentes, então elas têm a mesma área.

A(4) - Se duas regiões poligonais se intersectam apenas em vértices ou em lados das poligonais, então a área da união das regiões é a soma das áreas de cada região.

A(5) - Se uma região quadrada tem lados de tamanho a, então sua área vale a^2.

O seguintes resultados são consequência dos postulados de área:

1) A área de um retângulo é o produto de sua base pela altura.

2) A área de um triângulo retângulo é metade do produto de seus lados menores.

3) A área de um triângulo qualquer é metade do produto de uma base pela altura correspondente.

4) A área de um paralelogramo é o produto de uma base pela altura correspondente.

5) A área de um trapézio é a metade do produto da altura pela soma de suas bases.

6) Se A, B, C são pontos de r e A', B', C' são suas projeções paralelas em r', então $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Exercício 5 Use áreas para provar o teorema da Pitágoras. (Dado o triângulo ΔABC retângulo em A, considere um quadrado de lado b +

c. Dentro deste quadrado, trace outro de lado a. Use a decomposição e os postulados para chegar ao resultado.

Exercício 6 Dado um triângulo ΔABC prove que a sua área é dada por $\frac{bc.sen(m(\angle A)}{2}$. Use isto para provar a seguinte fórmula, conhecida como lei dos senos. $\frac{sen(m(\angle A))}{a} = \frac{sen(m(\angle B))}{b} = \frac{sen(m(\angle C))}{c}$,

Exercício 7 Dado um hexágono regular de lado a, determine a sua área.

Exercício 8 Determine a área de um pentágono regular de lado a. (Um pentágono regular de lado a pode ser dividido em 5 triângulos isósceles de área $\frac{a^2 cotg(36)}{4}$. Para obter o valor de cotg(36) sem usar uma tabela trigonométrica, tome um pentágono regular de lado unitário ABCDE e trace as diagonais $\overline{AC}$, $\overline{EC}$ e $\overline{EB}$. Observe que as duas últimas diagonais se intersectam em um ponto F e que $\Delta AEC \sim \Delta AFE$. Use esta semelhança para obter o valor de AF e posteriormente o valor de cotg(36).

3. **A Construção de uma Função Área para Regiões Poligonais**

Nosso objetivo no que se segue é definir uma função área para regiões poligonais. Observe que no nosso postulado $\mathbf{A(1)}$ é suposta a existência de uma tal função. Como cada região poligonal admite uma decomposição em regiões triangulares, é natural definir uma função área para cada região triangular e depois efetuar a soma das áreas das regiões triangulares que formam uma dada região poligonal. Assim, dada uma região triangular, limitada por um triângulo ΔABC definimos a sua área como sendo $\frac{bh}{2}$, onde b é o valor de um lado escolhido como base e h é a altura correspondente. Como afirmado anteriormente, esta definição independe da escolha do lado do triângulo e é portanto uma boa definição para as áreas de regiões triangulares. Entretanto, ao passar para as regiões poligonais encontramos a seguinte dificuldade: Uma região poligonal admite muitas decomposições em regiões triangulares e é preciso provar que o resultado final independe da decomposição da região poligonal em regiões triangulares. Apesar de dar um pouco de trabalho ,este é um resultado relativamente simples e temos então que se uma região poligonal for decomposta de duas maneiras distintas em regiões triangulares, a soma das áreas das regiões triangulares da primeira decomposição coincide com a soma das áreas das regiões triangulares da segunda decomposição.

4. **Regiões Poligonais Equidecomponíveis e o Teorema de Bolyai-Gerwin**

   Duas regiões poligonais são ditas **equidecomponíveis** se for possível decompor uma delas em um número finito de regiões poligonais que podem ser remontadas para formar a outra região poligonal. Um exemplo simples de duas regiões poligonais equidecomponíveis é dado por um retângulo de base a e altura b e pelo triângulo isósceles de base 2a e altura b. Um método de calcular a área de uma região poligonal é decompor esta região em regiões poligonais mais simples, calcular a área de cada uma e somar as áreas obtidas. Desta forma é natural dizer que se duas regiões poligonais são equidecomponíveis, elas têm a mesma área. Assim, a questão que aparece é de saber se duas regiões poligonais de mesma área são ou não são equidecomponíveis. A resposta a esta pergunta é dada pelo seguinte resultado, conhecido como teorema de Bolyai-Gerwin.

   Duas regiões poligonais de mesma área são equidecomponíveis

   A prova deste resultado segue os seguintes passos:

   1) Se uma região poligonal R_1 é equidecomponível com a região poligonal R_2 e se esta é equidecomponível com a região poligonal R_3, então R_1 é equidecomponível com R_3.

   2) Toda região triangular é equidecomponível com uma região retangular.

   3) Duas regiões poligonais com mesma área e limitadas por paralelogramos de mesma base são equidecomponíveis.

   4) Dois retângulos de mesma área são equidecomponíveis.

   5) Toda região poligonal é equidecomponível com uma região retangular.

   No caso 1), tome uma região poligonal, faça uma decomposição e remonte em uma nova região poligonal. Depois faça uma nova decomposição na região obtida e a remonte em uma terceira região. Então, a primeira região é equidecomponível com a terceira.

   No caso 2), tome um triângulo ΔABC de base b = AC e de altura h = BD, onde b é o maior dos lados e A - D - C. Trace uma reta r paralela à base e passando no ponto médio do segmento $\overline{BD}$. Trace o retângulo ACEF com C e F na reta r. Neste caso as regiões triangular e retangular são equidecomponíveis.

No caso 3), tome dois paralelogramos ABCD e ABEF tendo a base comum $\overline{AB}$. As alturas destes dois paralelogramos são iguais e portanto $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ estão numa mesma reta. Sobre a reta que contém os pontos A e B, tomamos, tanto à direita, como à esquerda do segmento, uma sequência de pontos, formando segmentos congruentes ao segmento $\overline{AB}$. Traçamos por cada ponto final destes segmentos, retas paralelas aos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AF}$. Estas retas farão a equidecomposiçao dos dois paralelogramos.

No caso 4), sejam ABCD e EFGH dois retângulos com mesma área. Vamos supor que $AB \geq BC$, $AB \geq EF$ e $AB \geq FG$. Assim é possível construir um paralelogramo EFKL com EL = AB e mesma base $\overline{EF}$ que o retângulo EFGH e com L e K na mesma reta que contém os pontos G e H. Segue por 3) que EFGH e EFKL são equidecomponíveis. É relativamente simples ver que EFKL e ABCD são equidecomponíveis.

No caso 5), faça uma decomposição da região poligonal em regiões triangulares e escolha um segmento que será a base da região retangular. Para cada região triangular, use 2) para encontrar uma região retangular que lhe seja equidecomponível e depois use 4) para determinar o retângulo de base escolhida. Depois, basta superpor todas as regiões retangulares de mesma base.

Observe que se duas regiões poligonais tiverem a mesma área, ao fazer o processo acima para cada uma das regiões poligonais, chegaremos à mesma região retangular, basta para isto escolher a mesma base.

Nos exercícios que seguem, verifique que as regiões poligonais dadas são equidecomponíveis, exibindo a decomposição e a remontagem:

Exercício 9 Dado o triângulo de lados de medidas 3, 4, 5 e o retângulo de base 6 e altura 1, mostre que as regiões limitadas são equidecomponíveis.

Exercício 10 Considere os paralelogramos ABCD, com $AB = 5$, $AD = \sqrt{2}$ e $m(\angle DAB) = 45$ e ABGH com $AH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $m(\angle HAB) = 60$. Verifique que as duas regiões limitadas são equidecomponíveis.

Exercício 11 Considere os paralelogramos ABCD, com $AB = 1$,

$AD = \sqrt{2}$ e $m(\angle DAB) = 45$ e ABGH com AH = 2 e $m(\angle ABG) = 30$. Verifique que as duas regiões limitadas são equidecomponíveis.

Exercício 12 Um retângulo de base b e altura h é equidecomponível com o quadrado de lados $\sqrt{bh}$. Se forem dados apenas os tamanhos b e h, para fazer esta equidecomposição, é preciso determinar $\sqrt{bh}$. Para isto, proceda da seguinte maneira: Considere um segmento de tamanho b + h, tome seu ponto médio e trace uma circunferência com centro neste ponto e raio $\frac{b+h}{2}$. No interior do segmento de tamanho b + h, tome um ponto que dista b de um dos extremos e h do outro extremo. Levante uma perpendicular a este segmento, até tocar a circunferência. O segmento obtido tem tamanho $\sqrt{bh}$.

Exercício 13 O ΔABC é equilátero. Tome os pontos M_1, M_2, M_3, N_1, N_2 pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1B}$ respectivamente. Trace o segmento $\overline{M_2N_1}$ e perpendiculares a este segmento, passando por M_3 e por N_2 que definem dois segmentos $\overline{DM_3}$ e $\overline{EN_2}$, com D e E em $\overline{M_2N_1}$. Isto decompõe o triângulo em 4 pedaços e estes pedaços podem ser remontados para se obter um quadrado. Faça esta remontagem.

Exercício 14 O octógono regular de lado a, ABCDEFGH admite a seguinte decomposição. Sejam M_1, M_2, M_3, M_4 pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, respectivamente. Por M_1 e por M_3 trace segmentos paralelos a $\overline{AE}$ e por M_2 e M_4 segmentos paralelos a $\overline{CG}$. Este procedimento decompõe o octógono em 5 pedaços, 4 pentágonos congruentes e um quadrado. Com estes 5 pedaços, remonte um quadrado.

5. Construções com Régua e Compasso

Quando nos referimos a uma régua e a um compasso, estamos nos referindo a uma régua ideal e a um compasso ideal com os quais podemos traçar retas e circunferências. A régua não tem marcas e podemos usá-la para traçar a reta que passa em dois pontos dados. Não podemos usá-la para medir a distância entre dois pontos. O compasso pode ser usado da seguinte forma: Dados dois pontos A e B, podemos com o compasso, traçar a circunferência de centro A e que contém o ponto B e mais, dado um terceiro ponto C, não podemos traçar uma nova circunferência com centro em C e raio AB. Dizemos que nosso compasso colapsa. Entretanto, como veremos, podemos fazer as mesmas construções com a régua e este compasso que as contruções feitas com uma régua e com um compasso moderno.

Construções Básicas

1) Dado o segmento $\overline{PQ}$, traçar a reta perpendicular ao segmento e que passa no seu ponto médio.

2) Dados 3 pontos A, B, C, construir um retângulo ABDE tal que AC = AE.

3) Dado um segmento $\overline{PQ}$ e uma semirreta $\vec{AB}$, determinar um ponto C nesta semirreta tal que PQ = AC.

Supondo que sabemos fazer as contruções 1) e 2) , construimos inicialmente o retângulo PATU com PQ = PU. Com isto, temos que AT = PQ. Basta agora traçar a circunferência com centro A e passando no ponto T. Esta circunferência intersecta a semirreta no ponto C procurado.

Notamos que apesar do compasso ideal colapsar, ele junto com a régua, conseguem transportar segmentos e assim fazer as mesmas construções que uma régua junto com um compasso moderno. Desta forma, em nossas construções com régua e compasso, usaremos o compasso moderno.

4) Construir um ângulo de mesma medida que a medida de um ângulo dado.

5) Dividir um segmento em n parte iguais.

6) Dividir um ângulo reto em 3 ângulos de mesmas medidas.

7) Dados 2 segmentos de medidas a e b, construir segmentos de medidas a + b, a - b (supondo $a > b$), a.b, $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt{a}$.

8) Os números que são contrutíveis com régua e compasso, a partir de um segmento de tamanho unitário, são chamados de **números construtíveis**. Observe que os números racionais são todos construtíveis. Entretanto existem números reais que não são construtíveis. Por exemplo, não é possível construir, com régua e compasso, um segmento de tamanho $\sqrt[3]{2}$ a partir de um segmento de tamanho 1 e este fato está ligado ao famoso problema da duplicação do cubo. Outro problema que é impossível resolver com régua e compasso é o problema da trisseção

de um ângulo. Apesar de ser posível fazer esta divisão para um ângulo de medida 90, não é possível para um de medida 60.

Geometria Euclidiana no Espaço

De maneira análoga ao que foi feito na apresentação da geometria euclidiana plana, daremos agora os elementos indefinidos e as regras ou postulados desta geometria.

Consideramos um conjunto E, cujos elementos são chamados de pontos, contendo dois tipos de subconjuntos, uns chamados de retas e outros chamados de planos, que estão subordinados às seguintes regras ou postulados:

a) Dados dois pontos, existe uma única reta que os contém.

b) Dados tres pontos não colineares, existe um único plano que os contém.

c) Se dois pontos estão em um plano, a reta que os contém está contida neste plano.

d) Se dois planos têm interseção não vazia, esta interseção é uma reta. É comun se chamar esta reta de traço de um plano sobre o outro.

e) Toda reta contém pelo menos dois pontos. Um plano contém pelo menos tres pontos não colineares. O espaço E contém pelo menos quatro pontos que não estão num mesmo plano .

Exercício 15 Com os postulados dados prove:

1) Se uma reta intersecta um plano que não contém esta reta, esta interseção é um único ponto.

2) Dada uma reta e um ponto fora dela, existe um único plano que os contém.

3) Se duas retas distintas se intersectam, elas são coplanares (estão num mesmo plano).

4) Existem retas que não estão num mesmo plano. Duas tais retas são ditas, retas reversas.

Continuando com os postulados,

f) Cada plano deste espaço E é um plano euclidiano, isto é satisfaz os 8 postulados que definem a geometria euclidiana do plano e a função distância de cada um dos planos é a restrição ao plano, de uma função distância $d : E \times E \longrightarrow I\!R$.

g)(Postulado da Separação do Espaço) Dado um plano em E, o conjunto de todos os pontos que não estão no plano é formado por dois subconjuntos convexos, notados por H_1 e por H_2, tais que se $P \in H_1$ e $Q \in H_2$ então $\overline{PQ}$ intersecta o plano.

Duas retas no espaço E que se intersectam em um ponto, determinam um único plano que as contém. Se as duas retas não se intersectam, elas podem estar contidas em um mesmo plano e neste caso dizemos que elas são **paralelas** ou não estarem contidas em um mesmo plano e neste caso dizemos que são **reversas**.

Exercício 16 Use os postulados dados, para provar:

1) Por um ponto A, fora de uma reta r dada, existe uma única reta s contendo A e paralela a r(Este é postulado das paralelas estendido ao espaço).

2) Dados tres planos que se intersectam segundo tres retas distintas, então ou estas tres retas são concorrentes em um ponto O ou estas tres retas são paralelas.

3) Duas retas paralelas a uma terceira reta, são paralelas entre si.

Uma reta r e um plano π são ditos paralelos se $r \cap \pi = \emptyset$.

4) Uma reta r, que não está contida no plano π, é paralela a π se e somente se ela for paralela a uma reta contida em π.

Dois planos com interseção vazia, são ditos planos paralelos.

5) Se por um ponto A, fora do plano π, traçarmos duas retas paralelas a π, estas duas retas definem um plano paralelo ao plano π.

6) As retas interseções de dois planos paralelos entre si, com um terceiro plano, são retas paralelas.

7) (Tales) Se 3 planos paralelos π_1, π_2, π_3, encontram duas retas transversas, r nos pontos A_1, A_2, A_3 e r' nos pontos A'_1, A'_2, A'_3, então $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{A'_1A'_2}{A'_2A'_3}$.

8) Duas retas reversas estão contidas em dois planos paralelos.

9) Dois ângulos cujos lados são respectivamente paralelos, ou têm mesma medida ou medidas suplementares.

Dadas duas retas reversas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$, seja $\overleftrightarrow{AB''}$ paralela a $\overleftrightarrow{A'B'}$. A medida do ângulo $\angle BAB''$ é o que chamamoos de ângulo das retas reversas. Quando esta medida é 90, dizemos que as retas são ortonormais. Diferentemente, no caso em que as retas se intersectam e formam um ângulo de medida 90, dizemos que as retas são perpendiculares. Uma reta é perpendicular a um plano se ela intersectar este plano num ponto A e for perpendicular a toda reta do plano que passa em A.

10) Se uma reta for perpendicular a duas retas do plano, então ela é perpendicular ao plano.

11) Dado um ponto A de uma reta, existe um único plano que contém A e é perpendicular à reta. Vale o mesmo se o ponto A não está na reta.

12) Dado um pomto A de um plano, existe uma única reta contendo A e perpendicular ao plano. Vale o mesmo se A estver fora do plano.

13) Dois planos perpendiculares a uma reta, são paralelos entre si.

Dois planos são perpendiculares entre si quando um deles contém uma reta perpendicular ao outro.

14) Se dois planos são perpendiculares entre si, toda reta num deles que é perpendicular à reta interseção dos planos, é perpendicular ao outro plano.

15) Seja r uma reta oblíqua ao plano π. Então, existe um único plano que contém r e é perpendicular a π. Vale o mesmo se r for paralela a π.

Dado um ponto A fora de um plano π, chamamos de **projeção ortogonal** do ponto A no plano π ao traço A' da reta que passa em A e é perpendicular a π. Usando projeção ortogonal, podemos definir a noção de ângulo que uma reta oblíqua faz com um plano. Para isto basta tomar a reta projeção ortogonal da reta dada sobre o plano e considerar ângulo obtido. Usamos também para definir a distância de um ponto a um plano, entre dois planos paralelos e entre duas retas reversas.

16) Formalise as definições sugeridas.

17) Sejam π_1 e π_2 dois planos não perpendiculares cuja interseção é a reta r. Por um ponto A de π_1 trace uma perpendicular $\overleftrightarrow{AB}$, a r,

com B ponto de r e seja A' a projeção ortogonal de A em π_2. Então, a medida do ângulo $\angle ABA'$ é maior que a medida do ângulo $\angle ACA'$, para qualquer ponto C de r diferente de B. Neste caso, dizemos que a reta que contém A e B é a reta de maior declive do plano π_1 em relação ao plano π_2, contendo A.

ÂNGULOS DIEDROS

Considere dois planos π_1 e π_2 cuja interseção é a reta r. A reta r separa π_1 em dois semiplanos π_{11} e π_{12} e também π_2 em dois semiplanos π_{21} e π_{22}. A reunião de dois destes semiplanos com a reta r é chamada de ângulo diedro. Como exemplo temos $\pi_{11} \cup \pi_{21} \cup r$ é um ângulo diedro.

Para definir a medida deste ângulo diedro, tomamos um ponto A na reta r e o plano que contém A e é perpendicular à reta r. A interseção deste plano com o ângulo diedro, define um ângulo, cuja medida é a medida do ângulo diedro.

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Seja π um plano e R $\subset \pi$ uma região, V um ponto fora de π. O conjunto S dos pontos do espaço, formado pela reunião de todos os segmentos $\overline{PV}$, onde P é um ponto da região R é um sólido geométrico. No caso em que R é um disco D, dizemos que S é um cone com base D, vértice V e altura $h = VV'$, onde V' é a projeção ortogonal de V em π. Se R for uma região poligonal, dizemos que S é uma pirâmide de base R, vértice V e altura h.

Um resultado importante para o cálculo de volumes é o seguinte:

Exercício 17 Seja S um cone ou uma pirâmide de base R, cuja área vale a. Corte o sólido por um plano π', cuja distância do plano da base é $k < h$ e que está no mesmo subespaço que o vértice V. A seção deste sólido pelo plano π' é uma região R' cuja área vale $a' = (\frac{h-k}{h})^2 a$.

O conjunto dos pontos de S que estão na região do espaço compreendida entre os dois planos π e π' é chamado de tronco de cone ou de tronco de pirâmide.

Considere agora, dois planos π e π', paralelos entre si e r uma reta transversa a estes dois planos. Tome R uma região do plano π e por cada ponto P de R considere a única paralela a r que contém P. Esta reta fura o plano π', no ponto P'. O conjunto dos pontos P', com P em R, formam uma região R' em π' que é isométrica a R tendo portanto a mesma área. A reunião de todos segmentos $\overline{PP'}$ com P em R é um sólido geométrico S. A distância h entre os dois planos é chamada de altura do sólido. Quando R é um disco D, dizemos que S é um cilindro de base D e altura h. Quando R é uma região poligonal, dizemos que S é um prisma de bases R e R' e altura h. No caso particular em que R é um paralelogramo, S é chamado de paralelepípedo. Se r for perpendicular aos planos, o prisma ou o cilindro é dito ser um prisma ou um cilindro reto.

Outro sólido geométrico é definido da seguinte maneira: Dado um ponto P_o e um real positivo r, o conjunto dos pontos P tais que $PP_0 \leq r$ é chamado de esfera de raio r e centro P_0.

Obtemos sólidos geométricos mais gerais, considerando uniões, interseçoes e diferenças dos sólidos geométricos definidos anteriormente.

VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

No que se segue, vamos supor que existe uma função que associa a cada sólido geométrico S, um número positivo v(S), chamado de volume de S e que satisfaz os seguintes postulados:

(V_1) Se S_1 e S_2 são tais que $S_1 \subset S_2$, então $v(S_1) \leq v(S_2)$.

(V_2) Se $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, então $v(S_1 \cup S_2) = v(S_1) + v(S_2$.

(V_3) Se P é um paralelepípedo reto, retângulo cuja base é um retângulo de lados de medidas a e b e tem altura c, então v(P) = abc.

(V_4) (Princípio de Cavalieri) Sejam S_1 e S_2 dois sólidos geométricos e π_0 um plano, que chamaremos de plano horizontal. Seja π um plano paralelo a π_0. Os conjuntos $S_1 \cap \pi$ e $S_2 \cap \pi$ são chamados de seções horizontais correspondentes. Suponhamos que as áreas das seções correspondentes são iguais para todo plano π paralelo ao plano π_0. Então $v(S_1) = v(S_2)$.

A partir destes postulados é possível obter os seguintes resultados:

Exercício 18

1) O volume de um prisma, ou de um cilindro, é igual ao produto da área da base pela altura.

2) O volume de uma pirâmide, ou de um cone, é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

3) O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$

SUPERFÍCIES POLIÉDRICAS

Consideremos, no que se segue, uma figura formada por um número finito de regiões poligonais tais que:

a) O plano que contém cada região poligonal deixa todas as outras regiões poligonais em apenas um dos semiplanos definidos por este plano.

b) Cada lado do polígono que limita uma região poligonal, pertence a exatamente duas regiões poligonais.

Uma região como esta é chamada de superfície poliédrica convexa ou simplesmente de poliedro convexo. O interior de cada região poligonal é chamada de face. Cada lado, comum a duas regiões poligonais é chamado de aresta e cada vértice, de vértice do poliedro. Observamos que em nossa definição, um poliedro não é um sólido. Isto se justifica pelas muitas aplicações dos poliedros e uma delas é a planificação, que não é feita com um sólido. Também, o segmento definido por dois pontos do poliedro não está necessariamente contido no poliedro e assim a superfície poliédrica convexa não é um conjunto convexo.

O seguinte resultado é conhecido como TEOREMA DE EULER:

Em todo poliedro convexo temos que F - A + V = 2, onde F é o número de faces, A é o número de arestas e V é o número de vértices.

Retirando de um poliedro convexo, uma ou mais faces de forma que o bordo seja uma linha poligonal conexa, obtemos uma superfície poliédrica aberta. Para obter uma prova de que a relação de Euler é verdadeira, basta provar que para superfícies poliédricas abertas vale a relação F - A + V = 1. Uma prova é obtida usando indução no número de faces. Quando F = 1 , temos uma única região poligonal e A = V e assim a relação é imediata. Supondo que temos a relação F - A + V = 1, para todas as superfícies poliédricas abertas com F = k - 1, tomamos uma superfície poliédrica aberta com F = k, A arestas e V vértices. Retire uma face que tenha n lados e que destes n lados, h deles são comuns com a linha poligonal que forma o bordo da superfície poliédrica. Esta nova superfície poliédrica aberta terá o número de faces F' = F - 1 = k - 1, número de arestas A' = A - h e número de vértices V' = V - h

+ 1. Desta forma, F - A + V = F' + 1 - A' -h + V' + h - 1 = F' - A' + V' = 1. Segue que a relação de Euler é verdadeira por indução.

POLIEDROS REGULARES

Os poliedros para os quais vale a relação de Euler, são chamados de eulerianos. Os poliedros eulerianos que têm todas as faces com o mesmo número de arestass e de cada vértice sai o mesmo número de arestas são chamados de poliedros de Platão. Vale o seguinte resultado:

Só existem cinco poliedros de Platão

A prova é obtida da seguinte maneira:

Sejam F, A, V os números de faces, arestas e vértices do poliedro de Platão, respectivamente. Então, 2A = nF = mV , n´número de arestas de cada face e m número de arestas que sai de cada vértice. Segue da relação de Euler que $F - \frac{Fn}{2} + \frac{Fn}{m} = 2$. Ou seja, $F = \frac{4m}{2(n+m)-nm}$.

Sabemos que $n, m \geq 3$.

Caso 1: m = 3 . Então $F = \frac{12}{6-n}$. As possibilidades para n são: n = 3 e F = 4.. Temos o tetraedro. n = 4 e F = 6. Temos o hexaedro. E n = 5 e F = 12. Temos o dodecaedro.

Caso 2: m = 4. Então $F = \frac{16}{8-2n}$. A única possibilidade é n = 3 e F = 8. Temos o octaedro.

Caso 3: m = 5. Então $F = \frac{20}{10-3n}$. A única possibilidade é n = 3 e F = 20. Temos o icosaedro.

Exercício 19 Verifique que não é possível ter o caso $m \geq 6$.

Poliedros de Platão tais que todas as faces são polígonos regulares e que todos os ângulos são iguais, são chamados de poliedros regulares.